КРАТКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ СПРАВОЧНИК

ПОД ОБЩЕЙ РЕДАКЦИЕЙ
К. П. ЯКОВЛЕВА

ТОМ ПЕРВЫЙ
МАТЕМАТИКА. ФИЗИКА

ГОСУДАРСТВЕННОЕ ИЗДАТЕЛЬСТВО
ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ
Москва 1960

В составлении первого тома принимали участие

Г. Л. ЛУНЦ, К. П. ЯКОВЛЕВ, А. Р. ЯНПОЛЬСКИЙ

СОДЕРЖАНИЕ

Предисловие 5

Отдел первый. МАТЕМАТИКА

Г. Л. Лунц и А. Р. Янпольский

Некоторые обозначения 7

Глава 1-1. **Некоторые сведения из элементарной математики** 8
§ 1-1. Алгебра 8
§ 1-2. Геометрия 18
§ 1-3. Тригонометрические и гиперболические функции 39

Глава 1-2. **Определители и системы линейных уравнений** . . . 53
§ 1-4. Определители 53
§ 1-5. Системы линейных уравнений 55

Глава 1-3. **Аналитическая геометрия** 60
§ 1-6. Аналитическая геометрия на плоскости 60
§ 1-7. Аналитическая геометрия в пространстве 74

Глава 1-4. **Дифференциальное исчисление** 84
§ 1-8. Функции одной переменной 84
§ 1-9. Функции многих переменных 93

Глава 1-5. **Интегральное исчисление** 97
§ 1-10. Неопределенный интеграл 97
§ 1-11. Определенный интеграл 111
§ 1-12. Кратные интегралы 126
§ 1-13. Криволинейный интеграл 134
§ 1-14. Интеграл по поверхности 140

Глава 1-6. **Дифференциальная геометрия** 142
§ 1-15. Плоские кривые 142
§ 1-16. Пространственные кривые 157
§ 1-17. Поверхности 161

Глава 1-7. **Бесконечные ряды** 165
§ 1-18. Числовые ряды 165
§ 1-19. Функциональные ряды 170

Глава 1-8. **Векторное исчисление** 183
§ 1-20. Векторная алгебра 183
§ 1-21. Векторный анализ 187

Глава 1-9. **Дифференциальные уравнения** 192
§ 1-22. Уравнения первого порядка 192
§ 1-23. Уравнения высших порядков 195

Глава 1-10. **Приближенные методы анализа** 202
§ 1-24. Приближенное решение алгебраических и трансцендентных уравнений 202
§ 1-25. Численное интегрирование (механические квадратуры) . 207
§ 1-26. Численное решение дифференциальных уравнений 211
§ 1-27. Графические методы 216

Отдел второй. ФИЗИКА

К. П. Яковлев

Обозначения 219

Глава 2-1. Физические величины, их размерности и единицы измерений 220

§ 2-1. Метрическая система мер и основные системы единиц 220
§ 2-2. Анализ размерностей 223
§ 2-3. Система СГС и переход от одной системы единиц к другой 227
§ 2-4. Механические и акустические величины, их размерности и единицы измерения 232
§ 2-5. Молекулярные и тепловые величины, их размерности и единицы измерения 236
§ 2-6. Электрические и магнитные величины, их размерности и единицы измерения 239
§ 2-7. Световые величины и их единицы измерения 242
§ 2-8. Единицы измерения в атомной и ядерной физике 243
§ 2-9. Часто встречающиеся физические величины 244

Глава 2-2. Обработка результатов измерений (элементы теории ошибок) 245

§ 2-10. Ошибки систематические и случайные 245
§ 2-11. Ошибки абсолютные и относительные 246
§ 2-12. Ошибки результата измерений: средняя квадратичная, вероятная и средняя 247
§ 2-13. Определение ошибок функции по ошибкам аргументов 249
§ 2-14. Примеры вычисления ошибок результатов измерения . . 251
§ 2-15. Нахождение наиболее выгодных условий измерения . . . 254

Глава 2-3. Физические таблицы 255

§ 2-16. Общие свойства тел 255
§ 2-17. Акустика 322
§ 2-18. Молекулярные явления и теплота 327
§ 2-19. Магнитные и электрические явления 353
§ 2-20. Оптика 368
§ 2-21. Строение атома и ядерные процессы 376

ПРИЛОЖЕНИЯ

1. Математические таблицы 401

1. Некоторые часто встречающиеся постоянные 401
2. Квадраты, кубы, корни, логарифмы, $\pi n, {}^1/_4\ \pi n^2$, обратные величины 402
3. Четвертая и пятая степени 419
4. Перевод градусной меры в радианную 420
5. Элементы сегмента круга 421
6. Тригонометрические функции 422
7. Натуральные логарифмы 426
8. Показательные и гиперболические функции 430

2. Перечень физических таблиц 431

3. Предметный указатель 434

ПРЕДИСЛОВИЕ

Этот справочник предназначается главным образом для студентов втузов; он может быть полезным также инженерам, техникам и преподавателям втузов.

Перед авторами и редакцией «Краткого физико-технического справочника» стояла задача — дать в трех небольших по объему и формату книжках наиболее важный материал для справок по математике, физике (том I), общетехническим дисциплинам — общей механике, сопротивлению материалов, теории механизмов и машин (том II) и тем техническим наукам, которые непосредственно опираются на физику (аэро- и гидродинамика, техническая термодинамика, электро- и радиотехника— (том III). Книги такого рода издавались и раньше *); они печатались большими тиражами и всегда получали широкое распространение. В отличие от них настоящий справочник назван «физико-техническим»: в нем первым двум отделам уделено особенно большое внимание, так как роль физики и математики в технике за последние десятилетия значительно возросла.

Указанную задачу возможно было решить лишь путем очень жесткого отбора материала, сжатого изложения и больших сокращений того, что раньше предполагалось поместить.

В отделе «Математика» основное внимание было обращено на высшую математику; этот материал соответствует содержанию общевтузовской программы; где оказывалось возможным, приведены только формулы почти без пояснительного текста. По элементарной математике, как правило, не приводятся сведения, которые должны быть хорошо известны в школе; во всяком случае читатель не найдет в этом справочнике формул квадрата суммы и разности, площади прямоугольного треугольника, длины окружности, определения синуса и косинуса и т. д. — эти сведения напрасно занимали бы здесь место, так как читатель, на которого рассчитан справочник, вряд ли может в них нуждаться. Глава «Некоторые сведения из элементарной математики» в справочнике имеется, но в ней преобладает материал, который выходит за пределы школьного курса.

В отделе «Физика» собран материал, необходимый для работ в физических лабораториях: изложение втузовского курса общей физики, даже конспективное, потребовало бы сильного увеличения книги. Здесь приведены: анализ размерностей, обработка результатов наблюдений и большое количество таблиц по всем разделам физики, а также таблицы общих свойств химических элементов, основных неорганических и органических соединений и некоторых минералов. Числовые материалы в таблицах проверены по последним данным, опубликованным в нашей и зарубежной литературе (главным образом, германской, английской и американской).

---

*) Например, «Карманный технический справочник» под ред. С. Н. Ванкова (последнее издание в 1938 г.), «Краткий технический справочник» под ред. В. А. Зиновьева в двух томах (2-е изд. в 1952 г.).

Сведения, помещенные в отделах «Общая механика», «Сопротивление материалов», «Теория механизмов и машин», «Аэро- и гидродинамика», «Техническая термодинамика», «Электротехника» и «Радиотехника» представляют собой конспективное изложение соответствующих курсов, установленных по этим дисциплинам основными втузовскими программами для машиностроительных и энергетических специальностей.

В конце пёрвого тома помещены краткие математические таблицы, достаточные для предварительных расчетов, и для облегчения ориентировки в справочнике — перечень физических таблиц и алфавитный указатель.

Трудности, с которыми встретились авторы и редакция справочника при выборе и отборе материала, возможно, привели к упущениям и недостаткам. Редакция обращается к читателям с просьбой направлять свои замечания и пожелания для исправлений и дополнений в последующих изданиях книги по адресу: Москва, В-71, Ленинский проспект, Физматгиз, Редакции «Краткого физико-технического справочника».

К. П. Яковлев

ОТДЕЛ ПЕРВЫЙ

МАТЕМАТИКА

Г. Л. Лунц и А. Р. Янпольский

НЕКОТОРЫЕ ОБОЗНАЧЕНИЯ

$\equiv$ — тождественно или тождественно равно (применяется в случае, когда желательно особо отметить тождественность обеих частей равенства).

$\approx$ — приближенно равно.

$\ll$ — мало сравнительно с ... (значительно меньше).

$\gg$ — велико сравнительно с ... (значительно больше).

$|a|$ — абсолютная величина числа a.

i — квадратный корень из -1; $i = \sqrt{-1}$.

lg — логарифм при основании 10 (обыкновенный, или десятичный, логарифм).

ln — логарифм при основании $e = 2{,}71828...$ (натуральный логарифм).

$n!$ — факториал; $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n$.

sh — синус гиперболический.

ch — косинус гиперболический.

th — тангенс гиперболический.

cth — котангенс гиперболический.

Arsh — ареасинус гиперболический.

Arch — ареакосинус гиперболический.

Arth — ареатангенс гиперболический.

Arcth — ареакотангенс гиперболический.

const — постоянное.

Δ — приращение.

d — дифференциал; d^2, d^3, d^n — дифференциалы второго, третьего, n-го порядка.

$\frac{d}{dx}$ — первая производная от некоторой функции по переменному x.

$\frac{d^n}{dx^n}$ — производная n-го порядка от некоторой функции по переменному x, например $\frac{d^2f}{dx^2}$, $\frac{d^3y}{dx^3}$.

$'$ $''$ $'''$ IV V — обозначения последовательных производных от функции одного переменного, например $f'(x)$, y'', y''', $f^{IV}(x)$, y^{V}.

f'_x, f'_y, f''_{xx}, f''_{xy}

$\frac{\partial f}{\partial x}$, $\frac{\partial f}{\partial y}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y}$

} частные производные от функции f нескольких переменных x, y, z, ...

$d_x z$, $d_y u$ — частные дифференциалы.

$\sum$ — сумма, например $\sum_{k=1}^{n} u_k = u_1 + u_2 + \ldots + u_n$.

$\prod$ — произведение, например $\prod_{k=1}^{n} u_k = u_1 u_2 u_3 \ldots u_n$.

$\Big|_a^b$ — знак двойной подстановки, напр. $F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a)$.

$\int_l$, $\oint_C$ — криволинейный интеграл, взятый по дуге l, по замкнутому контуру C.

$\int_S$, $\int_V$ — интеграл, распространенный на площадь S, на объем V.

$\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$ — обозначения векторов.

$\mathbf{a}^0$ — единичный вектор (орт) того же направления, что и вектор $\mathbf{a}$.

$\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$, $\mathbf{k}$ — координатные орты прямоугольной системы координат.

$|\mathbf{a}|$ или a — длина (абсолютная величина) вектора $\mathbf{a}$.

$\alpha\mathbf{a}$ — произведение скаляра на вектор.

$\mathbf{ab}$ — скалярное произведение двух векторов.

$\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ или $[\mathbf{a}, \mathbf{b}]$ — векторное произведение двух векторов.

$\mathbf{abc} = \mathbf{a}(\mathbf{b} \times \mathbf{c})$ — смешанное произведение трех векторов.

a_x, a_y, a_z — координаты вектора $\mathbf{a}$ в декартовой системе.

∇ — дифференциальный оператор Гамильтона («набла»).

grad — градиент скалярного поля ($\operatorname{grad} \varphi = \nabla\varphi$).

div — дивергенция векторного поля ($\operatorname{div} \mathbf{V} = \nabla\mathbf{V}$).

rot — вихрь векторного поля ($\operatorname{rot} \mathbf{V} = \nabla \times \mathbf{V}$).

$\frac{\partial U}{\partial \mathbf{e}}$ — производная скалярного поля по направлению $\mathbf{e}$.

Δ или ∇^2 — оператор Лапласа $\left(\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right)$.

Глава 1-1

НЕКОТОРЫЕ СВЕДЕНИЯ ИЗ ЭЛЕМЕНТАРНОЙ МАТЕМАТИКИ

§ 1-1. Алгебра

Прогрессии. 1. *Арифметическая* прогрессия:

$$a_1;\ a_1 + d;\ a_1 + 2d;\ a_1 + 3d; \ldots$$

a_1 — первый член прогрессии, d — ее разность; при $d > 0$ прогрессия возрастающая, при $d < 0$ — убывающая.

Общее выражение n-го члена:

$$a_n = a_1 + (n-1)\,d.$$

Сумма n первых членов:

$$S_n = \frac{a_1 + a_n}{2}\,n = \frac{n}{2}\,[2a_1 + (n-1)\,d].$$

2. *Геометрическая* прогрессия:

$$a_1;\ a_1q;\ a_1q^2;\ a_1q^3;\ \ldots$$

a_1 — первый член прогрессии, q — ее знаменатель; при $q > 1$ прогрессия возрастающая, при $|q| < 1$ — убывающая.

Общее выражение n-го члена:

$$a_n = a_1q^{n-1}.$$

Сумма n первых членов:

$$S_n = \frac{a_1(q^n - 1)}{q - 1} = \frac{a_1(1 - q^n)}{1 - q}.$$

Если число членов убывающей геометрической прогрессии безгранично возрастает, то $q^n \to 0$ и $S = \lim\limits_{n\to\infty} S_n = \dfrac{a_1}{1-q}$ (сумма бесконечно убывающей геометрической прогрессии).

Некоторые конечные числовые ряды

1) $1 + 2 + 3 + \ldots + (n-1) + n = \dfrac{n(n+1)}{2}$;

2) $p + (p+1) + (p+2) + \ldots + (p+n-2) + (p+n-1) = \dfrac{n(2p+n-1)}{2}$;

3) $1 + 3 + 5 + \ldots + (2n-3) + (2n-1) = n^2$;

4) $2 + 4 + 6 + \ldots + (2n-2) + 2n = n(n+1)$;

5) $1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + (n-1)^2 + n^2 = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$;

6) $1^2 + 3^2 + 5^2 + \ldots + (2n-1)^2 = \dfrac{n(4n^2-1)}{3}$;

7) $1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots + (n-1)^3 + n^3 = \dfrac{n^2(n+1)^2}{4}$;

8) $1^3 + 3^3 + 5^3 + \ldots + (2n-1)^3 = n^2(2n^2-1)$.

Логарифмы. Переход от одной системы логарифмов к другой осуществляется по формуле

$$\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}.$$

В частности, при переходе от десятичных логарифмов к натуральным и от натуральных к десятичным, т. е. при $a = 10$, $c = e \approx 2{,}71828$, $\lg b = M \ln b$; $\ln b = \dfrac{1}{M} \lg b$, где $M = \lg e \approx 0{,}43429$. $\dfrac{1}{M} \approx 2{,}30259$.

Соединения. Виды соединений: 1) размещения, 2) перестановки и 3) сочетания.

1. *Размещения* (из n элементов по m). Число всех размещений из n элементов по m (принятое обозначение: A_n^m) определяется формулой

$$A_n^m = n(n-1)(n-2)\ldots(n-m+1) = \frac{n!}{(n-m)!}.$$

Например, число размещений из трех элементов a, b и c по два (ab, ac, bc, ba, ca, cb) равно: $A_3^2 = 3 \cdot 2 = 6$.

2. *Перестановки* (из n элементов). Число всех перестановок из n элементов (принятое обозначение: P_n) определяется формулой

$$P_n = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot \ldots \cdot n = n! = A_n^n.$$

Например, число всех перестановок из трех элементов a, b и c (abc, bca, cab, acb, bac, cba) равно: $P_3 = 1 \cdot 2 \cdot 3 = 6$.

Если среди n элементов a, b, c, ... некоторые повторяются (например, a повторяется α раз, b повторяется β раз, c повторяется γ раз и т. д.), то число перестановок вычисляется по формуле

$$P_n = \frac{n!}{\alpha!\,\beta!\,\gamma!\ldots},$$

где $\alpha + \beta + \gamma + \ldots = n$.

3. *Сочетания* (из n элементов по m). Число всех сочетаний из n элементов по m [принятое обозначение: C_n^m или $\binom{n}{m}$] определяется формулой

$$C_n^m = \binom{n}{m} = \frac{A_n^m}{P_m} = \frac{n!}{m!\,(n-m)!}.$$

Например, число сочетаний из трех элементов по два (ab, ac, bc) равно $C_3^2 = \frac{3 \cdot 2}{2} = 3$. В частности: $C_n^1 = n$; $C_n^n = C_n^0 = 1$.

Основное свойство сочетаний:

$$C_n^m = C_n^{n-m}.$$

Бином Ньютона. *Биномом Ньютона* называется формула, представляющая выражение $(a+b)^n$ в виде многочлена при целом и положительном n (другие случаи см. стр. 173):

$$(a+b)^n = a^n + na^{n-1}b + \frac{n(n-1)}{2!}a^{n-2}b^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!}a^{n-3}b^3 + \ldots$$

$$\ldots + \frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-k+1)}{k!}a^{n-k}b^k + \ldots + nab^{n-1} + b^n$$

или

$$(a+b)^n = C_n^0 a^n + C_n^1 a^{n-1}b + C_n^2 a^{n-2}b^2 + \ldots + C_n^k a^{n-k}b^k + \ldots$$

$$\ldots + C_n^{n-1} ab^{n-1} + C_n^n b^n.$$

При нахождении числовых значений коэффициентов последовательных членов в правой части этой формулы можно пользоваться *треугольником Паскаля*:

n	Биномиальные коэффициенты
0	1
1	1 1
2	1 2 1
3	1 3 3 1
4	1 4 6 4 1
5	1 5 10 10 5 1
6	1 6 15 20 15 6 1

. . . . . .

Степень бинома указывается в первом вертикальном столбце: значения коэффициентов даются в горизонтальных рядах. Каждый из коэффициентов получается в результате сложения двух коэффициентов предыдущего ряда, стоящих над ним справа и слева. Кроме того, следует иметь в виду, что коэффициенты, равноотстоящие от начала и конца каждого ряда, равны между собой.

Комплексные числа. *Алгебраическая форма*: $a + bi$, a — действительная часть комплексного числа, b — мнимая часть.

Тригонометрическая форма: $r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$; r — *модуль* или *абсолютная величина* комплексного числа ($r \geq 0$); φ — *аргумент*.

Между величинами a, b, r и φ в этих выражениях имеют место соотношения:

$$a = r\cos\varphi,\quad b = r\sin\varphi,\quad r = \sqrt{a^2 + b^2},\quad \operatorname{tg}\varphi = \frac{b}{a}.$$

Два комплексных числа $a_1 + b_1 i = r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)$ и $a_2 + b_2 i = r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)$ называются *сопряженными*, если $a_2 = a_1$, $b_2 = -b_1$ (т. е. $r_2 = r_1$, $\varphi_2 = -\varphi_1$).

Сложение и вычитание комплексных чисел:

$$(a_1 + b_1 i) \pm (a_2 + b_2 i) = (a_1 \pm a_2) + (b_1 \pm b_2) i,$$

т. е. при сложении (или вычитании) комплексных чисел отдельно складываются (или вычитаются) их действительные и мнимые части.

Сумма двух сопряженных комплексных чисел есть число действительное:

$$(a + bi) + (a - bi) = 2a.$$

Умножение комплексных чисел:

$$(a_1 + b_1 i)(a_2 + b_2 i) = (a_1 a_2 - b_1 b_2) + (a_1 b_2 + a_2 b_1) i,$$

или в тригонометрической форме

$$[r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)][r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)] = r_1 r_2[\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 + \varphi_2)],$$

т. е. модуль произведения равен произведению модулей сомножителей, а аргумент — сумме аргументов сомножителей.

Произведение сопряженных комплексных чисел есть число действительное, определяемое формулой

$$(a + bi)(a - bi) = a^2 + b^2.$$

Деление комплексных чисел:

$$\frac{a_1+b_1i}{a_2+b_2i}=\frac{(a_1a_2+b_1b_2)+(a_2b_1-a_1b_2)\,i}{a_2^2+b_2^2}$$

или

$$\frac{r_1(\cos\varphi_1+i\sin\varphi_1)}{r_2(\cos\varphi_2+i\sin\varphi_2)}=\frac{r_1}{r_2}[\cos(\varphi_1-\varphi_2)+i\sin(\varphi_1-\varphi_2)],$$

т. е. модуль частного равен частному модулей делимого и делителя, а аргумент — разности их аргументов.

Возведение в степень комплексного числа:

$$[r(\cos\varphi+i\sin\varphi)]^n=r^n(\cos n\varphi+i\sin n\varphi)$$

(*формула Муавра*), т. е. модуль возводится в n-ю степень, а аргумент умножается на n. В частности:

$$i^{4m}=1;\quad i^{4m+1}=i;\quad i^{4m+2}=-1;\quad i^{4m+3}=-i\ (m\text{ — целое}).$$

Извлечение корня из комплексного числа:

$$\sqrt[n]{r(\cos\varphi+i\sin\varphi)}=\sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\varphi+2k\pi}{n}+i\sin\frac{\varphi+2k\pi}{n}\right),$$

где $k=0,\ 1,\ 2,\ 3,\ \ldots,\ n-1$.

Пример.

$$\sqrt[3]{-1}=\sqrt[3]{1(\cos\pi+i\sin\pi)}=\cos\frac{\pi+2k\pi}{3}+i\sin\frac{\pi+2k\pi}{3}.$$

Полагая $k=0,\ 1,\ 2$, получим три значения:

$$\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2};\quad -1;\quad \frac{1}{2}-\frac{i\sqrt{3}}{2}.$$

Рациональные алгебраические выражения. Любое целое рациональное алгебраическое выражение $P(x)$ можно преобразовать к виду многочлена

$$P(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+a_2x^{n-2}+\ldots+a_{n-1}x+a_n,$$

расположенного по нисходящим (или восходящим) степеням x, где a_0, a_1, a_2, ..., a_n служат коэффициентами многочлена.

Во многих случаях нетрудно произвести разложение многочлена на множители с помощью тождественных преобразований, например:

$$x^2+ax+bx+ab=(x^2+ax)+(bx+ab)=$$
$$=x(x+a)+b(x+a)=(x+a)(x+b).$$

Каждое дробное рациональное выражение можно преобразовать в отношение двух многочленов, не имеющих общих множителей (несократимая дробь):

$$R(x)=\frac{Q(x)}{P(x)}=\frac{b_0x^m+b_1x^{m-1}+b_2x^{m-2}+\ldots+b_{m-1}x+b_m}{a_0x^n+a_1x^{n-1}+a_2x^{n-2}+\ldots+a_{n-1}x+a_n}.$$

Отношение двух многочленов называется *правильной рациональной дробью*, если степень числителя меньше степени знаменателя ($m < n$), и *неправильной*, если степень числителя больше или равна степени знаменателя ($m \geq n$). Любая неправильная рациональная дробь делением числителя на знаменатель может быть представлена в виде суммы многочлена и правильной дроби, например:

$$\frac{2x^3 + 5x^2 + 13x + 4}{x^2 + 2x + 3} = 2x + 1 + \frac{5x + 1}{x^2 + 2x + 3}.$$

Остаток от деления многочлена $P(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \ldots + a_n$ на $x - \alpha$ равен значению многочлена при $x = \alpha$, т. е. $P(x) = (x - \alpha) P_1(x) + P(\alpha)$, где $P_1(x)$ — многочлен степени $n - 1$.

В случае, когда $P(\alpha) = 0$ (т. е. α — корень многочлена), деление совершается без остатка:

$$P(x) = (x - \alpha) P_1(x).$$

Если $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots, \alpha_n$ — корни данного многочлена, то многочлен может быть представлен в виде произведения множителей, линейных (т. е. первой степени) относительно x:

$$P(x) = a_0 (x - \alpha_1) (x - \alpha_2) (x - \alpha_3) \ldots (x - \alpha_n).$$

Если в разложении многочлена множитель $x - \alpha$ встречается k раз, то α называется *корнем многочлена кратности* k. В случае, когда коэффициенты многочлена $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n$ действительны, каждые два множителя, соответствующие сопряженным комплексным корням, можно заменить квадратным трехчленом $x^2 + px + q$, где p и q — действительные числа. Поэтому в общем случае имеем *) (при действительных коэффициентах многочлена):

$$P(x) = a_0 (x - \alpha_1)^{k_1} (x - \alpha_2)^{k_2} \ldots (x^2 + p_1x + q_1)^{s_1} (x^2 + p_2x + q_2)^{s_2} \ldots,$$

где $k_1, k_2, \ldots$ — показатели кратности действительных корней; а $s_1, s_2, \ldots$ — показатели кратности пар сопряженных комплексных корней ($k_1 + k_2 + \ldots + 2s_1 + 2s_2 + \ldots = n$), а числа $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, p_1, q_1, p_2, q_2, \ldots$ — действительные.

Каждая правильная несократимая дробь **) с действительными коэффициентами

$$R(x) = \frac{Q(x)}{P(x)} = \frac{b_0x^m + b_1x^{m-1} + \ldots + b_m}{x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_n}$$

может быть единственным образом разложена на сумму элементарных (простейших) дробей вида

$$\frac{A}{(x - \alpha)^k} \quad \text{или} \quad \frac{Cx + D}{(x^2 + px + q)^s}$$

$\left(\frac{p^2}{4} - q < 0\right)$, где k и s — целые положительные числа, а α, p и q —

*) Если $a + bi$ — корень кратности k многочлена с действительными коэффициентами, то $a - bi$ тоже корень этого многочлена и притом той же кратности.

**) Коэффициент при старшем члене знаменателя можно всегда сделать равным единице, разделив на него числитель и знаменатель дроби.

действительные числа; именно:

$$\frac{Q(x)}{P(x)} = \frac{b_0x^m + b_1x^{m-1} + \ldots + b_m}{(x-\alpha_1)^{k_1}(x-\alpha_2)^{k_2}\ldots(x^2+p_1x+q_1)^{s_1}\ldots} =$$

$$= \frac{A_1}{x-\alpha_1} + \frac{A_2}{(x-\alpha_1)^2} + \ldots + \frac{A_{k_1}}{(x-\alpha_1)^{k_1}} + \frac{B_1}{x-\alpha_2} + \frac{B_2}{(x-\alpha_2)^2} + \ldots$$

$$\ldots + \frac{B_{k_2}}{(x-\alpha_2)^{k_2}} + \ldots$$

$$\ldots + \frac{C_1x+D_1}{x^2+p_1x+q_1} + \frac{C_2x+D_2}{(x^2+p_1x+q_1)^2} + \ldots + \frac{C_{s_1}x+D_{s_1}}{(x^2+p_1x+q_1)^{s_1}} + \ldots$$

Величины $A_1, A_2, \ldots, A_{k_1}, B_1, B_2, \ldots, B_{k_2}, C_1, C_2, \ldots, C_{s_1}$ и т. д. можно найти *методом неопределенных коэффициентов*. Для этого складывают все простые дроби, приняв в качестве общего знаменателя знаменатель исходной дроби, числитель полученной суммы располагают по убывающим степеням x и приравнивают коэффициенты при одинаковых степенях x этого числителя и числителя исходной дроби (в силу тождественности этих числителей).

Пример. Разложить дробь $\frac{x-3}{x^3-x}$ на простейшие.

Так как $x^3 - x = x(x-1)(x+1)$, то

$$\frac{x-3}{x^3-x} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x-1} + \frac{C}{x+1}$$

и

$$x - 3 \equiv (A+B+C)x^2 + (B-C)x - A.$$

Сравнивая коэффициенты, получаем:

$$A + B + C = 0, \quad B - C = 1, \quad -A = -3,$$

откуда $A = 3$, $B = -1$; $C = -2$ и, следовательно,

$$\frac{x-3}{x^3-x} = \frac{3}{x} - \frac{1}{x-1} - \frac{2}{x+1}.$$

Иррациональные выражения. Всякое *иррациональное выражение* можно привести к простейшему (так называемому *нормальному*) виду различными алгебраическими преобразованиями, как-то: сокращение показателя, вынесение за знак корня и уничтожение иррациональности в знаменателе.

Уничтожение иррациональности в знаменателе дроби:

$$\frac{a}{\sqrt[n]{b^m}} = \frac{a\sqrt[n]{b^{n-m}}}{b}; \quad \frac{a}{\sqrt{b} \pm \sqrt{c}} = \frac{a(\sqrt{b} \mp \sqrt{c})}{b-c}.$$

Преобразование выражения $\sqrt{A \pm \sqrt{B}}$:

$$\sqrt{A \pm \sqrt{B}} = \sqrt{\frac{A+m}{2}} \pm \sqrt{\frac{A-m}{2}},$$

где $m = \sqrt{A^2 - B}$.

Уравнения. Любое алгебраическое уравнение с одним неизвестным можно при помощи алгебраических преобразований привести к так

называемой *канонической форме*:

$$a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \ldots + a_{n-1}x + a_n = 0.$$

Показатель степени n называется *степенью уравнения*.

Уравнение первой степени (*линейное*) $ax + b = 0$ имеет корень $x = -\frac{b}{a}$.

Уравнения второй степени (*квадратные*) имеют корни, определяемые следующими формулами.

Приведенное уравнение $x^2 + px + q = 0$:

$$x_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}.$$

Уравнение общего вида $ax^2 + bx + c = 0$:

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

Уравнение с четным средним коэффициентом $ax^2 + 2mx + c = 0$:

$$x_{1,2} = \frac{-m \pm \sqrt{m^2 - ac}}{a}.$$

Неполное уравнение вида $ax^2 + bx = 0$:

$$x_1 = 0;\ x_2 = -\frac{b}{a}.$$

Неполное уравнение вида $ax^2 + c = 0$:

$$x_{1,2} = \pm\sqrt{-\frac{c}{a}}.$$

Исследование корней квадратного уравнения можно произвести с помощью выражения $4ac - b^2$ (или $q - \frac{p^2}{4}$ для приведенного уравнения), которое обозначается через Δ и называется *дискриминантом квадратного уравнения*. Если $\Delta < 0$, то корни действительные и разные; если $\Delta = 0$, то корни действительные и равны между собой; если $\Delta > 0$, то корни мнимые.

Если x_1 и x_2 — корни уравнения $ax^2 + bx + c = 0$, то трехчлен $ax^2 + bx + c$ можно преобразовать по формуле

$$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2).$$

Любой трехчлен второй степени с действительными коэффициентами можно представить в виде $ax^2 + bx + c = a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \alpha^2\right]$ ($\Delta < 0$) или $ax^2 + bx + c = a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \alpha^2\right]$ ($\Delta > 0$), где α — действительное, причем $\alpha = \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$, если $\Delta < 0$ и $\alpha = \frac{\sqrt{4ac - b^2}}{2a}$, если $\Delta > 0$.

Корни уравнения третьей степени (*кубического*) в приведенной форме $x^3 + px + q = 0$ находятся по формуле

$$x = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}}.$$

При этом:

а) если $\left(\frac{q}{2}\right)^2+\left(\frac{p}{3}\right)^3>0$, то $x_1=A+B$;

$$x_2=-\frac{1}{2}(A+B)+i\frac{\sqrt{3}}{2}(A-B);$$

$$x_3=-\frac{1}{2}(A+B)-i\frac{\sqrt{3}}{2}(A-B),$$

где A и B — действительные значения кубичных корней, входящих в формулу;

б) если $\left(\frac{q}{2}\right)^2+\left(\frac{p}{3}\right)^3=0$, то $A=B$, $x_1=2A$, $x_2=x_3=-A$;

в) если $\left(\frac{q}{2}\right)^2+\left(\frac{p}{3}\right)^3<0$ (так называемый «неприводимый случай»), то в действительной форме корни выражаются по формулам:

$$x_1=2r\cos\frac{\varphi}{3};$$

$$x_2=2r\cos\frac{\varphi+2\pi}{3}=r\left(-\cos\frac{\varphi}{3}-\sqrt{3}\sin\frac{\varphi}{3}\right);$$

$$x_3=2r\cos\frac{\varphi+4\pi}{3}=r\left(-\cos\frac{\varphi}{3}+\sqrt{3}\sin\frac{\varphi}{3}\right),$$

где $r=\sqrt{-\frac{p}{3}}$ и $\cos\varphi=-\frac{q}{2r^3}$.

Уравнение третьей степени общего вида $ax^3+bx^2+cx+d=0$ можно преобразовать к приведенной форме $y^3+py+q=0$, разделив обе его части на a и выполнив подстановку $x=y-\frac{1}{3}\frac{b}{a}$.

Возвратные уравнения третьей степени $ax^3+bx^2\pm bx\pm a=0$ можно представить в виде $(x\pm1)[ax^2+(b\mp a)x+a]=0$ и свести к решению уравнений первой и второй степени.

Корни *уравнения четвертой степени* $x^4+bx^3+cx^2+dx+e=0$ совпадают с корнями двух квадратных уравнений:

$$x^2+(b+A)\frac{x}{2}+\left(y+\frac{by-d}{A}\right)=0,$$

где $A=\pm\sqrt{8y+b^2-4c}$, а y — какой-нибудь действительный корень кубического уравнения

$$8y^3-4cy^2+(2bd-8e)y+e(4c-b^2)-d^2=0.$$

Корни *биквадратного уравнения* $ax^4+bx^2+c=0$ определяются по формуле

$$x_{1,2,3,4}=\pm\sqrt{\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}}.$$

Возвратное уравнение четвертой степени $ax^4\pm bx^3+cx^2\pm bx+a=0$ путем деления всех членов уравнения на x^2 и подстановки $x+\frac{1}{x}=y$ сводятся к уравнению $ay^2\pm by+(c-2a)=0$, откуда $y_{1,2}=\frac{\mp b\pm\sqrt{b^2-4ac+8a^2}}{2a}$, после чего

$$x_{1,2,3,4}=\frac{y_{1,2}\pm\sqrt{y_{1,2}^2-4}}{2}.$$

Если уравнение имеет вид $ax^4 \pm bx^3 + cx^2 \mp bx + a = 0$, то производится подстановка $x - \frac{1}{x} = y$.

Корни *двучленного уравнения* $x^n - a = 0$ определяются по формуле $x = \sqrt[n]{a}$ (берутся все значения корня, см. стр. 12).

Трехчленное уравнение вида $ax^{2n} + bx^n + c = 0$ подстановкой $x^n = y$ сводится к квадратному уравнению $ay^2 + by + c = 0$.

Уравнение степени n в общем случае при $n > 4$ не может быть решено в радикалах. Способы отыскания приближенных решений указаны на стр. 202—207.

Если $x_1, x_2, \ldots, x_n$ — корни уравнения $x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \ldots + a_{n-1}x + a_n = 0$,

то

$$a_1 = -(x_1 + x_2 + x_3 + \ldots + x_n);$$

$$a_2 = x_1x_2 + x_1x_3 + x_1x_4 + \ldots + x_2x_3 + x_2x_4 + \ldots + x_{n-1}x_n;$$

$$a_3 = -(x_1x_2x_3 + x_1x_2x_4 + \ldots + x_1x_2x_n + x_2x_3x_4 + x_2x_3x_5 + \ldots + x_{n-2}x_{n-1}x_n);$$

. . . . . .

$$a_n = (-1)^n x_1x_2x_3 \ldots x_{n-1}x_n.$$

Неравенства. Решить *неравенство* $F(x) > f(x)$ или $F(x) < f(x)$, где $F(x)$ и $f(x)$ — выражения, содержащие неизвестное x, значит определить, при каких значениях x неравенство имеет место.

Два неравенства называются *равносильными*, если они справедливы при одних и тех же значениях неизвестного x.

Прибавление или вычитание из обеих частей неравенства одной и той же величины, а следовательно и перенос любой величины из одной части неравенства в другую с изменением ее знака, приводит к неравенству, равносильному исходному.

При умножении или делении обеих частей неравенства на положительное число получается неравенство, равносильное прежнему; при умножении и делении обеих частей неравенства на отрицательное число следует для получения неравенства, равносильного первоначальному, изменить смысл неравенства на обратный ($>$ на $<$ или $<$ на $>$).

Неравенства первой степени решаются при помощи указанных преобразований.

Неравенства второй степени (квадратные) могут быть приведены к одному из видов:

1) $x^2 + px + q > 0$.

Если корни x_1 и x_2 многочлена $x^2 + px + q$ мнимые ($p^2 - 4q < 0$), то неравенство имеет место при всех значениях x ($-\infty < x < \infty$).

Если корни x_1 и x_2 действительные и $x_1 = x_2$ ($p^2 - 4q = 0$), то неравенство справедливо при всех значениях x, кроме $x = x_1 = x_2$.

Если корни x_1 и x_2 действительны и различны ($p^2 - 4q > 0$), причем $x_1 < x_2$, то неравенство имеет место при $x < x_1$ и при $x > x_2$.

2) $x^2 + px + q < 0$.

Если корни x_1 и x_2 мнимые ($p^2 - 4q < 0$), то неравенство противоречиво.

Если $x_1 = x_2$ ($p^2 - 4q = 0$), то неравенство тоже противоречиво.

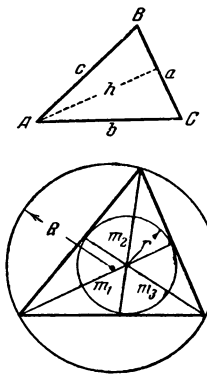
Если x_1 и x_2 действительны и различны ($p^2 - 4q > 0$) и $x_1 < x_2$, то неравенство имеет место при $x_1 < x < x_2$.

Пример 1. $x^2 - 5x + 6 > 0$; корни трехчлена $x_1 = 2$, $x_2 = 3$ (действительные) и, следовательно, $x < 2$ или $x > 3$.

Пример 2. $x^2 - x + 2 < 0$; $p^2 - 4q = -7 < 0$ (корни мнимые), неравенство противоречиво.

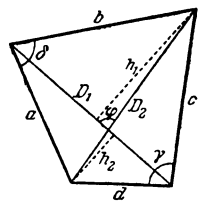
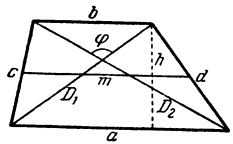
§ 1-2. Геометрия

Плоские фигуры (S — площадь фигуры, P — периметр, p — полупериметр)

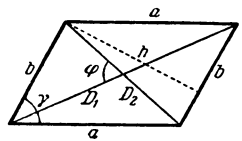
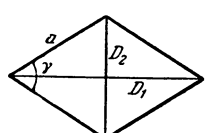
	Обозначения	Формулы
Треугольник *)  	a, b, c — стороны; A, B, C — противолежащие им углы; h — высота (из вершины $\angle A$); R — радиус описанной окружности; r — радиус вписанной окружности; m_1, m_2, m_3 — медианы; $\mu = \frac{1}{2}(m_1 + m_2 + m_3)$ — полусумма медиан; x_1 и y_1, x_2 и y_2, x_3 и y_3 — координаты вершин треугольника в декартовой системе.	$S = \frac{1}{2}ah = \frac{1}{2}ab\sin C =$ $= \frac{a^2}{2}\frac{\sin B \sin C}{\sin A} =$ $= \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} =$ $= 2R^2 \sin A \sin B \sin C =$ $= r^2 \operatorname{ctg}\frac{A}{2}\operatorname{ctg}\frac{B}{2}\operatorname{ctg}\frac{C}{2} = rp = \frac{abc}{4R} =$ $= \frac{4}{3}\sqrt{\mu(\mu-m_1)(\mu-m_2)(\mu-m_3)} =$ $= \pm\frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}.$ Если одна из вершин находится в начале координат, например $x_3 = y_3 = 0$, то $S = \pm\frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix}.$

*) Тригонометрические формулы, относящиеся к косоугольному треугольнику, см. также на стр. 47—48.

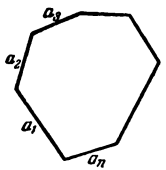
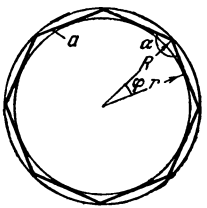
Продолжение

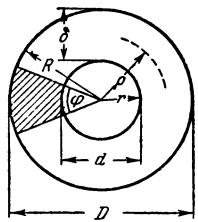
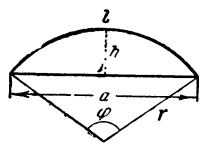
	Обозначения	Формулы
Четырехугольник 	a, b, c, d — стороны; D_1, D_2 — диагонали; φ — угол между диагоналями; h_1, h_2 — длины перпендикуляров, опущенных на диагональ D_1; δ, γ — два противолежащих угла четырехугольника.	$S = \frac{h_1 + h_2}{2} D_1 = \frac{1}{2} D_1 D_2 \sin\varphi =$ $= \frac{1}{2}(ab \sin\delta + cd \sin\gamma)$
Трапеция 	a, b — основания; c, d — боковые стороны; D_1, D_2 — диагонали; φ — угол между диагоналями; m — средняя линия; h — высота.	$m = \frac{1}{2}(a + b)$; $P = 2m + c + d$; $S = \frac{a+b}{2} h = mh =$ $= \frac{1}{2} D_1 D_2 \sin\varphi$.

Продолжение

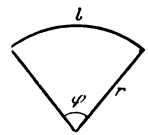
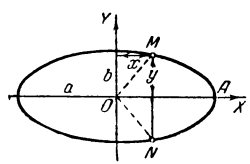
	Обозначения	Формулы
Параллелограмм 	a, b — стороны; h — расстояние между сторонами b; γ — угол параллелограмма; D_1, D_2 — диагонали; φ — угол между диагоналями.	$S = bh = ab \sin \gamma = \frac{1}{2} D_1 D_2 \sin \varphi.$
Ромб 	a — сторона; γ — угол ромба; D_1, D_2 — диагонали.	$S = a^2 \sin \gamma = \frac{1}{2} D_1 D_2.$

Продолжение

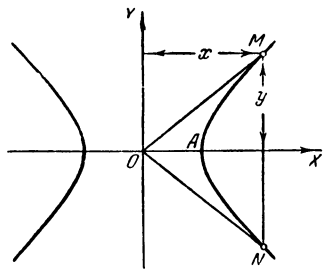
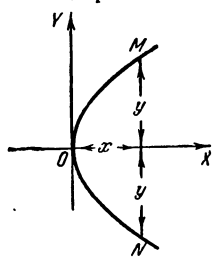
	Обозначения	Формулы
Многоугольник 	n — число сторон; x_1 и y_1, x_2 и y_2, . . . , x_n и y_n — координаты вершин многоугольника в декартовой системе.	$S = \pm \frac{1}{2}[(x_2y_1 - x_1y_2) + (x_3y_2 - x_2y_3) + \ldots + (x_ny_{n-1} - x_{n-1}y_n) + (x_1y_n - x_ny_1)]$. Площадь S можно также определить, разделив многоугольник диагоналями на треугольники.
Правильный многоугольник 	n — число сторон; a — сторона; R — радиус описанного круга; r — радиус вписанного круга; $\alpha = 180° - 2\varphi$ — угол многоугольника $\left(\varphi = \frac{180°}{n}\right)$.	$a = 2\sqrt{R^2 - r^2}$; $P = na = 2nR \sin \varphi = 2nr \operatorname{tg} \varphi$; $S = \frac{1}{4} na^2 \operatorname{ctg} \varphi = nr^2 \operatorname{tg} \varphi =$ $= \frac{1}{2} nR^2 \sin 2\varphi = \frac{1}{2} nar$.

	Обозначения	Формулы
Круговое кольцо 	r — внутренний радиус; R — наружный радиус; d — внутренний диаметр; D — наружный диаметр; $\rho = \frac{r+R}{2}$ — средний радиус; $\delta = R - r$ — ширина кольца; φ — центральный угол части кольца (в градусах).	$S = \pi (R^2 - r^2) = \frac{\pi}{4}(D^2 - d^2) = 2\pi\rho\delta.$ Площадь части кольца $S = \frac{\pi\varphi}{360}(R^2 - r^2) = \frac{\pi\varphi}{90}(D^2 - d^2) =$ $= \frac{\pi\varphi}{180}\rho\delta.$
Круговой сегмент 	r — радиус; φ — центральный угол (в градусах); $l = \frac{\pi\varphi}{180}r$ — длина дуги; a — длина хорды; h — высота.	$P = l + a;$ $S = \frac{1}{2}r^2\left(\frac{\pi\varphi}{180} - \sin\varphi\right) =$ $= \frac{r(l-a)+ah}{2}.$ Площадь сегмента, меньшего полукруга, $S \approx \frac{2}{3}ah + \frac{h^3}{2a}.$ Площадь сегмента, дуга которого меньше 50°, $S \approx \frac{2}{3}ah.$

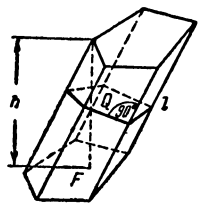
Продолжение

	Обозначения	Формулы
Круговой сектор 	r — радиус; φ — центральный угол (в градусах); $l = \frac{\pi\varphi}{180} r$ — длина дуги.	$P = l + 2r;$ $S = \frac{1}{2} lr = \frac{\pi r^2 \varphi}{360} \approx 0{,}00873 r^2 \varphi.$
Эллипс 	a и b — большая и малая полуоси эллипса; $\varepsilon = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a}$ — эксцентриситет; x, y — расстояния точки M эллипса от осей Y и X.	$P = 2\pi a \left[1 - \left(\frac{1}{2}\right)^2 \varepsilon^2 - \right.$ $\left. - \left(\frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4}\right)^2 \frac{\varepsilon^4}{3} - \left(\frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6}\right)^2 \frac{\varepsilon^6}{5} - \ldots\right] =$ $= 4aE\left(\varepsilon, \frac{\pi}{2}\right),$ где E — эллиптический интеграл 2-го рода (стр. 123); $P \approx \pi \left(3 \frac{a+b}{2} - \sqrt{ab}\right).$ $S = \pi ab.$ Площадь сегмента MAN: $S = ab \arccos \frac{x}{a} - xy.$ Площадь сектора $OMAN$: $S = ab \arccos \frac{x}{a}.$

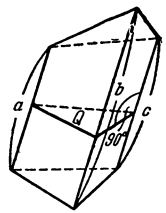
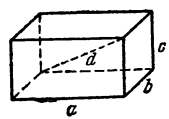
Продолжение

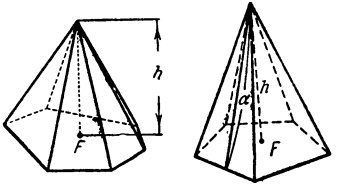
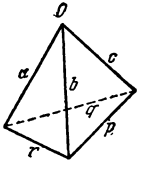
	Обозначения	Формулы
Гипербола 	a и b — вещественная и мнимая полуоси гиперболы; x, y — расстояния точки M гиперболы от осей Y и X.	Площадь гиперболического сегмента AMN: $S = xy - ab \ln\left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b}\right)$. Площадь гиперболического сектора $OMAN$: $S = ab \ln\left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b}\right) =$ $= -ab \ln\left(\frac{x}{a} - \frac{y}{b}\right)$.
Парабола 	x и $2y$ — высота и основание параболического сегмента OMN.	Площадь параболического сегмента OMN: $S = \frac{4}{3} xy$.

Многогранники (V — объем тела, $S_б$ и S — его боковая и полная поверхности; если формулы для S или $S_б$ не приводятся, то эти площади можно вычислить как сумму площадей плоских фигур, ограничивающих многогранник).

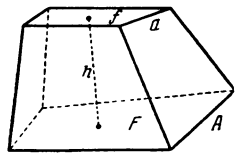
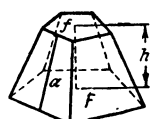
	Обозначения	Формулы
Призма 	F — площадь основания; h — высота; l — боковое ребро; Q и P — площадь и периметр сечения, перпендикулярного к ребру.	$V = Fh = Ql$; $S_б = Pl$; $S = Pl + 2F$.
Прямая призма	F и P — площадь и периметр основания; l — ребро.	$V = Fl$; $S_б = Pl$; $S = Pl + 2F$.
Призма, усеченная непараллельно основанию	l — длина отрезка OO_1, соединяющего центры тяжести оснований; Q — площадь сечения, перпендикулярного к отрезку OO'.	$V = Ql$.

Продолжение

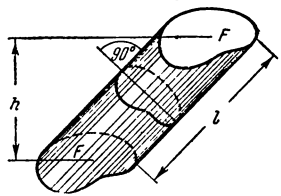
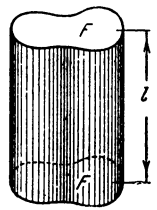
	Обозначения	Формулы
Треугольная призма, усеченная непараллельно основанию 	a, b, c — параллельные ребра; Q — площадь сечения, перпендикулярного к ребрам.	$V = \frac{1}{3}(a+b+c)\,Q.$
Прямоугольный параллелепипед 	a, b, c — ребра; d — диагональ: $d^2 = a^2 + b^2 + c^2.$	$V = abc;$ $S = 2(ab + bc + ac).$

	Обозначения	Формулы
Пирамида, правильная пирамида 	F — площадь основания; h — высота; P — периметр основания; a — апофема.	$V = \frac{1}{3} Fh.$ $S_б = \frac{1}{2} Pa$ (для правильной пирамиды).
Треугольная пирамида (тетраэдр) 	a, b, c, p, q, r — ребра; x_1, y_1, z_1; x_2, y_2, z_2; x_3, y_3, z_3 — координаты трех вершин пирамиды в декартовой системе координат; четвертая вершина помещена в начале координат.	$V^2 = \frac{1}{288} \begin{vmatrix} 0 & r^2 & q^2 & a^2 & 1 \\ r^2 & 0 & p^2 & b^2 & 1 \\ q^2 & p^2 & 0 & c^2 & 1 \\ a^2 & b^2 & c^2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$ $V = \pm \frac{1}{6} \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}$

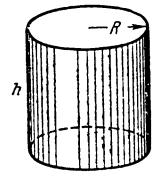
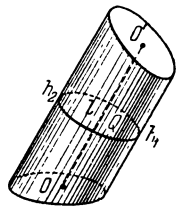
Продолжение

	Обозначения	Формулы
Усеченная пирамида (плоскость сечения параллельна основанию) 	F, f — площади оснований; h — высота (расстояние между основаниями); A, a — две соответственные стороны оснований.	$V = \frac{1}{3} h (F + f + \sqrt{Ff}) =$ $= \frac{1}{3} hF \left[1 + \frac{a}{A} + \left(\frac{a}{A}\right)^2\right].$
Правильная усеченная пирамида 	F, f — площади оснований; h — высота; P, p — периметры оснований; α — апофема.	$V = \frac{1}{3} h (F + f + \sqrt{Ff})$; $S_б = \frac{P + p}{2} \alpha.$

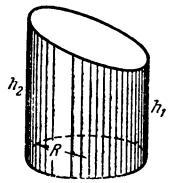
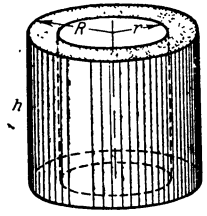
Круглые и некоторые другие тела
(V — объем тела, $S_б$ и S — его боковая и полная поверхности).

	Обозначения	Формулы
Цилиндр 	F и P — площадь и периметр основания; h — высота; l — образующая; Q и s — площадь и периметр сечения, перпендикулярного к образующей.	$V = Fh = Ql$; $S_б = sl = Ph$; $S = sl + 2F = Ph + 2F$.
Прямой цилиндр 	F и P — площадь и периметр основания; l — образующая.	$V = Fl$; $S_б = Pl$; $S = Pl + 2F$.

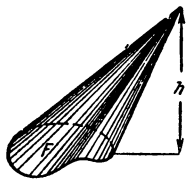
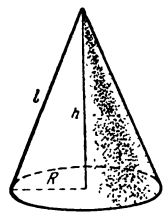
Продолжение

	Обозначения	Формулы
Прямой круговой цилиндр 	R — радиус основания; h — высота.	$V = \pi R^2 h$; $S_б = 2\pi Rh$; $S = 2\pi R\,(h + R)$.
Цилиндр, усеченный непараллельно основанию 	h_1 и h_2 — наименьшая и наибольшая образующие; l — длина отрезка, соединяющего центры тяжести оснований O и O_1; Q и L — площадь и периметр сечения, перпендикулярного отрезку OO_1.	$V = Ql$; $S_б = \frac{1}{2} L\,(h_1 + h_2)$.

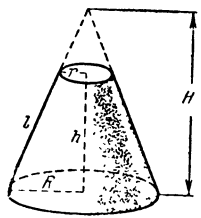
Продолжение

	Обозначения	Формулы
Прямой круговой цилиндр, усеченный непараллельно основанию 	R — радиус основания; h_1 и h_2 — наименьшая и наибольшая образующие.	$V = \frac{1}{2}\pi R^2 (h_1 + h_2)$; $S_б = \pi R (h_1 + h_2)$; $S = \pi R \left\| h_1 + h_2 + R + \sqrt{R^2 + \left(\frac{h_2 - h_1}{2}\right)^2} \right\|$.
Полый цилиндр (цилиндрическая труба) 	R — наружный радиус; r — внутренний радиус; $\rho = \frac{R + r}{2}$ — средний радиус; h — высота; $\delta = R - r$ — толщина.	$V = \pi h (R^2 - r^2) =$ $= \pi h \delta (2R - \delta) = \pi h \delta (2r + \delta) =$ $= 2\pi h \delta \rho$; $S_б = 2\pi h (R + r) = 4\pi h \rho$; $S = 2\pi (R + r)(h + R - r) =$ $= 4\pi \rho (h + \delta)$.

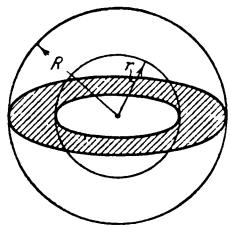
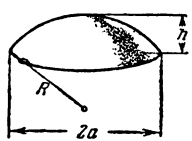
Продолжение

	Обозначения	Формулы
Конус 	F — площадь основания; h — высота.	$V = \frac{1}{3} Fh.$
Прямой круговой конус 	R — радиус основания; h — высота; $l = \sqrt{R^2 + h^2}$ — образующая.	$V = \frac{1}{3} \pi R^2 h;$ $S_б = \pi R \sqrt{R^2 + h^2} = \pi Rl;$ $S = \pi R (R + l).$

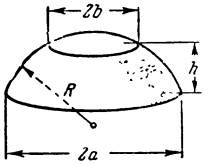
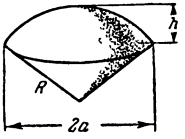
Продолжение

	Обозначения	Формулы
Усеченный прямой круговой конус  	R и r — радиусы оснований; h — высота; l — образующая: $l = \sqrt{h^2 + (R-r)^2}$; H — высота неусеченного конуса: $H = h + \frac{hr}{R-r}$.	$V = \frac{\pi h}{3}(R^2 + r^2 + Rr)$; $S_б = \pi l (R + r)$; $S = \pi [R^2 + r^2 + l(R + r)]$.
Эллиптический конус (прямой)	a, b — полуоси основания, h — высота	$V = \frac{\pi h a b}{3}$
Усеченный эллиптический конус	Параллельные основания — эллипсы с полуосями a, b и a_1, b_1; h — высота.	$V = \frac{\pi h}{6}[2(ab + a_1 b_1) + ab_1 + a_1 b]$.

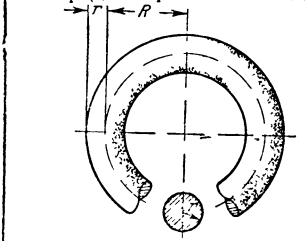
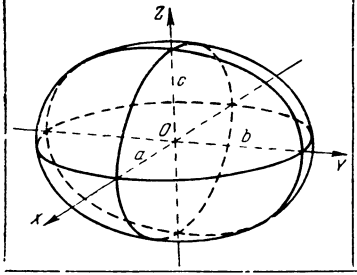
Продолжение

	Обозначения	Формулы
Полый шар 	R — наружный радиус; r — внутренний радиус; D — наружный диаметр; d — внутренний диаметр.	$V = \frac{4}{3}\pi (R^3 - r^3) =$ $= \frac{1}{6}\pi (D^3 - d^3);$ $S = 4\pi (R^2 + r^2) = \pi (D^2 + d^2).$
Шаровой сегмент 	h — высота сегмента; R — радиус шара; a — радиус основания сегмента: $a = \sqrt{h(2R - h)}.$	$V = \frac{1}{6}\pi h (3a^2 + h^2) =$ $= \frac{1}{3}\pi h^2 (3R - h);$ $S_б = 2\pi Rh = \pi (a^2 + h^2);$ $S = \pi (2a^2 + h^2) =$ $= \pi (a^2 + 2Rh).$

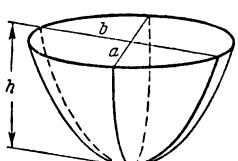
Продолжение

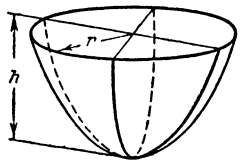
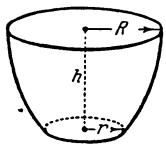
	Обозначения	Формулы
Шаровой слой 	h — высота слоя; a и b — радиусы оснований ($a > b$); R — радиус шара.	$V = \frac{1}{6}\pi h\,(3a^2 + 3b^2 + h^2) =$ $= V_1 + \frac{1}{6}\pi h l^2,$ где V_1 — объем вписанного в шаровой слой усеченного конуса, радиусы оснований которого a и b, высота h и образующая l; $S_б = 2\pi Rh;$ $S = \pi\,(a^2 + b^2 + 2Rh).$
Шаровой сектор 	h — высота сегмента; a — радиус основания сегмента; R — радиус шара.	$V = \frac{2}{3}\pi R^2 h;$ $S = \pi R\,(a + 2h).$

Продолжение

	Обозначения	Формулы
Тор (цилиндрическое кольцо) 	r — радиус поперечного сечения; R — расстояние центра поперечного сечения от оси вращения; $D = 2R$; $d = 2r$.	$V = 2\pi^2 Rr^2 = \frac{1}{4}\pi^2 Dd^2$; $S = 4\pi^2 Rr = \pi^2 Dd$.
Эллипсоид 	a, b, c — полуоси.	$V = \frac{4}{3}\pi abc$.

Продолжение

	Обозначения	Формулы
Эллипсоид вращения	$\varepsilon = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a}$ $(a > b)$; 1) Ось вращения $2a$ $(c = b)$. 2) Ось вращения $2b$ $(c = a)$.	1) $V = \frac{4}{3}\pi ab^2$; $S = 2\pi ab\left(\sqrt{1-\varepsilon^2} + \frac{\arcsin\varepsilon}{\varepsilon}\right)$. 2) $V = \frac{4}{3}\pi a^2 b$; $S = 2\pi a^2 + \frac{2\pi b^2}{\varepsilon}\ln\frac{a(1+\varepsilon)}{b}$.
Сегмент эллиптического параболоида 	a, b — полуоси эллипса (основания); h — высота.	$V = \frac{1}{2}\pi abh$.

	Обозначения	Формулы
Сегмент параболоида вращения 	r — радиус основания; h — высота.	$V = \frac{1}{2}\pi r^2 h.$
Усеченный параболоид вращения 	R и r — радиусы параллельных оснований; h — высота.	$V = \frac{1}{2}\pi h (R^2 + r^2).$

§ 1—3. Тригонометрические и гиперболические функции

Некоторые тригонометрические формулы

Формулы приведения:

$\beta =$	$-\alpha$	$90^\circ \pm \alpha$	$180^\circ \pm \alpha$	$270^\circ \pm \alpha$	$360^\circ - \alpha$
$\sin\beta =$	$-\sin\alpha$	$+\cos\alpha$	$\mp\sin\alpha$	$-\cos\alpha$	$-\sin\alpha$
$\cos\beta =$	$\cos\alpha$	$\mp\sin\alpha$	$-\cos\alpha$	$\pm\sin\alpha$	$+\cos\alpha$
$\operatorname{tg}\beta =$	$-\operatorname{tg}\alpha$	$\mp\operatorname{ctg}\alpha$	$\pm\operatorname{tg}\alpha$	$\mp\operatorname{ctg}\alpha$	$-\operatorname{tg}\alpha$
$\operatorname{ctg}\beta =$	$-\operatorname{ctg}\alpha$	$\mp\operatorname{tg}\alpha$	$\pm\operatorname{ctg}\alpha$	$\mp\operatorname{tg}\alpha$	$-\operatorname{ctg}\alpha$
$\sec\beta =$	$\sec\alpha$	$\mp\operatorname{cosec}\alpha$	$-\sec\alpha$	$\pm\operatorname{cosec}\alpha$	$+\sec\alpha$
$\operatorname{cosec}\beta =$	$-\operatorname{cosec}\alpha$	$+\sec\alpha$	$\mp\operatorname{cosec}\alpha$	$-\sec\alpha$	$-\operatorname{cosec}\alpha$

Тригонометрические функции суммы и разности углов, кратных и половинных углов:

$$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin\alpha\cos\beta \pm \cos\alpha\sin\beta;$$

$$\cos(\alpha \pm \beta) = \cos\alpha\cos\beta \mp \sin\alpha\sin\beta;$$

$$\operatorname{tg}(\alpha \pm \beta) = \frac{\operatorname{tg}\alpha \pm \operatorname{tg}\beta}{1 \mp \operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta}; \quad \operatorname{ctg}(\alpha \pm \beta) = \frac{\operatorname{ctg}\alpha \cdot \operatorname{ctg}\beta \mp 1}{\operatorname{ctg}\beta \pm \operatorname{ctg}\alpha};$$

$$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha;$$

$$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1 = 1 - 2\sin^2\alpha;$$

$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2\operatorname{tg}\alpha}{1 - \operatorname{tg}^2\alpha} = \frac{2}{\operatorname{ctg}\alpha - \operatorname{tg}\alpha}; \quad \operatorname{ctg} 2\alpha = \frac{\operatorname{ctg}^2\alpha - 1}{2\operatorname{ctg}\alpha} = \frac{\operatorname{ctg}\alpha - \operatorname{tg}\alpha}{2};$$

$$\sin 3\alpha = 3\sin\alpha - 4\sin^3\alpha; \quad \cos 3\alpha = 4\cos^3\alpha - 3\cos\alpha;$$

$$\operatorname{tg} 3\alpha = \frac{3\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}^3\alpha}{1 - 3\operatorname{tg}^2\alpha}; \qquad \operatorname{ctg} 3\alpha = \frac{\operatorname{ctg}^3\alpha - 3\operatorname{ctg}\alpha}{3\operatorname{ctg}^2\alpha - 1};$$

$$\sin\frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}}\ ^*); \quad \cos\frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}}\ ^*);$$

$$\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}}\ ^*) = \frac{1-\cos\alpha}{\sin\alpha} = \frac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha};$$

$$\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{1-\cos\alpha}}\ ^*) = \frac{1+\cos\alpha}{\sin\alpha} = \frac{\sin\alpha}{1-\cos\alpha}.$$

$$\sin\alpha = \frac{2\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}}, \quad \cos\alpha = \frac{1-\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}}.$$

Произведения и степени тригонометрических функций:

$$\sin\alpha \cdot \sin\beta = \frac{1}{2}[\cos(\alpha-\beta) - \cos(\alpha+\beta)];$$

$$\cos\alpha \cdot \cos\beta = \frac{1}{2}[\cos(\alpha-\beta) + \cos(\alpha+\beta)];$$

---

*) Знак «+» или «—» берется в зависимости от того, в какой четверти находится угол $\frac{\alpha}{2}$.

$$\sin\alpha\cdot\cos\beta=\frac{1}{2}[\sin(\alpha-\beta)+\sin(\alpha+\beta)];$$

$$\sin^2\alpha=\frac{1-\cos 2\alpha}{2};\quad \cos^2\alpha=\frac{1+\cos 2\alpha}{2};$$

$$\sin^3\alpha=\frac{3\sin\alpha-\sin 3\alpha}{4};\quad \cos^3\alpha=\frac{\cos 3\alpha+3\cos\alpha}{4}.$$

Суммы и разности тригонометрических функций:

$$\sin\alpha+\sin\beta=2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2};$$

$$\sin\alpha-\sin\beta=2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2};$$

$$\cos\alpha+\cos\beta=2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2};$$

$$\cos\alpha-\cos\beta=-2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2};$$

$$\operatorname{tg}\alpha\pm\operatorname{tg}\beta=\frac{\sin(\alpha\pm\beta)}{\cos\alpha\cdot\cos\beta};\quad \operatorname{ctg}\alpha\pm\operatorname{ctg}\beta=\frac{\sin(\beta\pm\alpha)}{\sin\alpha\cdot\sin\beta};$$

$$1+\sin\alpha=2\cos^2\left(45^\circ-\frac{\alpha}{2}\right);$$

$$1-\sin\alpha=2\sin^2\left(45^\circ-\frac{\alpha}{2}\right);$$

$$1+\cos\alpha=2\cos^2\frac{\alpha}{2};\quad 1-\cos\alpha=2\sin^2\frac{\alpha}{2};$$

$$\sin\alpha\pm\cos\alpha=2\sin 45^\circ\sin(\alpha\pm 45^\circ);$$

$$\sin\alpha+\operatorname{tg}\alpha=2\operatorname{tg}\alpha\cos^2\frac{\alpha}{2};$$

$$\operatorname{ctg}\alpha+\operatorname{tg}\alpha=\frac{2}{\sin 2\alpha};\qquad \operatorname{ctg}\alpha-\operatorname{tg}\alpha=2\operatorname{ctg}2\alpha;$$

$$\frac{\sin\alpha+\sin\beta}{\sin\alpha-\sin\beta}=\frac{\operatorname{tg}\frac{\alpha+\beta}{2}}{\operatorname{tg}\frac{\alpha-\beta}{2}};$$

$$\frac{\cos\alpha-\cos\beta}{\cos\alpha+\cos\beta}=\operatorname{tg}\frac{\alpha+\beta}{2}\operatorname{tg}\frac{\beta-\alpha}{2};$$

$$\frac{1+\operatorname{tg}\alpha}{1-\operatorname{tg}\alpha}=\operatorname{tg}(45^\circ+\alpha);$$

$$\frac{\operatorname{ctg}\alpha+1}{\operatorname{ctg}\alpha-1}=\operatorname{ctg}(45^\circ-\alpha);$$

$$\sin^2\alpha-\sin^2\beta=\sin(\alpha+\beta)\sin(\alpha-\beta);$$
$$\cos^2\alpha-\cos^2\beta=\sin(\alpha+\beta)\sin(\beta-\alpha).$$

Обратные тригонометрические функции

Если $x = \sin y$, то $y = \operatorname{Arcsin} x$ *(арксинус)*,
если $x = \cos y$, то $y = \operatorname{Arccos} x$ *(арккосинус)*,
если $x = \operatorname{tg} y$, то $y = \operatorname{Arctg} x$ *(арктангенс)*,
если $x = \operatorname{ctg} y$, то $y = \operatorname{Arcctg} x$ *(арккотангенс)*,
если $x = \sec y$, то $y = \operatorname{Arcsec} x$ *(арксеканс)*,
если $x = \operatorname{cosec} y$, то $y = \operatorname{Arccosec} x$ *(арккосеканс)*
(y измеряется в радианах).

Обратные тригонометрические функции многозначны (стр. 84); их главные значения обозначаются через $\arcsin x$, $\arccos x$ и т. д. и заключены в пределах:

$$-\frac{\pi}{2} \leqslant \arcsin x \leqslant \frac{\pi}{2};$$

$$0 \leqslant \arccos x \leqslant \pi;$$

$$-\frac{\pi}{2} < \operatorname{arctg} x < \frac{\pi}{2};$$

$$0 < \operatorname{arcctg} x < \pi.$$

Основные тригонометрические соотношения и применении к обратным тригонометрическим функциям приводят к равенствам:

$$\sin(\arcsin x) = x; \quad \sin(\arccos x) = \sqrt{1-x^2}; \quad \sin(\operatorname{arctg} x) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}};$$

$$\sin(\operatorname{arcctg} x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}; \quad \cos(\arcsin x) = \sqrt{1-x^2}; \quad \cos(\arccos x) = x;$$

$$\cos(\operatorname{arctg} x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}; \quad \cos(\operatorname{arcctg} x) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}};$$

$$\operatorname{tg}(\arcsin x) = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}; \quad \operatorname{tg}(\arccos x) = \frac{\sqrt{1-x^2}}{x};$$

$$\operatorname{tg}(\operatorname{arctg} x) = x; \quad \operatorname{tg}(\operatorname{arcctg} x) = \frac{1}{x};$$

$$\operatorname{ctg}(\arcsin x) = \frac{\sqrt{1-x^2}}{x};$$

$$\operatorname{ctg}(\arccos x) = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}; \quad \operatorname{ctg}(\operatorname{arctg} x) = \frac{1}{x};$$

$$\operatorname{ctg}(\operatorname{arcctg} x) = x.$$

Из соотношений между тригонометрическими функциями дополнительных углов следует:

$$\arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2}; \quad \operatorname{arctg} x + \operatorname{arcctg} x = \frac{\pi}{2}.$$

Графики обратных тригонометрических функций даны на рис. 1-7—1-10 (стр. 44—45). Главным значениям соответствуют сплошные линии.

Графики тригонометрических функций

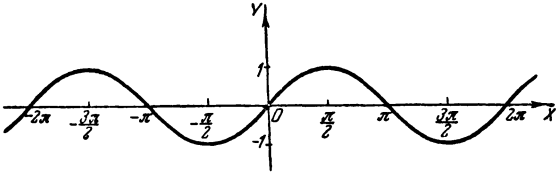


Рис. 1-1. $y = \sin x$.

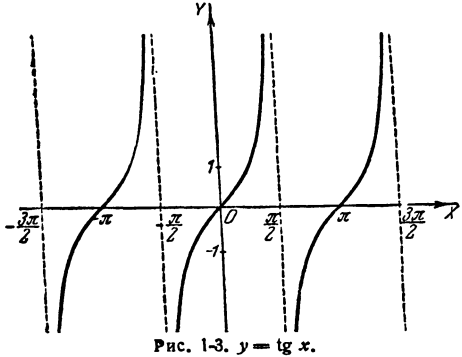


Рис. 1-3. $y = \operatorname{tg} x$.

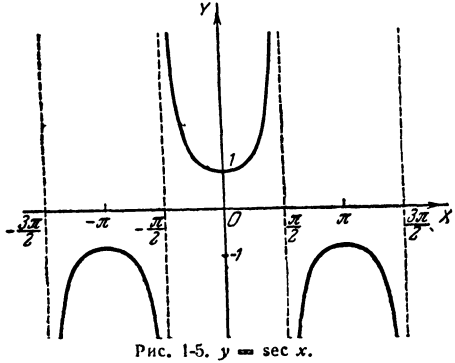


Рис. 1-5. $y = \sec x$.

Графики тригонометрических функций

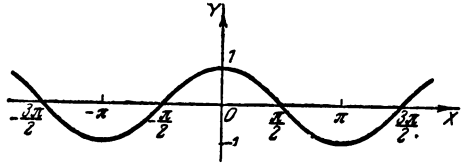


Рис. 1-2. $y = \cos x$.

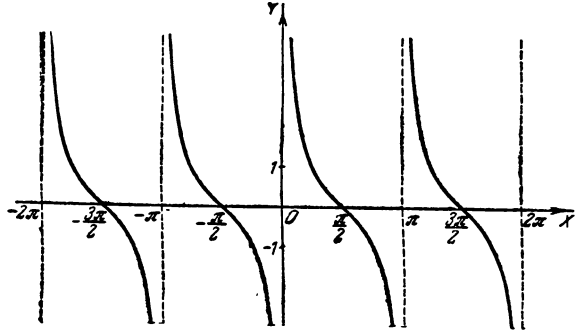


Рис. 1-4. $y = \operatorname{ctg} x$.

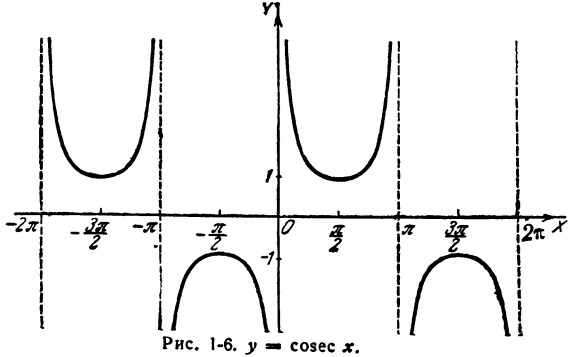


Рис. 1-6. $y = \operatorname{cosec} x$.

Графики обратных тригонометрических функций

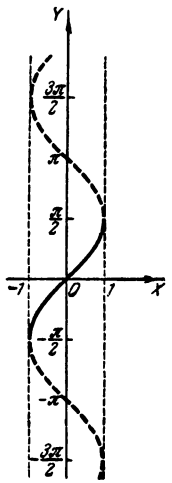


Рис. 1-7. $y = \operatorname{Arcsin} x$.

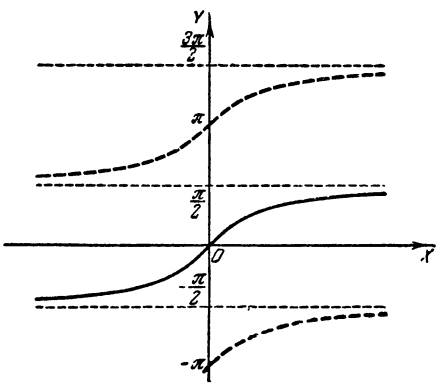


Рис. 1-9. $y = \operatorname{Arctg} x$.

Графики обратных тригонометрических функций

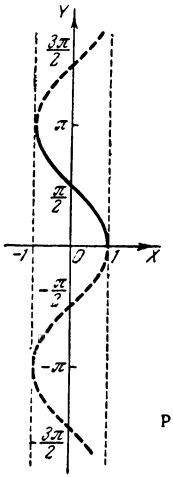


Рис. 1-8. $y = \operatorname{Arccos} x$.

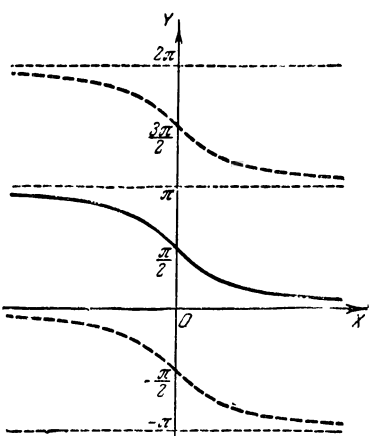


Рис. 1-10. $y = \operatorname{Arcctg} x$.

Соотношения между сторонами и углами треугольника:

$$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}=2R \text{ (теорема синусов)}$$

(R — радиус описанной окружности),

$$a^2=c^2+b^2-2bc\cos A \text{ (теорема косинусов)};$$

$$\frac{a+b}{a-b}=\frac{\operatorname{tg}\frac{A+B}{2}}{\operatorname{tg}\frac{A-B}{2}} \text{ (теорема тангенсов)};$$

$$\left.\begin{aligned}\frac{a+b}{c}&=\frac{\cos\frac{A-B}{2}}{\cos\frac{A+B}{2}}=\frac{\cos\frac{A-B}{2}}{\sin\frac{C}{2}};\\ \frac{a-b}{c}&=\frac{\sin\frac{A-B}{2}}{\sin\frac{A+B}{2}}=\frac{\sin\frac{A-B}{2}}{\cos\frac{C}{2}}\end{aligned}\right\}\ \text{(формулы Мольвейде).}$$

Вычисление длин некоторых отрезков, связанных с треугольником

Высота из вершины A: $h_a=b\sin C=c\sin B$.

Медиана из вершины A: $m_a=\frac{1}{2}\sqrt{b^2+c^2+2bc\cos A}$.

Биссектриса угла A: $\beta_a=\frac{2bc\cos\frac{A}{2}}{b+c}$.

Радиус описанной окружности:

$$R=\frac{a}{2\sin A}=\frac{b}{2\sin B}=\frac{c}{2\sin C}.$$

Радиус вписанной окружности:

$$r=\frac{S}{p}=\sqrt{\frac{(p-a)(p-b)(p-c)}{p}}=$$

$$=p\operatorname{tg}\frac{A}{2}\operatorname{tg}\frac{B}{2}\operatorname{tg}\frac{C}{2}=4R\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}.$$

Решение косоугольных треугольников

Обозначения: A, B, C — углы против сторон a, b, c (рис. 1-11).

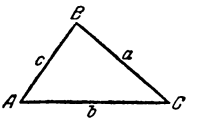


Рис. 1-11.

Даны	Формулы для определения остальных элементов
сторона и два угла (a, A, B)	$C = 180° - A - B$; $b = \frac{a \sin B}{\sin A}$; $c = \frac{a \sin C}{\sin A}$.
две стороны и угол между ними (a, b, C)	1-й способ: $c = \sqrt{a^2 + b^2 - 2ab \cos C}$; $\sin B = \frac{b \sin C}{c}$; $A = 180° - B - C$. 2-й способ: Углы A и B находятся из системы двух уравнений: $\operatorname{tg} \frac{A-B}{2} = \frac{a-b}{a+b} \operatorname{ctg} \frac{C}{2}$; $\frac{A+B}{2} = 90° - \frac{C}{2}$; $c = \frac{a \sin C}{\sin A}$.
две стороны и угол против одной из них (a, b, A)	$\sin B = \frac{b \sin A}{a}$. Если $a \geq b$, то $B < 90°$, имеется одно решение. Если $b \sin A > a$, то решение невозможно. Если $b \sin A = a$, то имеется одно решение $B = 90°$. Если $b \sin A < a$, то решений два: B_1 и B_2, причем $B_2 = 180° - B_1$; $C = 180° - A - B$; $c = \frac{a \sin C}{\sin A}$.
три стороны см. на стр. 48.	

Продолжение

Даны	Формулы для определения остальных элементов
три стороны (a, b, c)	1-й способ: $\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$; $\sin B = \frac{b \sin A}{a}$; $C = 180^\circ - A - B$. 2-й способ: $\operatorname{tg} \frac{A}{2} = \sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{p(p-a)}}$; $\operatorname{tg} \frac{B}{2} = \sqrt{\frac{(p-a)(p-c)}{p(p-b)}}$; $C = 180^\circ - A - B$.

Гиперболические и обратные гиперболические функции

Гиперболические функции определяются через показательные функции по формулам:

$$\operatorname{sh} \varphi = \frac{e^{\varphi} - e^{-\varphi}}{2} \text{ (гиперболический синус);}$$

$$\operatorname{ch} \varphi = \frac{e^{\varphi} + e^{-\varphi}}{2} \text{ (гиперболический косинус);}$$

$$\operatorname{th} \varphi = \frac{e^{\varphi} - e^{-\varphi}}{e^{\varphi} + e^{-\varphi}} \text{ (гиперболический тангенс);}$$

$$\operatorname{cth} \varphi = \frac{1}{\operatorname{th} \varphi} = \frac{e^{\varphi} + e^{-\varphi}}{e^{\varphi} - e^{-\varphi}} \text{ (гиперболический котангенс);}$$

$$\operatorname{sch} \varphi = \frac{1}{\operatorname{ch} \varphi} = \frac{2}{e^{\varphi} + e^{-\varphi}} \text{ (гиперболический секанс);}$$

$$\operatorname{csch} \varphi = \frac{1}{\operatorname{sh} \varphi} = \frac{2}{e^{\varphi} - e^{-\varphi}} \text{ (гиперболический косеканс).}$$

При действительных значениях аргумента φ имеют место неравенства:

$$\operatorname{ch} \varphi \geq 1; \quad -1 < \operatorname{th} \varphi < +1; \quad |\operatorname{cth} \varphi| > 1,$$

а $\operatorname{sh} \varphi$ может принимать какие угодно значения, как положительные, так и отрицательные.

Для гиперболических функций имеют место следующие соотношения:

1. Функции отрицательного аргумента

$\operatorname{sh}(-\varphi) = -\operatorname{sh} \varphi$; $\operatorname{ch}(-\varphi) = \operatorname{ch} \varphi$; $\operatorname{th}(-\varphi) = -\operatorname{th} \varphi$; $\operatorname{cth}(-\varphi) = -\operatorname{cth} \varphi$.

2. Функции одного аргумента

$$\operatorname{ch}^2\varphi - \operatorname{sh}^2\varphi = 1;$$

$$1 - \operatorname{th}^2\varphi = \operatorname{sch}^2\varphi; \quad \operatorname{cth}^2\varphi - 1 = \operatorname{csch}^2\varphi;$$

$$\frac{\operatorname{sh}\varphi}{\operatorname{ch}\varphi} = \operatorname{th}\varphi; \quad \frac{\operatorname{ch}\varphi}{\operatorname{sh}\varphi} = \operatorname{cth}\varphi; \quad \operatorname{th}\varphi \cdot \operatorname{cth}\varphi = 1.$$

3. Функции суммы и разности двух аргументов, двойных и половинных аргументов

$$\operatorname{sh}(\varphi \pm \psi) = \operatorname{sh}\varphi \operatorname{ch}\psi \pm \operatorname{ch}\varphi \operatorname{sh}\psi; \quad \operatorname{ch}(\varphi \pm \psi) = \operatorname{ch}\varphi \operatorname{ch}\psi \pm \operatorname{sh}\varphi \operatorname{sh}\psi;$$

$$\operatorname{th}(\varphi \pm \psi) = \frac{\operatorname{th}\varphi \pm \operatorname{th}\psi}{1 \pm \operatorname{th}\varphi \operatorname{th}\psi}; \quad \operatorname{cth}(\varphi \pm \psi) = \frac{1 \pm \operatorname{cth}\varphi \operatorname{cth}\psi}{\operatorname{cth}\varphi \pm \operatorname{cth}\psi};$$

$$\operatorname{sh} 2\varphi = 2 \operatorname{sh}\varphi \operatorname{ch}\varphi; \quad \operatorname{ch} 2\varphi = \operatorname{ch}^2\varphi + \operatorname{sh}^2\varphi = 2\operatorname{sh}^2\varphi + 1 = 2\operatorname{ch}^2\varphi - 1;$$

$$\operatorname{th} 2\varphi = \frac{2\operatorname{th}\varphi}{1 + \operatorname{th}^2\varphi}; \quad \operatorname{cth} 2\varphi = \frac{1 + \operatorname{cth}^2\varphi}{2\operatorname{cth}\varphi};$$

$$\operatorname{sh}\frac{\varphi}{2} = \pm\sqrt{\frac{\operatorname{ch}\varphi - 1}{2}}\ ^{*)}; \quad \operatorname{ch}\frac{\varphi}{2} = \sqrt{\frac{\operatorname{ch}\varphi + 1}{2}};$$

$$\operatorname{th}\frac{\varphi}{2} = \pm\sqrt{\frac{\operatorname{ch}\varphi - 1}{\operatorname{ch}\varphi + 1}}\ ^{*)}; \quad \operatorname{cth}\frac{\varphi}{2} = \pm\sqrt{\frac{\operatorname{ch}\varphi + 1}{\operatorname{ch}\varphi - 1}}\ ^{*)}.$$

4. Суммы и разности гиперболических функций

$$\operatorname{sh}\varphi \pm \operatorname{sh}\psi = 2\operatorname{sh}\frac{\varphi \pm \psi}{2}\operatorname{ch}\frac{\varphi \mp \psi}{2}; \quad \operatorname{ch}\varphi - \operatorname{ch}\psi = 2\operatorname{sh}\frac{\varphi + \psi}{2}\operatorname{sh}\frac{\varphi - \psi}{2};$$

$$\operatorname{ch}\varphi + \operatorname{ch}\psi = 2\operatorname{ch}\frac{\varphi + \psi}{2}\operatorname{ch}\frac{\varphi - \psi}{2}; \quad \operatorname{th}\varphi \pm \operatorname{th}\psi = \frac{\operatorname{sh}(\varphi \pm \psi)}{\operatorname{ch}\varphi \operatorname{ch}\psi}.$$

Графики гиперболических функций см. на рис. 1-12—1-15.

Обратные гиперболические функции

Если $x = \operatorname{sh} y$, то $y = \operatorname{Arsh} x$ (*ареасинус*),
если $x = \operatorname{ch} y$, то $y = \operatorname{Arch} x$ (*ареакосинус*),
если $x = \operatorname{th} y$, то $y = \operatorname{Arth} x$ (*ареатангенс*),
если $x = \operatorname{cth} y$, то $y = \operatorname{Arcth} x$ (*ареакотангенс*).

Обратные гиперболические функции выражаются через логарифмы по формулам:

$$\operatorname{Arsh} x = \ln\left(x + \sqrt{x^2 + 1}\right); \quad \operatorname{Arch} x = \ln\left(x \pm \sqrt{x^2 - 1}\right) \quad (x \geqslant 1);$$

$$\operatorname{Arth} x = \frac{1}{2}\ln\frac{1 + x}{1 - x} \quad (|x| < 1); \quad \operatorname{Arcth} x = \frac{1}{2}\ln\frac{x + 1}{x - 1} \quad (|x| > 1).$$

Графики обратных гиперболических функций см. на рис. 1-16—1-19.

---

*) Знак «+» берется при $\varphi > 0$, знак «—» при $\varphi < 0$.

Графики гиперболических и обратных гиперболических функций

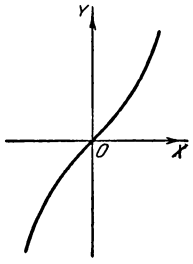


Рис. 1-12. $y = \operatorname{sh} x$.

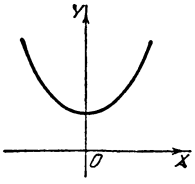


Рис. 1-13. $y = \operatorname{ch} x$.

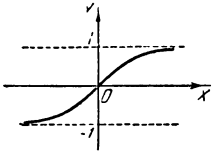


Рис. 1-14. $y = \operatorname{th} x$.

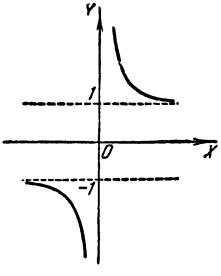


Рис. 1-15. $y = \operatorname{cth} x$.

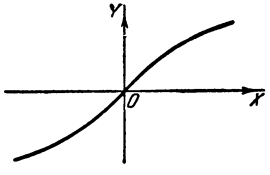


Рис. 1-16. $y = \operatorname{Arsh} x$.

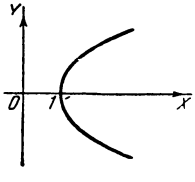


Рис. 1-17. $y = \operatorname{Arch} x$.

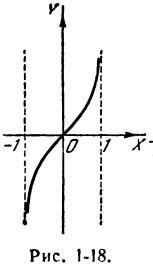


Рис. 1-18. $y = \operatorname{Arth} x$.

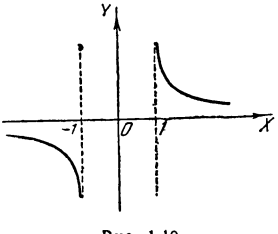


Рис. 1-19. $y = \operatorname{Arcth} x$.

Соотношения между тригонометрическими и гиперболическими функциями

На *формулах Эйлера*: $e^{ix}=\cos x+i\sin x$, $e^{-ix}=\cos x-i\sin x$, где $i=\sqrt{-1}$, основаны следующие соотношения:

$$\cos x=\frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}=\operatorname{ch} ix; \qquad \operatorname{ch} x=\cos ix;$$

$$\sin x=\frac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i}=-i\operatorname{sh} ix; \qquad \operatorname{sh} x=-i\sin ix;$$

$$\operatorname{tg} x=-i\frac{e^{ix}-e^{-ix}}{e^{ix}+e^{-ix}}=-i\operatorname{th} ix; \qquad \operatorname{th} x=-i\operatorname{tg} ix;$$

$$\operatorname{ctg} x=i\frac{e^{ix}+e^{-ix}}{e^{ix}-e^{-ix}}=i\operatorname{cth} ix; \qquad \operatorname{cth} x=i\operatorname{ctg} ix;$$

$$\operatorname{Arccos} x=-i\operatorname{Arch} x; \qquad \operatorname{Arcsin} x=-i\operatorname{Arsh} ix;$$
$$\operatorname{Arctg} x=-i\operatorname{Arth} ix; \qquad \operatorname{Arcctg} x=i\operatorname{Arcth} ix;$$
$$\operatorname{Arch} x=i\operatorname{Arccos} x; \qquad \operatorname{Arsh} x=-i\operatorname{Arcsin} ix;$$
$$\operatorname{Arth} x=-i\operatorname{Arctg} ix; \qquad \operatorname{Arcth} x=i\operatorname{Arcctg} ix.$$

Сферическая тригонометрия

Кратчайшей линией на поверхности сферы (*геодезической линией*) служит меньшая дуга большого круга на сфере (рис. 1-20), соединяющая две точки A и B. Она играет такую же роль на сфере, как прямая на плоскости. Если принять радиус сферы за единицу измерения дуги $\overset{\smile}{AB}=a$, то угол $AOB=\alpha$, измеренный в радианах, равен длине дуги: $\alpha=a$.

Рис. 1-20.

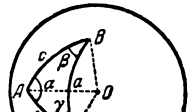


Рис. 1-21.

Сферический треугольник (рис. 1-21) образуется пересечением дуг трех больших кругов на сфере. Длины его сторон a, b, c измеряются плоскими углами трехгранного угла $OABC$.

Сферический треугольник может быть решен по любым трем из его шести элементов (трех сторон a, b, c и трех углов α, β, γ), так как его углы не связаны таким соотношением, как в прямолинейной тригонометрии. Сумма углов сферического треугольника всегда больше π; поэтому вводится понятие *сферического избытка* треугольника как разности $\varepsilon=(\alpha+\beta+\gamma)-\pi$.

Для решения прямоугольных сферических треугольников с прямым углом $\alpha = \frac{\pi}{2}$ и гипотенузой a (рис. 1-22) применяются следующие формулы:

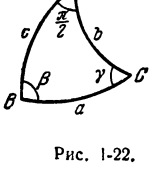


Рис. 1-22.

$$\cos a = \cos b \cos c = \operatorname{ctg}\beta \operatorname{ctg}\gamma;$$

$$\cos b = \frac{\cos\beta}{\sin\gamma}; \quad \cos\beta = \frac{\operatorname{tg} c}{\operatorname{tg} a};$$

$$\cos c = \frac{\cos\gamma}{\sin\beta}; \quad \cos\gamma = \frac{\operatorname{tg} b}{\operatorname{tg} a};$$

$$\sin\beta = \frac{\sin b}{\sin a}; \quad \operatorname{tg}\beta = \frac{\operatorname{tg} b}{\sin c};$$

$$\sin\gamma = \frac{\sin c}{\sin a}; \quad \operatorname{tg}\gamma = \frac{\operatorname{tg} c}{\sin b}.$$

Для решения косоугольных сферических треугольников пользуются формулами:

$$\frac{\sin a}{\sin\alpha} = \frac{\sin b}{\sin\beta} = \frac{\sin c}{\sin\gamma} \quad (\textit{теорема синусов});$$

$$\left.\begin{aligned} \cos a &= \cos b \cos c + \sin b \sin c \cos\alpha; \\ \cos\alpha &= -\cos\beta\cos\gamma + \sin\beta\sin\gamma\cos a \end{aligned}\right\} \ (\textit{теоремы косинусов});$$

$$\sin a \cos b = \cos a \sin b \cos\gamma + \sin c \cos\beta;$$

$$\sin a \operatorname{ctg} b = \operatorname{ctg} b \sin\gamma + \cos a \cos\gamma;$$

$$\sin\alpha \cos\beta = \cos b \sin\gamma - \cos c \sin\beta \cos\alpha;$$

$$\sin\alpha \operatorname{ctg}\beta = \sin c \operatorname{ctg} b - \cos c \cos\alpha;$$

$$\sin\frac{a}{2} = \sqrt{\frac{-\cos\sigma\cos(\sigma-\alpha)}{\sin\beta\sin\gamma}};$$

$$\cos\frac{a}{2} = \sqrt{\frac{\cos(\sigma-\beta)\cos(\sigma-\gamma)}{\sin\beta\sin\gamma}};$$

$$\text{где } \sigma = \frac{\alpha+\beta+\gamma}{2};$$

$$\sin\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{\sin(p-b)\sin(p-c)}{\sin b\sin c}};$$

$$\cos\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{\sin p\sin(p-a)}{\sin b\sin c}}.$$

Площадь сферического треугольника $S = \varepsilon R^2$, где ε — сферический избыток, а R — радиус сферы.

Площадь *сферического двуугольника*, образованного двумя дугами большого круга, $S = 2\varphi R^2$, где угол между дугами φ измеряется в радианах.

Более подробные сведения по элементарной математике можно найти в специальных справочниках: М. Я. Выгодский «Справочник по элементарной математике»; И. Н. Бронштейн и К. А. Семендяев «Справочник по математике для инженеров и учащихся втузов» (отдел второй).

Глава 1-2

ОПРЕДЕЛИТЕЛИ И СИСТЕМЫ ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ

§ 1-4. Определители

Определения. *Определитель* (*детерминант*) n-го порядка

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} a_{12} \ldots a_{1n} \\ a_{21} a_{22} \ldots a_{2n} \\ \cdots\cdots\cdots \\ a_{n1} a_{n2} \ldots a_{nn} \end{vmatrix}$$

содержит n^2 элементов, расположенных в n строках и n столбцах.

Минором некоторого элемента определителя n-го порядка называется определитель порядка $n-1$, получаемый из данного определителя вычеркиванием той строки и того столбца, которым принадлежит рассматриваемый элемент.

Алгебраическим дополнением (*адъюнктой*) элемента определителя называется его минор, умноженный на $(-1)^{i+j}$, где i — номер строки, а j — номер столбца рассматриваемого элемента.

Определитель равен сумме произведений элементов какой-либо строки или столбца на соответствующие алгебраические дополнения (*разложение определителя по минорам*); так, например, если A_{11}, A_{21}, . . . , A_{n1} — алгебраические дополнения элементов первого столбца, то

$$\begin{vmatrix} a_{11} a_{12} \ldots a_{1n} \\ a_{21} a_{22} \ldots a_{2n} \\ \cdots\cdots\cdots \\ a_{n1} a_{n2} \ldots a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11} A_{11} + a_{21} A_{21} + \ldots + a_{n1} A_{n1}.$$

Для вычисления определителя второго порядка $\begin{vmatrix} a_1 b_1 \\ a_2 b_2 \end{vmatrix}$ надо из произведения элементов a_1 и b_2, расположенных на *главной диагонали*, вычесть произведение элементов a_2 и b_1, расположенных на *второй диагонали*, т. е.

$$\begin{vmatrix} a_1 b_1 \\ a_2 b_2 \end{vmatrix} = a_1 b_2 - a_2 b_1.$$

Для вычисления определителя третьего порядка, на основании сказанного выше, имеем:

$$\begin{vmatrix} a_1 b_1 c_1 \\ a_2 b_2 c_2 \\ a_3 b_3 c_3 \end{vmatrix} = a_1 \begin{vmatrix} b_2 c_2 \\ b_3 c_3 \end{vmatrix} - b_1 \begin{vmatrix} a_2 c_2 \\ a_3 c_3 \end{vmatrix} + c_1 \begin{vmatrix} a_2 b_2 \\ a_3 b_3 \end{vmatrix} =$$

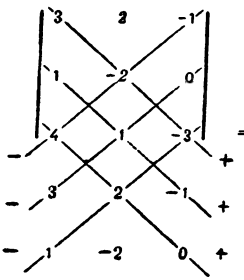
$$= a_1 (b_2 c_3 - b_3 c_2) - b_1 (a_2 c_3 - a_3 c_2) + c_1 (a_2 b_3 - a_3 b_2) =$$

$$= a_1 b_2 c_3 - a_1 b_3 c_2 - a_2 b_1 c_3 + a_3 b_1 c_2 + a_2 b_3 c_1 - a_3 b_2 c_1.$$

Определитель третьего порядка можно также вычислять, пользуясь *правилом Саррюса*: подписывают под определителем две первые строки и составляют алгебраическую сумму произведений элементов, взятых по три, расположенных по диагоналям определителя и их параллелям,

причем произведения по диагонали a_1, b_2, c_3 (*главной диагонали*) и по ее параллелям берут со знаком «+», а остальные со знаком «—».

Пример.



$$= 18 - 1 + 0 - 8 - 0 + 6 = 15$$

Вместо строк можно аналогичным образом приписывать столбцы

Определители более высоких порядков вычисляют последовательным разложением их по минорам.

Основные свойства определителей*). 1. Определитель не изменит своей величины, если все строки его заменить соответствующими столбцами (*свойство равноправности строк и столбцов*):

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}.$$

2. Если все элементы какой-либо строки (или столбца) равны нулю, то определитель равен нулю:

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

3. При перестановке двух строк (или столбцов) определитель изменяет знак:

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} a_2 & b_2 & c_2 \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}.$$

4. Если определитель имеет две одинаковые строки (или два одинаковых столбца, то он равен нулю:

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = 0.$$

---

*) Эти свойства справедливы для определителей любого порядка; они иллюстрируются на примере определителей третьего порядка.

5. Общий множитель всех элементов какой-либо строки (или столбца) можно вынести за знак определителя:

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ \lambda a_2 & \lambda b_2 & \lambda c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = \lambda \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}.$$

6. Определитель, у которого элементы какой-либо строки (или столбца) пропорциональны соответствующим элементам другой строки (или столбца), равен нулю:

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ \lambda a_1 & \lambda b_1 & \lambda c_1 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = 0.$$

7. Если к элементам какой-либо строки (или столбца) прибавить элементы другой строки (или столбца), умноженные на одно и то же число, то величина определителя не изменится:

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1+\lambda a_2 & b_1+\lambda b_2 & c_1+\lambda c_2 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}.$$

В частности, если элементы какой-либо строки (или столбца) представляют собой линейную комбинацию соответствующих элементов остальных строк (или столбцов), то определитель равен нулю:

$$\begin{vmatrix} \lambda a_2+\mu a_3 & \lambda b_2+\mu b_3 & \lambda c_2+\mu c_3 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = 0.$$

8. Если определители разнятся между собой только элементами какой-либо одной строки (или столбца), то их можно складывать, причем в сумме получается определитель, у которого элементами соответствующей строки (или столбца) будут суммы элементов определителей-слагаемых, а остальные элементы — те же, что у слагаемых:

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a'_1 & b'_1 & c'_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1+a'_1 & b_1+b'_1 & c_1+c'_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}.$$

9. Сумма произведений элементов какой-либо строки (или столбца) на алгебраические дополнения соответствующих элементов другой строки (или столбца) равна нулю, например: $b_1A_1+b_2A_2+b_3A_3=0$ (A_1, A_2 и A_3 — алгебраические дополнения элементов a_1, a_2 и a_3).

§ 1-5. Системы линейных уравнений

Системы двух и трех линейных уравнений. 1. Решение системы двух линейных уравнений с двумя неизвестными $a_1x+b_1y=c_1$, $a_2x+b_2y=c_2$ при условии, что $\Delta=\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \neq 0$, имеет вид:

$$x=\frac{\Delta_x}{\Delta}, \qquad y=\frac{\Delta_y}{\Delta},$$

где $\Delta_x=\begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix}$, $\Delta_y=\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}$.

В случае, когда $\Delta=0$, эти формулы теряют смысл.

Если одновременно с равенством $\Delta=0$ имеет место хотя бы одно из неравенств $\Delta_x\neq 0$, $\Delta_y\neq 0$, то система несовместна (не имеет решения). Если же одновременно с $\Delta=0$ имеют место равенства $\Delta_x=\Delta_y=0$, то система неопределенная (имеет бесчисленное множество решений). В этом случае

$$\frac{a_1}{a_2}=\frac{b_1}{b_2}=\frac{c_1}{c_2},$$

т. е. одно из уравнений является следствием другого и может быть отброшено. Любая пара значений x и y, удовлетворяющих оставшемуся уравнению, дает решение системы.

2. Система двух линейных однородных уравнений с двумя неизвестными $a_1x+b_1y=0$, $a_2x+b_2y=0$ либо неопределенная (при $\Delta=0$), либо имеет единственное решение (нулевое: $x=y=0$ при $\Delta\neq 0$). Случай несовместности для однородной системы исключается. Если система однородных уравнений неопределенная, то она имеет, кроме нулевого, бесчисленное множество решений, содержащихся в формуле $x:y=-b_1:a_1=-b_2:a_2$.

3. Система трех линейных уравнений с тремя неизвестными

$$a_1x+b_1y+c_1z=d_1,\quad a_2x+b_2y+c_2z=d_2,\quad a_3x+b_3y+c_3z=d_3,$$

если $\Delta=\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1\\ a_2 & b_2 & c_2\\ a_3 & b_3 & c_3\end{vmatrix}\neq 0$, решается по формулам:

$$x=\frac{\Delta_x}{\Delta},\ \text{где}\ \Delta_x=\begin{vmatrix} d_1 & b_1 & c_1\\ d_2 & b_2 & c_2\\ d_3 & b_3 & c_3\end{vmatrix};\quad y=\frac{\Delta_y}{\Delta},\ \text{где}\ \Delta_y=\begin{vmatrix} a_1 & d_1 & c_1\\ a_2 & d_2 & c_2\\ a_3 & d_3 & c_3\end{vmatrix};$$

$$z=\frac{\Delta_z}{\Delta},\ \text{где}\ \Delta_z=\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & d_1\\ a_2 & b_2 & d_2\\ a_3 & b_3 & d_3\end{vmatrix}.$$

В случае $\Delta=0$ приведенные формулы теряют смысл. Если при $\Delta=0$ среди определителей Δ_x, Δ_y, Δ_z есть по крайней мере один, не равный нулю, то система несовместная; если же $\Delta=\Delta_x=\Delta_y=\Delta_z=0$, то система либо несовместная, либо неопределенная (см. выше). В последнем случае по крайней мере одно из уравнений системы является следствием оставшихся двух и может быть отброшено. Любая тройка значений x, y и z, удовлетворяющая оставшимся двум (или одному) уравнениям, дает решение системы.

Пример.

$$x+2y-z=2;\ 5x-4y+z=0;\ 2x+y-3z=-5.$$

$\Delta=\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1\\ 5 & -4 & 1\\ 2 & 1 & -3\end{vmatrix}=32$ ($\Delta\neq 0$, система совместна и имеет единственное решение).

$$x=\frac{\begin{vmatrix} 2 & 2 & -1\\ 0 & -4 & 1\\ -5 & 1 & -3\end{vmatrix}}{32}=1;\quad y=\frac{\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1\\ 5 & 0 & 1\\ 2 & -5 & -3\end{vmatrix}}{32}=2;\quad z=\frac{\begin{vmatrix} 1 & 2 & 2\\ 5 & -4 & 0\\ 2 & 1 & -5\end{vmatrix}}{32}=3.$$

4. Система двух однородных линейных уравнений с тремя неизвестными $a_1x+b_1y+c_1z=0$, $a_2x+b_2y+c_2z=0$ имеет бесконечное множество решений, которые определяются по формулам:

$$x=\begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix} t; \quad y=\begin{vmatrix} c_1 & a_1 \\ c_2 & a_2 \end{vmatrix} t; \quad z=\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} t,$$

где t — произвольная величина (предполагается, что не все определители, входящие в формулы, равны нулю; в противном случае одно из уравнений является следствием другого и может быть отброшено).

Пример. Решив систему уравнений

$$x+y-z=0, \quad 3x-3y+z=0,$$

получим:

$$x=\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -3 & 1 \end{vmatrix} t=-2t; \quad y=\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} t=-4t; \quad z=\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & -3 \end{vmatrix} t=-6t,$$

где t произвольно.

Положив $t=-\frac{1}{2}$, получим решение: $x=1$, $y=2$, $z=3$; положив $t=1$, получим другое решение: $x=-2$, $y=-4$, $z=-6$ и т. д.

5. Система трех однородных линейных уравнений с тремя неизвестными

$$a_1x+b_1y+c_1z=0, \quad a_2x+b_2y+c_2z=0, \quad a_3x+b_3y+c_3z=0$$

либо имеет единственное решение (нулевое, при $\Delta\neq 0$), либо является неопределенной (при $\Delta=0$). В последнем случае одно или два уравнения могут быть отброшены как следствия остальных. Если только одно уравнение отбрасывается ($\Delta=0$, но по крайней мере один из его миноров не равен нулю), то задача сводится к решению системы двух независимых однородных уравнений с тремя неизвестными (см. выше). Если же два уравнения являются следствием третьего ($\Delta=0$ и все его миноры также равны нулю), то любая тройка значений, удовлетворяющих этому третьему оставшемуся уравнению, дает решение системы.

Матрица и ее ранг. Прямоугольную таблицу из mn элементов, расположенных в m строках и n столбцах:

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \ldots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} \ldots a_{2n} \\ \ldots\ldots\ldots \\ a_{m1} & a_{m2} \ldots a_{mn} \end{pmatrix},$$

называют *матрицей*.

Минором матрицы порядка k называется определитель, составленный из k^2 элементов, лежащих на пересечении каких-либо k столбцов и k строк этой матрицы (порядок элементов сохраняется). Если у данной матрицы хотя бы один минор порядка p отличен от нуля, а все миноры порядка выше p равны нулю, то число p называется *рангом* матрицы.

Система n линейных уравнений. Система n линейных уравнений с n неизвестными

$$\begin{aligned} &a_{11}x_1+a_{12}x_2+\ldots+a_{1n}x_n=b_1, \\ &a_{21}x_1+a_{22}x_2+\ldots+a_{2n}x_n=b_2, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+\ldots+a_{nn}x_n=b_n, \end{aligned}$$

когда определитель системы отличен от нуля:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} \neq 0,$$

имеет единственное решение:

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta}, \qquad x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta}, \quad \dots, \quad x_n = \frac{\Delta_n}{\Delta},$$

где определитель Δ_k ($k = 1, 2, \dots, n$) получается заменой в определителе Δ k-го столбца столбцом, составленным из свободных членов b_1, $b_2, \dots, b_n$. Если $\Delta = 0$, но хотя бы один из определителей Δ_k отличен от нуля, то система несовместна. Если $\Delta = 0$ и $\Delta_k = 0$ ($k = 1, 2, \dots, n$), то в случае, когда ранг r ($r < n$) матрицы этой системы

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

меньше, чем ранг расширенной матрицы

$$B = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} & b_n \end{pmatrix},$$

получаемой присоединением к матрице A столбца, составленного из свободных членов, система несовместна (не имеет решений). Если же $\Delta = 0$ и $\Delta_k = 0$ ($k = 1, 2, \dots, n$), а ранг матрицы A равен рангу матрицы B, то система неопределенная (имеет бесконечное множество решений). В последнем случае переставляют уравнения в системе и перенумеровывают неизвестные так, чтобы отличный от нуля минор порядка r матрицы A оказался расположенным в левом верхнем углу матрицы. После этого решают систему из первых r уравнений относительно $x_1, x_2, \dots, x_r$. Таким образом, эти r неизвестных оказываются выраженными через $n - r$ остальных: $x_{r+1}, x_{r+2}, \dots, x_n$; этим последним можно придавать любые значения. Оставшиеся уравнения можно отбросить (они являются следствием первых r).

Пример.

$$\begin{aligned} -x + y + 2z + u &= 4; \\ 2x - 2y + z + u &= 2; \\ x - y + 3z + 2u &= 6; \\ 3x - 3y + 4z + 3u &= 8. \end{aligned}$$

Ранг матриц A и B равен 2 (система неопределенная). Определитель второго порядка в левом верхнем углу матрицы $\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -2 \end{vmatrix} = 0$; поэтому изменяем порядок неизвестных:

$$\begin{aligned} -x + 2z + y + u &= 4; \\ 2x + z - 2y + u &= 2; \\ x + 3z - y + 2u &= 6; \\ 3x + 4z - 3y + 3u &= 8. \end{aligned}$$

Теперь верхний левый определитель $\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}$ отличен от нуля. Решаем систему, состоящую из первых двух уравнений относительно x и z (последние два уравнения отбрасываем — они следуют из первых двух):

$$\begin{aligned} -x + 2z &= 4 - y - u; \\ 2x + z &= 2 + 2y - u. \end{aligned}$$

Получаем $x = \frac{5y - u}{5}$, $z = \frac{10 - 3u}{5}$. Это и есть решение заданной системы. Величины y и u здесь произвольны.

В общем случае система m уравнений с n неизвестными:

$$\begin{aligned} &a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1; \\ &a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2; \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m, \end{aligned}$$

является определенной, т. е. имеет единственное решение, тогда и только тогда, когда ранг ее матрицы

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

совпадает с рангом расширенной матрицы B и равен числу неизвестных n. В этом случае следует переписать систему так, чтобы отличный от нуля минор порядка n матрицы A занял левый верхний угол, и решить систему первых n уравнений, отбросив остальные (они являются следствием n первых).

Если ранг матрицы A меньше ранга матрицы B, то система несовместна.

Если ранг r матрицы A равен рангу матрицы B, но $r < n$, то система неопределенна и после соответствующей перестановки порядка уравнений и неизвестных первые r уравнений разрешают относительно x_1, x_2, ..., x_r, выражая эти неизвестные через остающиеся произвольными величины x_{r+1}, x_{r+2}, ..., x_n.

В случае системы однородных уравнений

$$\begin{aligned} &a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = 0; \\ &a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = 0; \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = 0 \end{aligned}$$

ранг матрицы A всегда равен рангу матрицы B. Такая система во всех случаях имеет нулевое решение $x_1 = x_2 = \ldots = x_n = 0$, которое является единственным, если система определенная, т. е. если ранг r матрицы A равен n. Если же $r < n$, то система неопределенная и указанным выше способом можно неизвестные x_1, x_2, ..., x_r выразить через остальные неизвестные, остающиеся произвольными.

Глава 1-3

АНАЛИТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ

§ 1-6. Аналитическая геометрия на плоскости

Основные системы координат. Для определения положения точки на плоскости наиболее часто применяются две системы координат: 1) декартова прямоугольная и 2) полярная.

1. Координатами любой точки M (рис. 1-23) в *декартовой системе координат* служат: *абсцисса* x и *ордината* y, которые берутся с определенными знаками. Обычное распределение знаков во всех четырех квадрантах показано на рис. 1-24.

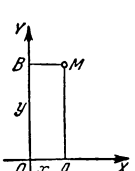


Рис. 1-23.

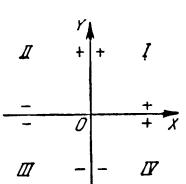


Рис. 1-24.

Преобразование декартовых координат может состоять из:

а) *параллельного переноса осей* координат (рис. 1-25, *а*), при ко-

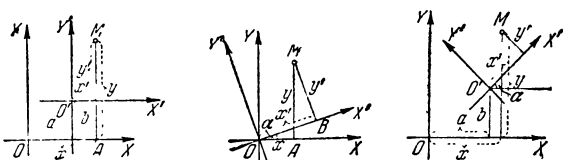


Рис. 1-25.

тором прежние координаты x и y точки M связаны с ее новыми координатами x' и y' соотношениями:

$$x = x' + a; \qquad y = y' + b,$$

где a и b — координаты нового начала координат O' в прежней системе, и

б) *поворота осей* координат на некоторый угол около начала O (рис. 1-25, *б*); в этом случае имеем:

$$x = x' \cos \alpha - y' \sin \alpha; \qquad y = x' \sin \alpha + y' \cos \alpha,$$

где α — угол поворота осей.

В общем случае преобразования координат (рис. 1-25, *в*) имеют место соотношения:

$$x = x' \cos \alpha - y' \sin \alpha + a; \qquad y = x' \sin \alpha + y' \cos \alpha + b.$$

2. Координатами любой точки M (рис. 1-26) в *полярной системе координат* служат *радиус-вектор* ρ (расстояние от точки M до некоторой выбранной точки O — полюса системы координат) и *полярный угол* φ (угол между OM и некоторой выбранной осью X — полярной осью). Угол φ считается положительным, если от полярной оси он отсчитывается в направлении против движения часовой стрелки; в противоположном случае φ считается отрицательным.

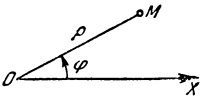


Рис. 1-26.

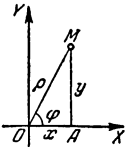


Рис. 1-27.

Если полюс полярной системы координат совпадает с началом декартовой системы (рис. 1-27) и полярная ось совпадает с положительной частью оси абсцисс, то между декартовыми координатами x, y точки M и ее полярными координатами ρ, φ имеют место соотношения:

$$x = \rho \cos \varphi; \qquad y = \rho \sin \varphi; \qquad \rho = \sqrt{x^2 + y^2}; \qquad \operatorname{tg} \varphi = \frac{y}{x}.$$

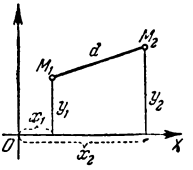


Рис. 1-28.

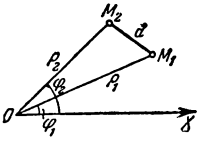


Рис. 1-29.

Некоторые простейшие задачи. а) *Расстояние между двумя точками* $M_1(x_1, y_1)$ и $M_2(x_2, y_2)$ в декартовой системе координат (рис. 1-28)

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}.$$

В частном случае, когда одна из точек (например, M_2) совпадает с началом координат:

$$d = \sqrt{x_1^2 + y_1^2}.$$

В полярной системе координат расстояние между точками $M_1(\rho_1, \varphi_1)$ и $M_2(\rho_2, \varphi_2)$ (рис. 1-29)

$$d = \sqrt{\rho_1^2 + \rho_2^2 - 2\rho_1\rho_2 \cos(\varphi_2 - \varphi_1)}.$$

б) При *делении отрезка прямой в данном отношении* декартовы координаты точки $M(x, y)$, делящей отрезок между начальной точкой $M_1(x_1, y_1)$ и конечной $M_2(x_2, y_2)$ в н у т р е н н и м образом в отношении $\frac{M_1M}{MM_2}=\lambda$ (рис. 1-30), определяются по формулам:

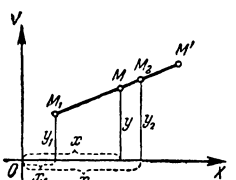


Рис. 1-30.

$$x=\frac{x_1+\lambda x_2}{1+\lambda};\qquad y=\frac{y_1+\lambda y_2}{1+\lambda}.$$

Если точка M находится посредине отрезка M_1M_2 ($\lambda=1$), формулы принимают вид:

$$x=\frac{x_1+x_2}{2};\qquad y=\frac{y_1+y_2}{2}.$$

При делении отрезка в н е ш н и м образом (точка деления M') λ принимается отрицательным.

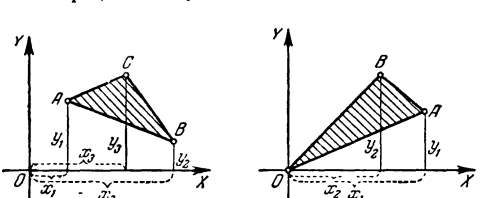


Рис. 1-31.

в) *Площадь S треугольника*, заданного вершинами $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$ и $C(x_3, y_3)$ (рис. 1-31, *а*), определяется по формуле

$$S=\pm\frac{1}{2}\begin{vmatrix}x_1 & y_1 & 1\\ x_2 & y_2 & 1\\ x_3 & y_3 & 1\end{vmatrix}.$$

При этом положительным значениям определителя соответствует обход вершин треугольника A, B и C в направлении движения против часовой стрелки, а отрицательным — по часовой стрелке.

Если определитель равен нулю, то точки A, B и C лежат на одной прямой.

Если одна из вершин треугольника (C) совпадает с началом координат (рис. 1-31, *б*), то

$$S=\pm\frac{1}{2}\begin{vmatrix}x_1 & y_1\\ x_2 & y_2\end{vmatrix}.$$

Площадь S многоугольника, заданного вершинами $A_1(x_1, y_1)$, $A_2(x_2, y_2)$, $A_3(x_3, y_3)$, ..., $A_n(x_n, y_n)$, определяется по формуле

$$S=\pm\frac{1}{2}[(x_1-x_2)(y_1+y_2)+(x_2-x_3)(y_2+y_3)+$$
$$+(x_3-x_4)(y_3+y_4)+\ldots+(x_n-x_1)(y_n+y_1)],$$

Геометрическое представление уравнения с двумя переменными. Уравнение $F(x, y) = 0$ или $y = f(x)$ является *уравнением* некоторой *линии* в декартовой системе координат, если координаты любой точки этой линии при подстановке в уравнение обращают его в тождество (удовлетворяют уравнению), а координаты всех остальных точек плоскости не удовлетворяют этому уравнению.

Подобно этому уравнение $F(\rho, \varphi) = 0$ или $\rho = f(\varphi)$ является уравнением линии в полярных координатах.

Прямая линия. В декартовой системе координат прямая линия выражается уравнением, линейным относительно текущих координат x и y.

1. *Общее уравнение прямой* $Ax + By + C = 0$. При $C = 0$ прямая проходит через начало координат, при $B = 0$ прямая параллельна оси Y, а при $A = 0$ параллельна оси X (рис. 1-32).

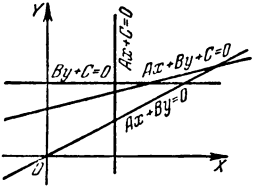


Рис. 1-32.

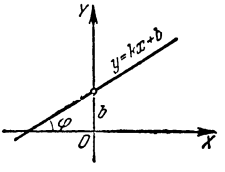


Рис. 1-33.

2. *Уравнение прямой с угловым коэффициентом*

$$y = kx + b,$$

где *угловой коэффициент* k равен тангенсу угла, образованного прямой с осью X ($k = \operatorname{tg} \varphi$), а параметр b, называемый *начальной ординатой*, равен длине отрезка, отсекаемого прямой на оси Y, с учетом знака (рис. 1-33). Уравнение прямой с угловым коэффициентом может изображать любую прямую, за исключением прямой, параллельной оси Y.

Чтобы общее уравнение прямой, не параллельной оси Y, привести к уравнению с угловым коэффициентом, нужно его решить относительно y:

$$y = -\frac{A}{B}x - \frac{C}{B} \quad \left(k = -\frac{A}{B}; \quad b = -\frac{C}{B}\right).$$

3. *Уравнение прямой в отрезках,* отсекаемых на координатных осях,

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1,$$

где параметры a и b, взятые со знаком «+» или «—», — длины отрезков, отсекаемых прямой на координатных осях (рис. 1-34). Если $b = \infty$ (прямая параллельна оси Y), то уравнение прямой $x = a$; если $a = \infty$ (прямая параллельна оси X), то уравнение прямой $y = b$.

4. *Нормальное уравнение прямой* $x \cos \alpha + y \sin \alpha - p = 0$, где α — угол, образованный перпендикуляром, опущенным из начала координат на прямую, с осью X, а параметр $p = OP$ — длина этого перпендикуляра (рис. 1-35).

Общее уравнение прямой может быть приведено к нормальному виду путем умножения на *нормирующий множитель* $M = \pm \frac{1}{\sqrt{A^2 + B^2}}$; знак M выбирается обратным знаку C.

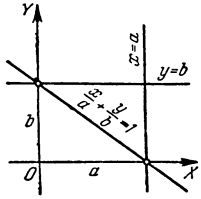


Рис. 1-34.

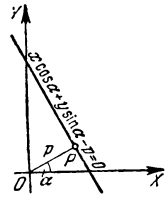


Рис. 1-35.

Между коэффициентами A, B и C и параметрами α и p имеют место соотношения:

$$\cos\alpha = \pm\frac{A}{\sqrt{A^2+B^2}}, \qquad \sin\alpha = \pm\frac{B}{\sqrt{A^2+B^2}},$$

$$p = \mp\frac{C}{\sqrt{A^2+B^2}}.$$

5. В полярной системе координат *уравнение прямой*, не проходящей через полюс (рис. 1-36), имеет вид $\rho = \frac{p}{\cos(\varphi - \alpha)}$, где p — длина перпендикуляра, опущенного из полюса на прямую; α — угол между этим перпендикуляром и полярной осью. $\varphi = \varphi_0$ — уравнение луча, выходящего из полюса и образующего с полярной осью угол φ_0.

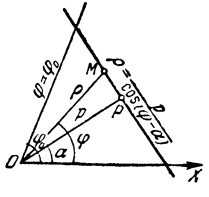


Рис. 1-36.

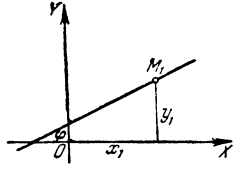


Рис. 1-37.

6. *Уравнение прямой, проходящей через данную точку* $M_1(x_1, y_1)$ *в заданном направлении* (рис. 1-37) $y - y_1 = k(x - x_1)$, где k — угловой коэффициент ($k = \operatorname{tg}\varphi$).

Если рассматривать k как произвольный параметр, то это уравнение представляет собой уравнение *пучка* прямых, проходящих через точку $M_1(x_1, y_1)$, называемую *центром пучка* (рис. 1-38).

7. *Уравнение прямой, проходящей через две данные точки* $M_1(x_1, y_1)$ и $M_2(x_2, y_2)$ (рис. 1-39):

$$\frac{y-y_1}{y_2-y_1}=\frac{x-x_1}{x_2-x_1} \quad \text{или} \quad \begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \end{vmatrix}=0.$$

Угловой коэффициент прямой в этом случае определяется по формуле $k=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$.

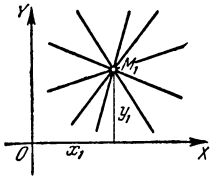


Рис. 1-38.

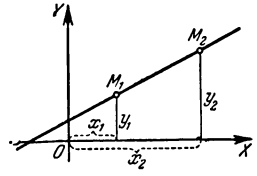


Рис. 1-39.

Условие нахождения трех точек $M_1(x_1, y_1)$, $M_2(x_2, y_2)$ и $M_3(x_3, y_3)$ *на одной прямой*: $\frac{y_3-y_1}{y_2-y_1}=\frac{x_3-x_1}{x_2-x_1}$ или $\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}=0.$

8. *Угол между двумя прямыми*, заданными уравнениями в общем виде $A_1x+B_1y+C_1=0$ и $A_2x+B_2y+C_2=0$, определяется по формуле $\operatorname{tg}\theta=\frac{A_1B_2-A_2B_1}{A_1A_2+B_1B_2}$.

Угол θ отсчитывается от первой прямой ко второй в направлении против движения часовой стрелки (рис. 1-40).

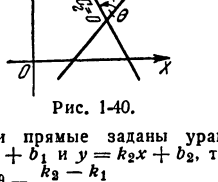


Рис. 1-40.

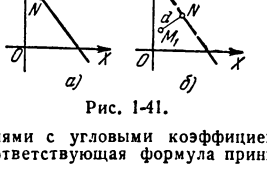


Рис. 1-41.

Если прямые заданы уравнениями с угловыми коэффициентами $y=k_1x+b_1$ и $y=k_2x+b_2$, то соответствующая формула принимает вид $\operatorname{tg}\theta=\frac{k_2-k_1}{1+k_1k_2}$.

Условие параллельности двух прямых: $\frac{A_1}{A_2}=\frac{B_1}{B_2}$ или $k_1=k_2$.

Условие их перпендикулярности: $A_1A_2+B_1B_2=0$ или $k_1k_2=-1$.

9. *Расстояние от точки* $M_1(x_1, y_1)$ *до прямой* $x\cos\alpha+y\sin\alpha-p=0$ определяется по формуле $d=\pm(x_1\cos\alpha+y_1\sin\alpha-p)$.

Для получения положительной величины $d=M_1N$ следует брать выражение для d со знаком «+», если точка $M_1(x_1, y_1)$ и начало координат расположены по разные стороны от прямой (рис. 1-41, *а*), и со знаком «−», если — по одну сторону (рис. 1-41, *б*).

10. Координаты *точки пересечения* $M_0(x_0, y_0)$ *двух прямых* $A_1x + B_1y + C_1 = 0$ и $A_2x + B_2y + C_2 = 0$ определяются путем совместного решения этих уравнений по формулам:

$$x_0 = \frac{\begin{vmatrix} B_1 & C_1 \\ B_2 & C_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix}}; \qquad y_0 = \frac{\begin{vmatrix} C_1 & A_1 \\ C_2 & A_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix}}$$

в случае, если $\begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix} \neq 0$.

В случае, если $\begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix} = 0$, а $\begin{vmatrix} B_1 & C_1 \\ B_2 & C_2 \end{vmatrix} \neq 0$ (или $\begin{vmatrix} C_1 & A_1 \\ C_2 & A_2 \end{vmatrix} \neq 0$),

прямые параллельны.

Если же $\begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} B_1 & C_1 \\ B_2 & C_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} C_1 & A_1 \\ C_2 & A_2 \end{vmatrix} = 0$, т. е. выполнены условия $\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2}$, то прямые сливаются друг с другом (имеют бесконечное множество общих точек).

11. *Условие прохождения трех прямых* $A_1x + B_1y + C_1 = 0$, $A_2x + B_2y + C_2 = 0$, $A_3x + B_3y + C_3 = 0$ *через одну точку*:

$$\begin{vmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 \end{vmatrix} = 0.$$

12. *Уравнение пучка прямых*, проходящих через точку пересечения двух данных прямых $A_1x + B_1y + C_1 = 0$ и $A_2x + B_2y + C_2 = 0$, имеет вид:

$$(A_1x + B_1y + C_1) + \mu (A_2x + B_2y + C_2) = 0,$$

где множитель μ произволен. Изменяя μ, можно получить любую прямую пучка, не совпадающую со второй из данных прямых.

Окружность. 1. Уравнение окружности в декартовых координатах:

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = R^2,$$

где R — радиус окружности, а a и b — координаты центра O_1 (рис. 1-42).

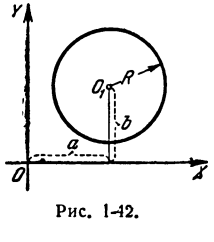


Рис. 1-42.

Если центр находится в начале координат, то уравнение окружности принимает вид $x^2 + y^2 = R^2$, а в параметрической форме: $x = R\cos t$; $y = R\sin t$.

2. Общее уравнение второй степени относительно x и y: $Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0$ представляет собой уравнение окружности при условии, что $A = C$ и $B = 0$, т. е. когда оно может быть приведено к виду $x^2 + y^2 + 2D'x + 2E'y + F' = 0$.

Радиус и координаты центра окружности при этом определяются по формулам:

$$R = \sqrt{D'^2 + E'^2 - F'}; \quad a = -D'; \quad b = -E'.$$

Если $D'^2 + E'^2 - F' > 0$, то мы имеем действительную окружность; если $D'^2 + E'^2 - F' < 0$, то мнимую окружность, а если $D'^2 + E'^2 - F' = 0$, то точку.

3. В полярных координатах уравнение окружности (рис. 1-43, *а*) имеет вид

$$\rho^2 - 2\rho\rho_0(\varphi - \varphi_0) + \rho_0^2 = R^2,$$

где R — радиус окружности, а ρ_0 и φ_0 — полярные координаты центра O_1.

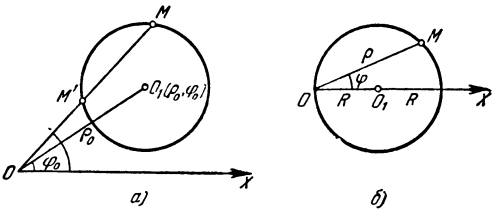


Рис. 1-43.

Если окружность проходит через полюс и центр лежит на полярной оси (рис. 1-43, *б*), то уравнение окружности принимает вид

$$\rho = 2R\cos\varphi.$$

Уравнение окружности, центр которой совпадает с полюсом: $\rho = R$.

Эллипс. *Эллипсом* (рис. 1-44) называется геометрическое место точек плоскости, сумма расстояний которых от двух данных точек F_1 и F_2, называемых *фокусами*, есть величина постоянная: $r_1 + r_2 = 2a$. (Отрезки r_1 и r_2 — *радиусы-векторы точки* M эллипса.)

1. Если фокусы эллипса находятся на оси X, а начало координат является серединой отрезка F_1F_2, то уравнение эллипса имеет вид:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

где a и b — *полуоси* эллипса *(каноническое уравнение)*.

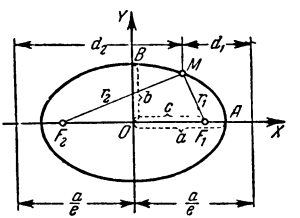


Рис. 1-44.

2. Параметрические уравнения эллипса $x = a\cos t$, $y = b\sin t$.

Большая полуось эллипса $a = OA$, *малая* полуось $b = OB$, *полуфокальное расстояние* $c = OF_1$; соотношение между этими величинами:

$$b^2 = a^2 - c^2.$$

Эксцентриситет эллипса $e = \frac{c}{a}$ меньше единицы.

Радиусы-векторы точки эллипса с абсциссой x вычисляются по формулам: $r_1 = a - ex$; $r_2 = a + ex$.

Директрисами эллипса называются прямые, параллельные малой оси и отстоящие от нее на расстоянии $\frac{a}{e}$ в обе стороны. Уравнения директрис: $x = \pm\frac{a}{e}$.

Основное свойство директрис: отношение радиуса-вектора любой точки эллипса к расстоянию от этой точки до соответствующей директрисы есть величина постоянная, равная эксцентриситету эллипса:

$$\frac{r_1}{d_1} = \frac{r_2}{d_2} = e.$$

Гипербола. *Гиперболой* (рис. 1-45) называется геометрическое место точек плоскости, разность расстояний которых от двух данных точек F_1 и F_2, называемых *фокусами*, есть величина постоянная: $r_1 - r_2 = \pm 2a$. (Отрезки r_1 и r_2 — *радиусы-векторы точки* M гиперболы.)

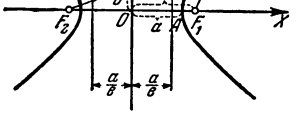


Рис. 1-45.

1. Если фокусы гиперболы находятся на оси X, а начало координат является серединой отрезка F_1F_2, то уравнение гиперболы имеет вид:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

где a и b — *полуоси* гиперболы *(каноническое уравнение)*.

2. Параметрические уравнения гиперболы $x = \pm a \operatorname{ch} t$; $y = b \operatorname{sh} t$.

Действительная полуось гиперболы $a = OA$; *мнимая* полуось $b = OB$; *полуфокальное расстояние* $c = OF_1$; соотношение между этими величинами

$$b^2 = c^2 - a^2.$$

Эксцентриситет гиперболы $e = \frac{c}{a}$ больше единицы.

Радиусы-векторы точки гиперболы с абсциссой x вычисляются по формулам:

$r_1 = -a + ex$, $r_2 = a + ex$ (для точек правой ветви гиперболы);
$r_1 = a - ex$, $r_2 = -a - ex$ (для точек левой ветви гиперболы).

Директрисами гиперболы называются прямые, параллельные мнимой оси и отстоящие от нее на расстоянии $\frac{a}{e}$ в обе стороны. Уравнения директрис: $x = \pm \frac{a}{e}$.

Основное свойство директрис: отношение радиуса-вектора любой точки гиперболы к расстоянию от этой точки до соответствующей директрисы есть величина постоянная, равная эксцентриситету гиперболы:

$$\frac{r_1}{d_1} = \frac{r_2}{d_2} = e.$$

Прямые $y = \pm \frac{b}{a} x$ (рис. 1-46) являются *асимптотами* гиперболы (стр. 145).

Гиперболы $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = -1$ и $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ называются *сопряженными*.

Сопряженные гиперболы имеют общие асимптоты; действительная ось одной из них является мнимой осью другой, и наоборот (рис. 1-46).

Гипербола $x^2 - y^2 = a^2$, у которой полуоси a и b равны между собой, называется *равнобочной*. Ее асимптоты взаимно перпендикулярны.

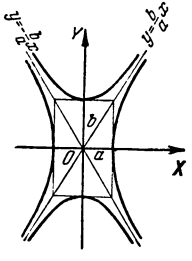


Рис. 1-46.

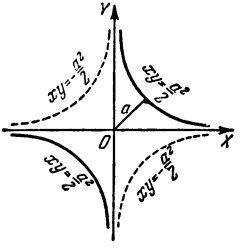


Рис. 1-47.

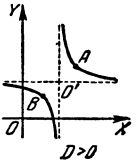


Рис. 1-48.

Если за оси координат принять асимптоты равнобочной гиперболы (рис. 1-47), то ее уравнение имеет вид:

$$xy = \pm \frac{a^2}{2}.$$

Уравнение $y = \dfrac{a_1 x + b_1}{a_2 x + b_2}$ также является уравнением равнобочной гиперболы (рис. 1-48). При этом ее асимптоты параллельны осям координат; центр $O'\left(-\dfrac{b_2}{a_2}, \dfrac{a_1}{a_2}\right)$, а вершины A, $B\left(-\dfrac{b_2 \pm \sqrt{|D|}}{a_2}, \dfrac{a_1 \pm \sqrt{|D|}}{a_2}\right)$, где $D = a_1 b_2 - a_2 b_1$.

Парабола. *Параболой* (рис. 1-49) называется геометрическое место точек плоскости, равноудаленных от данной точки F, называемой *фокусом*, и данной прямой, называемой *директрисой*.

Если ось X проведена через фокус перпендикулярно директрисе, а начало координат является серединой отрезка оси X между фокусом и директрисой, то уравнение параболы имеет вид $y^2 = 2px$, где p — *параметр* параболы, равный расстоянию между фокусом F и директрисой *(каноническое уравнение)*.

Вершина параболы, заданной уравнением в канонической форме, совпадает с началом координат. *Эксцентриситет* параболы равен единице. В отличие от эллипса и гиперболы парабола не имеет центра.

Радиус-вектор точки параболы с абсциссой x вычисляется по формуле $r = x + \dfrac{p}{2}$.

Уравнение директрисы параболы:

$$x = -\frac{p}{2}.$$

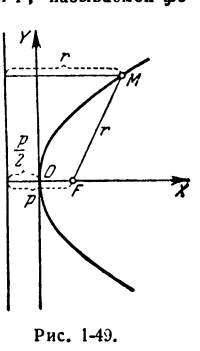


Рис. 1-49.

Уравнение $y = ax^2 + bx + c$, правая часть которого есть квадратичный трехчлен, является уравнением параболы с осью, параллельной

оси OY (рис. 1-50). Параметр ее $p = \frac{1}{2|a|}$. При $a > 0$ парабола обращена вогнутостью вверх, при $a < 0$ — вниз. Координаты вершины параболы

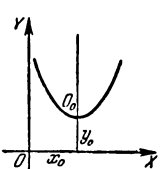


Рис. 1-50.

$$x_0 = -\frac{b}{2a}; \quad y_0 = \frac{4ac - b^2}{4a}.$$

Касательные и нормали к окружности эллипсу, гиперболе и параболе. Уравнение *касательной* в точке $M_1(x_1, y_1)$ окружности, заданной общим уравнением в декартовых координатах:

$$(x - a)(x_1 - a) + (y - b)(y_1 - b) = R^2,$$

а уравнение *нормали* в этой же точке.

$$\frac{y - b}{y_1 - b} = \frac{x - a}{x_1 - a}.$$

В случае, когда центр окружности находится в начале координат, уравнение касательной в точке $M_1(x_1, y_1)$ принимает вид:

$$xx_1 + yy_1 = R^2,$$

а уравнение нормали в той же точке:

$$y_1 x - x_1 y = 0.$$

Уравнение касательной к эллипсу в заданной на нем точке $M_1(x_1, y_1)$:

$$\frac{xx_1}{a^2} + \frac{yy_1}{b^2} = 1.$$

Уравнение нормали в той же точке:

$$\frac{x - x_1}{b^2 x_1} - \frac{y - y_1}{a^2 y_1} = 0.$$

Нормаль к эллипсу (рис. 1-51, *а*) является биссектрисой внутреннего угла, образованного радиусами-векторами точки эллипса, а касательная — биссектрисой соответствующего внешнего угла.

Уравнение касательной к гиперболе в заданной на ней точке $M_1(x_1, y_1)$:

$$\frac{xx_1}{a^2} - \frac{yy_1}{b^2} = 1.$$

Уравнение нормали в той же точке:

$$\frac{x - x_1}{b^2 x_1} + \frac{y - y_1}{a^2 y_1} = 0.$$

Касательная к гиперболе (рис. 1-51, *б*) является биссектрисой внутреннего угла, образованного радиусами-векторами точки гиперболы, а нормаль — биссектрисой соответствующего внешнего угла.

Уравнение касательной к параболе в заданной на ней точке $M_1(x_1, y_1)$:

$$yy_1 = p(x + x_1).$$

Уравнение нормали в той же точке:

$$y - y_1 = -\frac{y_1}{p}(x - x_1).$$

Касательная к параболе (рис. 1-51, *в*) является биссектрисой внутреннего угла, образованного радиусом-вектором точки параболы и перпендикуляром, опущенным из этой точки на директрису, а нормаль — биссектрисой соответствующего внешнего угла.

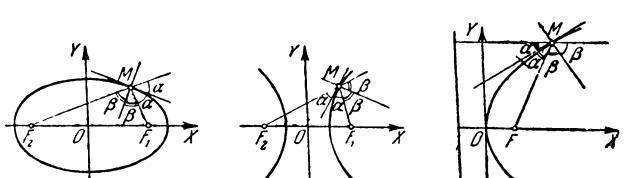


Рис. 1-51.

Полярные уравнения эллипса, параболы и правой ветви гиперболы, когда полюс находится в фокусе, а направление полярной оси противоположно направлению от фокуса к ближайшей вершине (рис. 1-52), имеют вид:

$$\rho = \frac{p}{1 - e\cos\varphi},$$

где p (*параметр кривой*) — отрезок прямой, параллельной директрисе, от фокуса до пересечения с кривой; e — эксцентриситет.

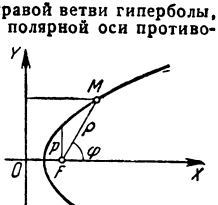


Рис. 1-52.

Общее уравнение кривой второго порядка

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0$$

определяет эллипс (в частности окружность), гиперболу, параболу или пару прямых (*распадающаяся кривая второго порядка*).

Кривая, имеющая определенный центр (центр симметрии), называется *центральной*. Центральными кривыми второго порядка являются эллипс, гипербола и пара пересекающихся прямых.

Инварианты кривой второго порядка:

$$\Delta = \begin{vmatrix} A & B & D \\ B & C & E \\ D & E & F \end{vmatrix}; \quad \delta = \begin{vmatrix} A & B \\ B & C \end{vmatrix} = AC - B^2; \quad S = A + C.$$

Эти величины не изменяются при переносе и повороте осей координат, т. е. если после преобразования координат уравнение кривой примет вид: $A'x'^2 + 2B'x'y' + C'y'^2 + 2D'x' + 2E'y' + F' = 0$, то величины Δ, δ и S, вычисленные для новых значений коэффициентов, сохраняют первоначальные значения.

Приведение общего уравнения кривой второго порядка к каноническому виду

			Вид кривой	Преобразование координат	Каноническое уравнение кривой после преобразования
Центральные кривые $\delta \neq 0$	$\delta > 0$	$\Delta \neq 0$	Эллипс а) $\Delta \cdot S < 0$ — действительный; б) $\Delta \cdot S > 0$ — мнимый.	1) Перенос начала в центр кривой с координатами $x_0 = \frac{BE - CD}{\delta}$, $y_0 = \frac{BD - AE}{\delta}$. 2) Поворот осей на угол α, где $\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2B}{A - C}$, причем знак $\sin 2\alpha$ совпадает со знаком $2B$. Угловой коэффициент новой оси X': $k = \frac{C - A + \sqrt{(C-A)^2 + 4B^2}}{2B}$	$A'x'^2 + C'y'^2 + \frac{\Delta}{\delta} = 0$, $A' = \frac{A + C + \sqrt{(A-C)^2 + 4B^2}}{2}$, $C' = \frac{A + C - \sqrt{(A-C)^2 + 4B^2}}{2}$ (A' и C' являются корнями квадратного уравнения $\sigma^2 - S\sigma + \delta = 0$).
		$\Delta = 0$	Пара мнимых прямых, имеющих общую действительную точку		
	$\delta < 0$	$\Delta \neq 0$	Гипербола		
		$\Delta = 0$	Пара пересекающихся прямых		

Параболические кривые *) $\delta = 0$	$\Delta \neq 0$	Парабола	1) Поворот осей на угол α, где $\operatorname{tg}\alpha = -\frac{A}{B}$, причем знак $\sin\alpha$ обратен знаку A. 2) Перенос начала в вершину параболы, координаты которой x_0 и y_0 определяются из уравнений: $Sy_0 + \frac{AD+BE}{\sqrt{A^2+B^2}} = 0$; $2\frac{BD-AE}{\sqrt{A^2+B^2}}x_0 + \frac{AD+BE}{\sqrt{A^2+B^2}}y_0 + F = 0$.	$y'^2 = 2px'$, где $p = \frac{AE-BD}{S\sqrt{A^2+B^2}}$.
	$\Delta = 0$	Пара параллельных прямых, если $D^2 - AF > 0$; сливающихся, если $D^2 - AF = 0$; мнимых, если $D^2 - AF < 0$.	Поворот осей на угол α, где $\operatorname{tg}\alpha = -\frac{A}{B}$, причем знак $\sin\alpha$ обратен знаку A.	$Sy'^2 + 2\frac{AD+BE}{\sqrt{A^2+B^2}}y' + F = 0$.

*) Имеется в виду, что ни один из старших коэффициентов (A, B, C) не равен нулю. Если два коэффициента (A и B или B и C) равны нулю, то упрощение уравнения сводится к параллельному переносу осей; при этом уравнение $Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0$ преобразуется к виду $y'^2 = 2px'$ и $Ax^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0$ — к виду $x'^2 = 2py'$.

§ 1-7. Аналитическая геометрия в пространстве

Основные системы координат. Для определения положения точки в пространстве применяются системы координат: 1) декартова прямоугольная, 2) сферическая или полярная и 3) цилиндрическая или полуполярная.

1) *Декартовыми координатами* точки M (рис. 1-53) служат: *абсцисса* $x = OA$, *ордината* $y = AN$ и *аппликата* $z = NM$. Различают *правую*

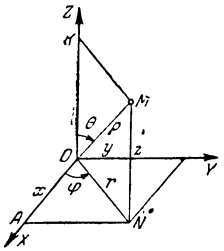


Рис. 1-53.

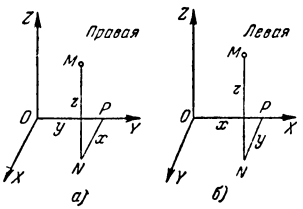


Рис. 1-54.

(рис. 1-54, *а*) и *левую* (рис. 1-54, *б*) координатные системы; в дальнейшем применяется правая координатная система.

Координатные плоскости делят пространство на восемь октантов (рис. 1-55). Знаки координат зависят от октанта, в котором находится точка, и приведены в таблице.

Октанты / Координаты	*I*	*II*	*III*	*IV*	*V*	*VI*	*VII*	*VIII*
x	+	−	−	+	+	−	−	+
y	+	+	−	−	+	+	−	−
z	+	+	+	+	−	−	−	−

При *параллельном переносе осей* декартовой системы (рис. 1-56) координаты x, y и z точки M в системе XYZ связаны с координатами x', y' и z' той же точки в системе $X'Y'Z'$ соотношениями: $x = x' + a$, $y = y' + b$, $z = z' + c$, где a, b, c — координаты нового начала координат O' в прежней системе.

В случае *поворота осей* координат (рис. 1-57) имеем:

$$x = x' \cos \alpha_1 + y' \cos \alpha_2 + z' \cos \alpha_3;$$
$$y = x' \cos \beta_1 + y' \cos \beta_2 + z' \cos \beta_3;$$
$$z = x' \cos \gamma_1 + y' \cos \gamma_2 + z' \cos \gamma_3,$$

где α_1, β_1, γ_1 — углы, образованные осью X', α_2, β_2, γ_2 — осью Y' и α_3, β_3, γ_3 — осью Z' с прежними осями.

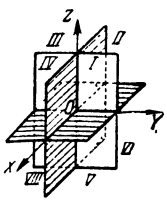


Рис. 1-55.

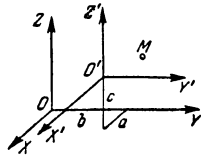


Рис. 1-56.

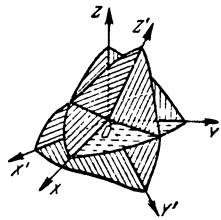


Рис. 1-57.

Эти девять углов связаны соотношениями:

$$\cos^2\alpha_1+\cos^2\beta_1+\cos^2\gamma_1=1;$$
$$\cos^2\alpha_2+\cos^2\beta_2+\cos^2\gamma_2=1;$$
$$\cos^2\alpha_3+\cos^2\beta_3+\cos^2\gamma_3=1;$$
$$\cos\alpha_1\cos\alpha_2+\cos\beta_1\cos\beta_2+\cos\gamma_1\cos\gamma_2=0;$$
$$\cos\alpha_2\cos\alpha_3+\cos\beta_2\cos\beta_3+\cos\gamma_2\cos\gamma_3=0;$$
$$\cos\alpha_3\cos\alpha_1+\cos\beta_3\cos\beta_1+\cos\gamma_3\cos\gamma_1=0.$$

2) *Сферическими координатами* точки M (рис. 1-53) служат *радиус-вектор* $\rho=OM$, угол $\varphi=\angle\,AON$ (*долгота*) и угол $\theta=\angle\,KOM$ (*полярное расстояние*), причем $\rho\geqslant 0$, $0\leqslant\varphi<2\pi$ и $0\leqslant\theta<\pi$.

3) *Цилиндрическими координатами* точки M (рис. 1-53) служат: *радиус-вектор* $r=ON$, *полярный угол* $\varphi=\angle\,AON$ и *аппликата* z, причем $r\geqslant 0$, $0\leqslant\varphi<2\pi$.

Переход от декартовых координат к сферическим производится по формулам:

$$x=\rho\sin\theta\cos\varphi;\quad y=\rho\sin\theta\sin\varphi;\quad z=\rho\cos\theta,$$

справедливым при условии совпадения основных плоскостей обеих систем.

Переход от декартовых координат к цилиндрическим при том же условии производится по формулам:

$$x=r\cos\varphi;\quad y=r\sin\varphi;$$

аппликаты в обеих системах одинаковы.

Некоторые простейшие задачи. 1) *Расстояние между двумя точками* $M_1(x_1, y_1, z_1)$ и $M_2(x_2, y_2, z_2)$

$$d=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2};$$

в частности, расстояние точки $M_1(x_1, y_1, z_1)$ от начала координат

$$d=\sqrt{x_1^2+y_1^2+z_1^2}.$$

2) При *делении отрезка прямой в данном отношении* координаты точки $M(x, y, z)$, делящей отрезок M_1M_2, ограниченный точками

$M_1(x_1, y_1, z_1)$ и $M_2(x_2, y_2, z_2)$, в отношении $\frac{M_1M}{MM_2} = \lambda$ (рис. 1-58) определяются по формулам:

$$x = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1 + \lambda}; \quad y = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1 + \lambda}; \quad z = \frac{z_1 + \lambda z_2}{1 + \lambda}.$$

Если точка M — середина отрезка M_1M_2, то

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2}; \quad y = \frac{y_1 + y_2}{2}; \quad z = \frac{z_1 + z_2}{2}.$$

3) Если прямая проходит через точки $M_1(x_1, y_1, z_1)$ и $M_2(x_2, y_2, z_2)$ и образует с осями координат углы α, β и γ (рис. 1-59), то *направляющие косинусы* прямой определяются по формулам:

$$\cos\alpha = \frac{x_2 - x_1}{d}; \quad \cos\beta = \frac{y_2 - y_1}{d}; \quad \cos\gamma = \frac{z_2 - z_1}{d},$$

где

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}.$$

Направляющие косинусы связаны между собой соотношением $\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$.

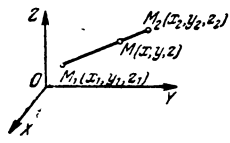


Рис. 1-58.

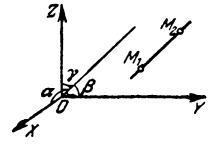


Рис. 1-59.

4) *Объем тетраэдра* (треугольной пирамиды) с вершинами $M_1(x_1, y_1, z_1)$, $M_2(x_2, y_2, z_2)$, $M_3(x_3, y_3, z_3)$ и $M_4(x_4, y_4, z_4)$ определяется по формуле

$$V = \pm\frac{1}{6}\begin{vmatrix} x_1 - x_2 & y_1 - y_2 & z_1 - z_2 \\ x_1 - x_3 & y_1 - y_3 & z_1 - z_3 \\ x_1 - x_4 & y_1 - y_4 & z_1 - z_4 \end{vmatrix}.$$

При этом определитель по этой формуле получается со знаком «+» или «—» в зависимости от того, образуют ли векторы $\overline{M_1M_2}$, $\overline{M_1M_3}$ и $\overline{M_1M_4}$ правую или левую тройку (см. стр. 186).

Если определитель равен нулю, то точки M_1, M_2, M_3 и M_4 лежат в одной плоскости.

Геометрическое представление уравнения с тремя переменными. Уравнение $F(x, y, z) = 0$ или $z = f(x, y)$ является *уравнением* некоторой *поверхности* в декартовой системе координат, если координаты любой точки этой поверхности при подстановке в уравнение обращают его в тождество, а координаты всех остальных точек пространства не удовлетворяют этому уравнению.

Уравнение цилиндрической поверхности с образующими, параллельными оси X, не содержит координаты x, т. е. имеет вид $F(y, z) = 0$ (аналогично в отношении других осей: Y и Z).

На плоскости YZ это же уравнение $F(y, z) = 0$ изображает линию пересечения цилиндрической поверхности с данной координатной плоскостью.

Уравнение конической поверхности с вершиной в начале координат имеет вид $F(x, y, z) = 0$, где F — однородная функция переменных x, y и z, т. е. удовлетворяет условию $F(tx, ty, tz) = t^n F(x, y, z)$.

Уравнение поверхности вращения плоской кривой $z = f(x)$ вокруг оси z имеет вид $z = f(\sqrt{x^2 + y^2})$.

Два уравнения $F_1(x, y, z) = 0$ и $F_2(x, y, z) = 0$, заданные совместно, определяют некоторую *пространственную линию* — пересечение поверхностей, заданных этими уравнениями.

В параметрической форме уравнения пространственной кривой имеют вид $x = \varphi_1(t)$; $y = \varphi_2(t)$; $z = \varphi_3(t)$.

Плоскость. В декартовой системе координат плоскость выражается уравнением, линейным относительно текущих координат x, y и z.

1. *Общее уравнение плоскости* $Ax + By + Cz + D = 0$, или в векторной форме $\mathbf{Nr} + D = 0$ (см. стр. 185), где $\mathbf{r}$ — радиус-вектор любой точки плоскости, а вектор $\mathbf{N}\{A, B, C\}$ (рис. 1-60) перпендикулярен к плоскости.

При $D = 0$ плоскость проходит через начало координат. При $A = 0$ (или $B = 0$, или $C = 0$) плоскость параллельна оси X (или Y, или Z). При $A = B = 0$ (или $A = C = 0$, или $B = C = 0$) плоскость параллельна плоскости XY (или XZ, или YZ).

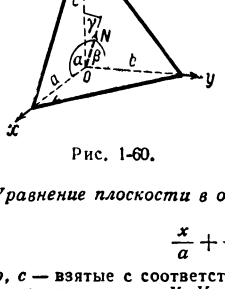


Рис. 1-60.

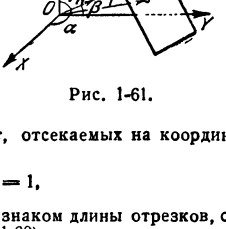


Рис. 1-61.

2. *Уравнение плоскости в отрезках*, отсекаемых на координатных осях:

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1,$$

где a, b, c — взятые с соответствующим знаком длины отрезков, отсекаемых плоскостью на осях X, Y и Z (рис. 1-60).

Если $b = c = \infty$ (плоскость параллельна плоскости YZ), то уравнение плоскости $x = a$.

Если $a = c = \infty$ (плоскость параллельна плоскости XZ), то уравнение плоскости $y = b$.

Если $a = b = \infty$ (плоскость параллельна плоскости XY), то уравнение плоскости $z = c$.

3. *Нормальное уравнение плоскости* $x \cos\alpha + y \cos\beta + z \cos\gamma - p = 0$, или в векторной форме $\mathbf{N^0 r} - p = 0$, где $\mathbf{N^0}$ — нормальный единичный вектор, $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ — его направляющие косинусы; p — расстояние от начала координат до плоскости (рис. 1-61).

Чтобы общее уравнение плоскости привести к нормальному виду, надо все члены его левой части умножить на *нормирующий множитель*

$M = \pm \dfrac{1}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}} = \pm \dfrac{1}{N}$ ($N = |\mathbf{N}|$); знак M берется обратным знаку D.

Параметры p, $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ вычисляются по коэффициентам общего уравнения с помощью формул:

$$\cos\alpha = \pm \frac{A}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}, \quad \cos\beta = \pm \frac{B}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}},$$

$$\cos\gamma = \pm \frac{C}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}, \quad p = \mp \frac{D}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}.$$

4. *Уравнение пучка плоскостей*, проходящих через прямую, заданную системой уравнений $Ax + By + Cz + D = 0$, $A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$, имеет вид $(Ax + By + Cz + D) + \mu(A_1x + B_1y + C_1z + D_1) = 0$, где μ произвольно.

5. *Уравнение плоскости, проходящей через три данные точки* $M_1(x_1, y_1, z_1)$, $M_2(x_2, y_2, z_2)$ и $M_3(x_3, y_3, z_3)$:

$$\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix} = 0,$$

или в векторной форме $(\mathbf{r} - \mathbf{r}_1)(\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1)(\mathbf{r}_3 - \mathbf{r}_1) = 0$.

6. *Угол между двумя плоскостями*

$$Ax + By + Cz + D = 0 \text{ или } \mathbf{Nr} + D = 0,$$
$$A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \text{ или } \mathbf{N}_1\mathbf{r} + D_1 = 0$$

определяется по формуле

$$\cos\varphi = \pm \frac{AA_1 + BB_1 + CC_1}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}\sqrt{A_1^2+B_1^2+C_1^2}} = \pm \frac{\mathbf{NN}_1}{N \cdot N_1}.$$

Условия параллельности двух плоскостей: $\dfrac{A}{A_1} = \dfrac{B}{B_1} = \dfrac{C}{C_1}$ или $\mathbf{N} \times \mathbf{N}_1 = 0$.

Условие перпендикулярности двух плоскостей: $AA_1 + BB_1 + CC_1 = 0$ или $\mathbf{NN}_1 = 0$.

7. *Расстояние от точки* $M_1(x_1, y_1, z_1)$ *до плоскости* $x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma - p = 0$ определяется по формуле

$$d = \pm (x_1\cos\alpha + y_1\cos\beta + z_1\cos\gamma - p).$$

При этом для получения положительной величины d следует брать выражение для d со знаком «+», если точка M_1 и начало координат

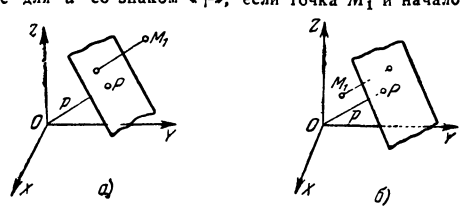


Рис. 1-62.

расположены по разные стороны от плоскости (рис. 1-62, *а*), и со знаком «—», если — по одну сторону (рис. 1-62, *б*).

8. Для отыскания *точки пересечения трех плоскостей*, заданных уравнениями $A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$, $A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$, $A_3x + B_3y + C_3z + D_3 = 0$, надо решить совместно данную систему уравнений.

Прямая в пространстве. Прямая в пространстве определяется как линия пересечения двух плоскостей.

1. *Общие уравнения прямой*:

$$\begin{cases} Ax + By + Cz + D = 0, \\ A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} \mathbf{Nr} + D = 0, \\ \mathbf{N}_1\mathbf{r} + D_1 = 0. \end{cases}$$

2. *Нормальные уравнения прямой*: $\dfrac{x - x_1}{\cos\alpha} = \dfrac{y - y_1}{\cos\beta} = \dfrac{z - z_1}{\cos\gamma}$, где x_1, y_1, z_1 — координаты одной из точек прямой, а α, β, γ — углы прямой с осями координат.

3. *Канонические уравнения прямой*: $\dfrac{x - x_1}{m} = \dfrac{y - y_1}{n} = \dfrac{z - z_1}{p}$,

или в векторной форме $(\mathbf{r} - \mathbf{r}_1) \times \mathbf{R} = 0$, где x_1, y_1, z_1 — координаты одной из точек прямой (координаты вектора $\mathbf{r}_1$), а m, n, p — координаты вектора $\mathbf{R}$ (рис. 1-63), параллельного прямой, т. е. числа, пропорциональные направляющим косинусам (*направляющие коэффициенты*):

$$m : n : p = \cos\alpha : \cos\beta : \cos\gamma.$$

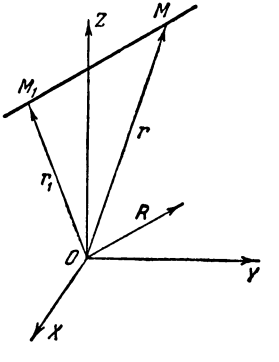


Рис. 1-63.

Для перехода от общих уравнений прямой к каноническим нужно подобрать x_1, y_1 и z_1 так, чтобы они удовлетворяли общим уравнениям, а числа m, n, p определить по формулам:

$$m = \begin{vmatrix} B_1 & C_1 \\ B_2 & C_2 \end{vmatrix}; \quad n = \begin{vmatrix} C_1 & A_1 \\ C_2 & A_2 \end{vmatrix}; \quad p = \begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix}.$$

Чтобы канонические уравнения прямой привести к нормальному виду, надо знаменатели умножить на *нормирующий множитель* $M = \mp \dfrac{1}{\sqrt{m^2 + n^2 + p^2}}$; следовательно:

$$\cos\alpha = \mp \frac{m}{\sqrt{m^2 + n^2 + p^2}}; \quad \cos\beta = \mp \frac{n}{\sqrt{m^2 + n^2 + p^2}};$$

$$\cos\gamma = \mp \frac{p}{\sqrt{m^2 + n^2 + p^2}}.$$

Знак нормирующего множителя определяет направление на прямой.

4. *Параметрические уравнения прямой*: $x = x_1 + mt$, $y = y_1 + nt$, $z = z_1 + pt$, или в векторной форме $\mathbf{r} = \mathbf{r}_1 + \mathbf{R}t$, где t — параметр.

5. *Уравнения прямой, проходящей через точки* $M_1(x_1, y_1, z_1)$ и $M_2(x_2, y_2, z_2)$:

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{z - z_1}{z_2 - z_1},$$ или в векторной форме $(\mathbf{r} - \mathbf{r}_1) \times (\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1) = 0$.

6. *Угол между двумя прямыми* с направляющими косинусами $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ и $\cos\alpha_1$, $\cos\beta_1$, $\cos\gamma_1$ определяется формулой

$$\cos\varphi = \cos\alpha\cos\alpha_1 + \cos\beta\cos\beta_1 + \cos\gamma\cos\gamma_1.$$

Если прямые даны уравнениями: $\frac{x-x_1}{m}=\frac{y-y_1}{n}=\frac{z-z_1}{p}$, $\frac{x-x_2}{m_1}=\frac{y-y_2}{n_1}=\frac{z-z_2}{p_1}$, или в векторной форме $(\mathbf{r}-\mathbf{r}_1)\times\mathbf{R}_1=0$, $(\mathbf{r}-\mathbf{r}_2)\times\mathbf{R}_2=0$, то $\cos\varphi=\pm\frac{mm_1+nn_1+pp_1}{\sqrt{m^2+n^2+p^2}\sqrt{m_1^2+n_1^2+p_1^2}}=\pm\frac{\mathbf{R}_1\mathbf{R}_2}{R_1R_2}$.

Условия параллельности двух прямых: $\cos\alpha=\cos\alpha_1$, $\cos\beta=\cos\beta_1$, $\cos\gamma=\cos\gamma_1$ или $\frac{m}{m_1}=\frac{n}{n_1}=\frac{p}{p_1}$, или $\mathbf{R}_1\times\mathbf{R}_2=0$.

Условие перпендикулярности двух прямых: $\cos\alpha\cos\alpha_1+\cos\beta\cos\beta_1+\cos\gamma\cos\gamma_1=0$, или $mm_1+nn_1+pp_1=0$, или $\mathbf{R}_1\mathbf{R}_2=0$.

7. Две прямые лежат в одной плоскости (*компланарны*), если выполнено условие

$$\begin{vmatrix} x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ m & n & p \\ m_1 & n_1 & p_1 \end{vmatrix}=0.$$

8. *Угол между прямой и плоскостью* определяется формулой

$$\sin\varphi=\frac{|Am+Bn+Cp|}{\sqrt{m^2+n^2+p^2}\sqrt{A^2+B^2+C^2}}=\frac{|\mathbf{RN}|}{RN}.$$

Условие параллельности прямой и плоскости: $Am+Bn+Cp=0$, или $\mathbf{RN}=0$.

Условие перпендикулярности прямой и плоскости: $\frac{A}{m}=\frac{B}{n}=\frac{C}{p}$, или $\mathbf{N}\times\mathbf{R}=0$.

9. Координаты *точки пересечения прямой и плоскости*: $x_0=x_1+mt_0$, $y_0=y_1+nt_0$, $z_0=z_1+pt_0$, где $t_0=-\frac{Ax_1+By_1+Cz_1+D}{Am+Bn+Cp}$.

Прямая лежит в плоскости, если выполнены условия: $Ax_1+By_1+Cz_1+D=0$ (прямая и плоскость имеют общую точку) и $Am+Bn+Cp=0$ (прямая и плоскость параллельны).

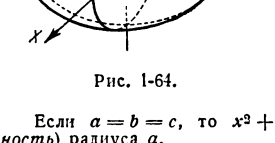


Рис. 1-64.

Канонические уравнения поверхностей второго порядка. 1. *Эллипсоид трехосный* (рис. 1-64):

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1.$$

Если $a=b$ — *эллипсоид вращения* (поверхность вращения эллипса $\frac{x^2}{a^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ вокруг оси Z).

Если $a=b=c$, то $x^2+y^2+z^2=a^2$ — *сфера* (*шаровая поверхность*) радиуса a.

Уравнение $(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2=a^2$ представляет собой сферу радиуса a с центром в точке $O_0(x_0, y_0, z_0)$.

2. *Однополостный гиперболоид* (рис. 1-65):

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1.$$

Если $a=b$ — *однополостный гиперболоид вращения* (поверхность вращения гиперболы $\frac{x^2}{a^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$ вокруг оси Z).

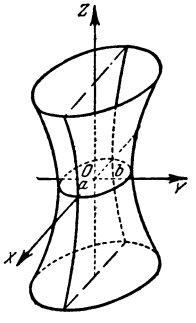


Рис. 1-65.

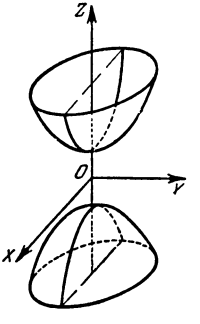


Рис. 1-66.

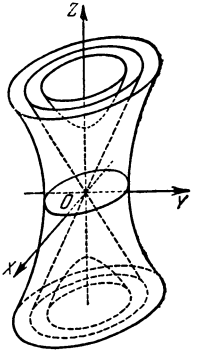


Рис. 1-67.

3. *Двуполостный гиперболоид* (рис. 1-66):

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=-1.$$

Если $a=b$ — *двуполостный гиперболоид вращения* (поверхность вращения гиперболы $\frac{x^2}{a^2}-\frac{z^2}{c^2}=-1$ вокруг оси Z).

4. *Конус второго порядка* (рис. 1-67):

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=0.$$

Его образующие являются асимптотами соответствующих сечений гиперболоидов $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=\pm 1$; по отношению к этим гиперболоидам конус называется *асимптотическим*.

При $a=b$ — *прямой круговой конус*.

5. *Эллиптический параболоид* (рис. 1-68):

$$\frac{x^2}{p} + \frac{y^2}{q} = 2z.$$

Если $p = q$, — *параболоид вращения* (поверхность вращения параболы $x^2 = 2pz$ вокруг оси Z).

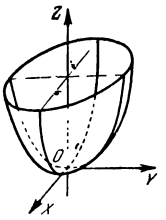


Рис. 1-68.

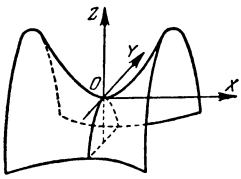


Рис. 1-69.

6. *Гиперболический параболоид* (рис. 1-69):

$$\frac{x^2}{p} - \frac{y^2}{q} = 2z.$$

7. *Цилиндры второго порядка* с образующими, параллельными оси Z:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \text{ — } \textit{эллиптический цилиндр} \text{ (рис. 1-70),}$$

в частности, при $a = b$ — *круговой цилиндр*;

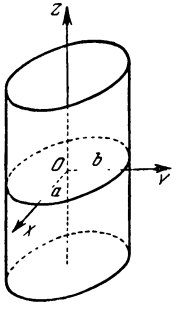


Рис. 1-70.

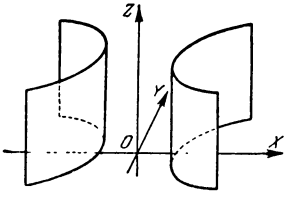


Рис. 1-71.

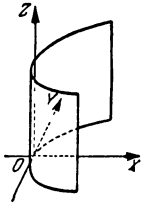


Рис. 1-72.

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \text{ — } \textit{гиперболический цилиндр} \text{ (рис. 1-71);}$$

$$y^2 = 2px \text{ — } \textit{параболический цилиндр} \text{ (рис. 1-72).}$$

Общее уравнение поверхности второго порядка. Вид поверхности второго порядка, заданной общим уравнением:

$$a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + 2a_{12}xy + 2a_{23}yz + \\ + 2a_{13}xz + 2a_{14}x + 2a_{24}y + 2a_{34}z + a_{44} = 0,$$

определяется, как показано ниже, знаками величин:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix};$$

$$\delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix};$$

$$S = a_{11} + a_{22} + a_{33};$$

$$T = a_{22}a_{33} + a_{33}a_{11} + a_{11}a_{22} - a_{23}^2 - a_{31}^2 - a_{12}^2,$$

являющихся *инвариантами* этого уравнения, так как эти величины не изменяются при преобразовании системы координат (здесь $a_{ij} = a_{ji}$).

$\delta \neq 0$ (центральные поверхности)			$\delta = 0$ (параболоиды, цилиндры и пары плоскостей)		
	$S\delta > 0;\ T > 0$	$S\delta$ и T не оба больше 0		$T > 0\ (\Delta < 0)$	$T < 0$ $(\Delta > 0)$
$\Delta < 0$	Эллипсоид	Двуполостный гиперболоид	$\Delta \neq 0$	Эллиптический параболоид	Гиперболический параболоид
$\Delta > 0$	Мнимый эллипсоид	Однополостный гиперболоид	$\Delta = 0$	Цилиндрическая поверхность, направляющей которой служит кривая второго порядка. В зависимости от вида этой кривой цилиндр будет эллиптическим (при $T > 0$), гиперболическим (при $T < 0$), параболическим (при $T = 0$) или поверхность распадется на две плоскости (действительные, мнимые или сливающиеся).	
$\Delta = 0$	Мнимый конус (с действительной вершиной)	Конус			

Глава 1-4

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ

§ 1-8. Функции одной переменной

Основные понятия. Действительное число x может быть изображено точкой на *числовой прямой* (оси X) с абсциссой x (рис. 1-73). Множество значений $a \leqslant x \leqslant b$ называется *отрезком* или *сегментом* и обозначается $[a, b]$. Множество значений $a < x < b$ называется *интервалом* и обозначается (a, b).

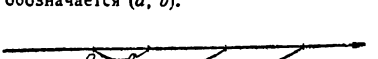


Рис. 1-73.

Окрестностью точки $x = x_0$ называется любой отрезок, для которого точка x_0 является внутренней.

Величина y называется *функцией независимой переменной (аргумента)* x, если каждому значению величины x, принадлежащему некоторому множеству значений, соответствует вполне определенное действительное значение y.

Обозначение: $y = f(x)$ (x — аргумент, y — функция, f — символ функциональной зависимости).

Областью существования функции называется множество значений аргумента, для которых эта функция определена.

Если задано такое соотношение между x и y, что каждому (или некоторым) значению x соответствует более чем одно значение y, то такое соотношение определяет не одну, а несколько функций, или, как говорят коротко, *многозначную* функцию (каждая из однозначных функций, объединяемых этой многозначной функцией, называется ее *ветвью*).

Любая функция может быть геометрически изображена при помощи *графика*, если значения аргумента x и функции y рассматривать как координаты точки на плоскости.

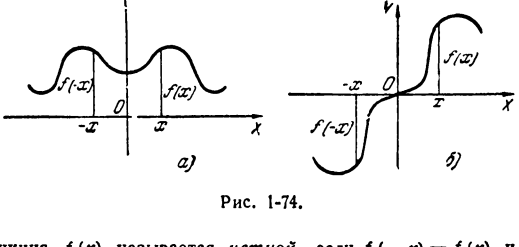


Рис. 1-74.

Функция $f(x)$ называется *четной*, если $f(-x) = f(x)$, и *нечетной*, если $f(-x) = -f(x)$. График четной функции симметричен относительно оси Y (рис. 1-74, *а*), график нечетной функции симметричен относительно начала координат (рис. 1-74, *б*).

Если $f(x+T)=f(x)$ для любого x (T — постоянная величина), то функция $f(x)$ называется *периодической*, а число T — ее *периодом*.

Заданная при помощи некоторой формулы функциональная зависимость называется *неявной*, если она имеет вид $F(x, y)=0$, *явной*, если $y=f(x)$, и *параметрической*, если аргумент x и функция y выражены через вспомогательную переменную величину t (*параметр*): $x=\varphi_1(t)$, $y=\varphi_2(t)$.

Если формулу, определяющую функцию, можно записать так, что над аргументом совершается конечное число алгебраических действий (сложение, вычитание, умножение, деление, возведение в степень, извлечение корня, решение алгебраического уравнения), то функция называется *алгебраической*; в противном случае она называется *трансцендентной* (тригонометрические и обратные тригонометрические функции, логарифмическая функция, показательная функция и др.).

Алгебраические функции делятся на *рациональные* и *иррациональные*. Функция рациональна, если для ее вычисления достаточно произвести над аргументом конечное число арифметических действий (сложение, вычитание, умножение, деление, возведение в целую степень); в противном случае функция иррациональна.

Рациональная функция называется *целой* или *многочленом (полиномом)*, если для ее вычисления можно не прибегать к делению на выражение, содержащее аргумент (и к возведению аргумента в отрицательную степень); в противном случае она является *рациональной дробью*.

Функции, для определения которых над аргументом совершается конечное число так называемых элементарных действий (к числу элементарных действий относятся все алгебраические, а также логарифмирование, потенцирование и действия, определяемые тригонометрическими и обратными тригонометрическими функциями), называются *элементарными функциями*.

Пределы и бесконечно малые. Число b называется *пределом функции* $f(x)$ при x, стремящемся к a (обозначение: $\lim\limits_{x\to a} f(x)=b$), если, как мало бы ни было положительное число ε, к нему можно подобрать столь малое положительное число δ, что для всякого значения x ($x\neq a$), удовлетворяющего условию $|x-a|<\delta$, имеет место неравенство $|f(x)-b|<\varepsilon$.

Равенство $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=b$ обозначает, что ко всякому положительному числу ε можно подобрать столь большое число A, что для всякого x, удовлетворяющего условию $|x|>A$, имеет место неравенство $|f(x)-b|<\varepsilon$.

Равенство $\lim\limits_{x\to a} f(x)=\infty$ [в этом случае $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ не существует] имеет тот смысл, что, как велико бы ни было число B, можно подобрать столь малое положительное число δ, что из $|x-a|<\delta$, $x\neq a$, следует $|f(x)|>B$.

Равенство $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=b$ означает, что, каково бы ни было положительное число ε, можно подобрать столь большое число A, что для любого x, удовлетворяющего условиям $x<0$, $|x|>A$, имеет место неравенство $|f(x)-b|<\varepsilon$.

Аналогичным образом определяется смысл равенств: $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=b$, $\lim\limits_{x\to a} f(x)=+\infty$, $\lim\limits_{x\to a} f(x)\to-\infty$, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\infty$ и т. д.

Определение левого и правого пределов функции см. ниже (стр. 88).

Если $a_n=f(n)$, где аргумент n принимает лишь целочисленные значения ($n=1, 2, \ldots$), то предел $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ называется *пределом числовой*

последовательности $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$. Если этот предел существует (и конечен), то последовательность называется *сходящейся*; в противном случае последовательность *расходящаяся*.

Функция $f(x)$ называется *ограниченной*, если существует такая постоянная K, что $|f(x)|<K$, и *неограниченной* — в противном случае.

Бесконечно малой называется переменная величина, предел которой равен нулю.

Бесконечно большой называется переменная величина, предел которой равен бесконечности.

Величина, обратная бесконечно большой, есть бесконечно малая; величина, обратная бесконечно малой, есть бесконечно большая.

Сумма конечного числа бесконечно малых есть бесконечно малая. Произведение конечного числа бесконечно малых, а также произведение ограниченной величины на бесконечно малую, есть бесконечно малая.

Если $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ — бесконечно малые при $x \to a$ и существует конечный или бесконечный предел $\lim\limits_{x \to a} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = A$, то $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ называют бесконечно малыми *одинакового порядка малости* в случае, когда $A \neq 0$ и $A \neq \infty$, и бесконечно малыми *различных порядков*, когда $A=0$ или $A=\infty$. При этом если $A=0$, то $\alpha(x)$ — бесконечно малая *более высокого порядка*, чем $\beta(x)$, а если $A=\infty$, то $\alpha(x)$ имеет порядок малости *ниже*, чем $\beta(x)$.

В случае, когда $A=1$, $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ называются *равносильными (эквивалентными)* бесконечно малыми (обозначение: $\alpha \sim \beta$).

Если $\lim\limits_{x \to a} \frac{\alpha(x)}{[\beta(x)]^k} = A$ ($A \neq 0$ и $A \neq \infty$), то α является бесконечно малой *порядка* k относительно β.

Порядок малости произведения нескольких бесконечно малых выше, чем каждого из сомножителей.

Сумма нескольких бесконечно малых различных порядков имеет порядок наинизшего (в отношении порядка малости) слагаемого и равносильна этому слагаемому (оно называется *главной частью* суммы).

Если $\alpha \sim \beta$, то $\alpha - \beta$ — бесконечно малая более высокого порядка, чем α и β. Если $\alpha \sim \alpha_1$ и $\beta \sim \beta_1$, то

$$\lim_{x \to a} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = \lim_{x \to a} \frac{\alpha_1(x)}{\beta_1(x)}.$$

Теоремы о пределах (a — величина конечная или бесконечная):

1) $\lim\limits_{x \to a} c = c$ (c — постоянная);

2) $\lim\limits_{x \to a} [f_1(x) + f_2(x) + \ldots + f_n(x)] = \lim\limits_{x \to a} f_1(x) + \lim\limits_{x \to a} f_2(x) + \ldots + \lim\limits_{x \to a} f_n(x)$;

3) $\lim\limits_{x \to a} [f_1(x) \cdot f_2(x) \ldots f_n(x)] = \lim\limits_{x \to a} f_1(x) \cdot \lim\limits_{x \to a} f_2(x) \ldots \lim\limits_{x \to a} f_n(x)$;

4) $\lim\limits_{x \to a} [cf(x)] = c \lim\limits_{x \to a} f(x)$ (c — постоянная);

5) $\lim\limits_{x \to a} \frac{f(x)}{\varphi(x)} = \frac{\lim\limits_{x \to a} f(x)}{\lim\limits_{x \to a} \varphi(x)}$, если $\lim\limits_{x \to a} \varphi(x) \neq 0$.

Некоторые пределы:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg} x}{x}=1;$$

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=2{,}71828\ldots=e$$ (число e служит основанием системы натуральных логарифмов);

$$\lim\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n}-\ln n\right)=0{,}5772\ldots=C$$ *(постоянная Эйлера)*;

$$\lim_{x\to\infty}\frac{(\ln x)^m}{x}=0;\quad \lim_{x\to\infty}\frac{x^m}{e^x}=0$$ (m — любое число); $$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}=1;$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n!}{n^n e^{-n}\sqrt{n}}=\sqrt{2\pi}$$ *(формула Стирлинга)*;

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x}=1.$$

Вычисление пределов функций производится путем применения теорем о пределах, а также путем преобразования функций к виду, для которого предел находится легко. При вычислении пределов функций, принимающих неопределенный вид $\frac{0}{0}$ или $\frac{\infty}{\infty}$, применяют *правило Лопиталя:* если функции $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ определены в интервале, содержащем точку $x=a$ (в самой точке они могут и не быть определены), имеют на этом интервале конечные производные (см. стр. 89), причем $\psi'(x)\neq 0$ и $\lim\limits_{x\to a}\varphi(x)=0$, $\lim\limits_{x\to a}\psi(x)=0$ (неопределенность вида $\frac{0}{0}$) или $\lim\limits_{x\to a}\varphi(x)=\infty$ и $\lim\limits_{x\to a}\psi(x)=\infty$ (неопределенность вида $\frac{\infty}{\infty}$), то $\lim\limits_{x\to a}\frac{\varphi(x)}{\psi(x)}=\lim\limits_{x\to a}\frac{\varphi'(x)}{\psi'(x)}$, если этот предел существует или равен ∞.

В тех случаях, когда $\lim\limits_{x\to a}\frac{\varphi'(x)}{\psi'(x)}$ также приводит к неопределенности вида $\frac{0}{0}$ или $\frac{\infty}{\infty}$, применяют правило Лопиталя повторно.

Для вычисления $\lim\limits_{x\to a}[\varphi(x)\psi(x)]$, когда $\lim\limits_{x\to a}\varphi(x)=0$, а $\lim\limits_{x\to a}\psi(x)=\infty$ (неопределенность вида $0\cdot\infty$), можно произвести преобразование к виду $\frac{\varphi(x)}{\frac{1}{\psi(x)}}$ или $\frac{\psi(x)}{\frac{1}{\varphi(x)}}$, что приводит к случаю $\frac{0}{0}$ или $\frac{\infty}{\infty}$.

Для вычисления $\lim\limits_{x\to a}[\varphi(x)-\psi(x)]$, где $\lim\limits_{x\to a}\varphi(x)=\infty$ и $\lim\limits_{x\to a}\psi(x)=\infty$ (неопределенность вида $\infty-\infty$), можно произвести преобразование разности $\varphi(x)-\psi(x)$ в отношение, например, так:

$$\varphi(x)-\psi(x)=\left(\frac{1}{\psi(x)}-\frac{1}{\varphi(x)}\right):\frac{1}{\varphi(x)\,\psi(x)},$$

что приводит к случаю $\frac{0}{0}$.

Неопределенности вида 0^0, ∞^0, 1^∞ можно раскрыть путем логарифмирования выражения $\varphi(x)^{\psi(x)}$ и нахождения предела функции $\psi(x)\ln\varphi(x)$, после чего потенцированием находится искомый предел.

Для вычисления пределов, принимающих неопределенный вид, можно также пользоваться разложением функций в ряд Тейлора (см. стр. 172).

Непрерывность и точки разрыва. Функция $f(x)$ называется *непрерывной в точке* $x=x_0$ (рис. 1-75), если в этой точке $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\Delta y=0$ [здесь $\Delta x=x-x_0$ *(приращение аргумента)*, $\Delta y=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)$ *(приращение функции)*].

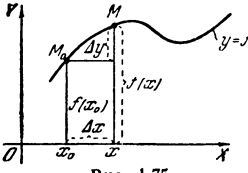


Рис. 1-75.

Условие непрерывности $f(x)$ в точке $x=x_0$ можно записать также при помощи равенства $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=f(x_0)$.

Функция *непрерывна на отрезке*, если она непрерывна во всех точках этого отрезка.

Точка $x=x_0$, в которой условие непрерывности нарушается, называется *точкой разрыва* функции.

Левым и правым пределами функции в точке $x=x_0$ называются числа, определяемые равенствами:

$$f(x_0-0)=\lim_{\varepsilon\to 0} f(x_0-\varepsilon) \qquad (\varepsilon>0);$$

$$f(x_0+0)=\lim_{\varepsilon\to 0} f(x_0+\varepsilon) \qquad (\varepsilon>0).$$

Если эти пределы существуют (и конечны), но не равны между собой, то точка $x=x_0$ называется *точкой разрыва 1-го рода*. Если хотя бы один из этих пределов не существует, то $x=x_0$ — *точка разрыва 2-го рода*.

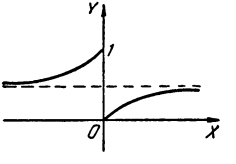


Рис. 1-76.

Примеры.

а) $f(x)=\dfrac{1}{1+2^{1/x}}$; $x=0$ — точка разрыва 1-го рода (рис. 1-76); здесь $f(-0)=1$, $f(+0)=0$;

б) $f(x)=2^{\dfrac{1}{x-3}}$; $x=3$ — точка разрыва 2-го рода (рис. 1-77); здесь $f(3-0)=0$; $f(3+0)=\infty$;

в) $f(x)=\sin\dfrac{1}{x}$; $x=0$ — точка разрыва 2-го рода (рис. 1-78); здесь $f(-0)$ и $f(+0)$ не существуют.

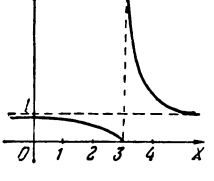


Рис. 1-77.

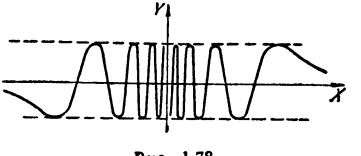


Рис. 1-78.

Если $f(x_0-0)=f(x_0+0)\neq f(x_0)$, то точка $x=x_0$ называется *точкой устранимого разрыва*.

Производная и дифференциал. *Производной* функции $y = f(x)$ называется предел, к которому стремится отношение приращения функции к приращению аргумента, когда приращение аргумента стремится к нулю:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}.$$

Обозначения производной: y', y'_x, $f'(x)$, $\frac{dy}{dx}$, $\frac{d}{dx} f(x)$.

Нахождение производной функции называется *дифференцированием* функции.

Для того чтобы функция была *дифференцируемой* в некоторой точке, необходимо (но не достаточно), чтобы она была непрерывной в этой точке.

Касательной в точке M кривой называется предельное положение секущей MN [N — произвольная точка кривой (рис. 1-79)], когда $N \to M$; *нормалью* называется перпендикуляр к касательной, проведенный через точку касания.

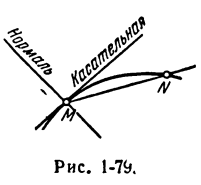


Рис. 1-79.

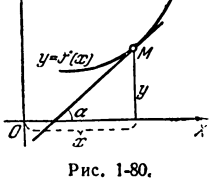


Рис. 1-80.

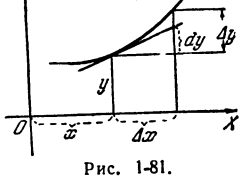


Рис. 1-81.

Производная функции $y = f(x)$ равна тангенсу угла наклона к оси X касательной к графику функции в точке $M(x, y)$ (рис. 1-80):

$$\frac{dy}{dx} = \operatorname{tg} \alpha.$$

Второй производной функции $y = f(x)$, или *производной второго порядка*, называется производная от ее производной.

Обозначения второй производной: y'', $f''(x)$, $\frac{d^2y}{dx^2}$. Аналогично определяются производные любого порядка. Обозначения *производной n-го порядка*: $y^{(n)}$, $f^{(n)}(x)$, $\frac{d^n y}{dx^n}$.

Дифференциалом функции $y = f(x)$ [обозначения: dy; $df(x)$] называется произведение ее производной на приращение аргумента:

$$dy = f'(x)\,\Delta x = y'\Delta x.$$

Разность между приращением функции и ее дифференциалом является бесконечно малой более высокого порядка, чем Δx. Дифференциал аргумента dx равен его приращению Δx и, следовательно, $dy = y'dx$. Эта формула *инвариантна*, т. е. сохраняется и в том случае, когда x не является независимым переменным, а в свою очередь зависит от переменной t: $x = \varphi(t)$.

Геометрически дифференциал изображается приращением ординаты точки на касательной к графику функции (рис. 1-81).

Дифференциал второго порядка — дифференциал дифференциала: $d^2y = d(dy)$. Аналогично определяются дифференциалы любого порядка.

Формулы для дифференциалов высших порядков

$$d^2y = y''dx^2,\ d^3y = y'''dx^3, \ldots,\ d^ny = y^{(n)}dx^n$$

имеют место, если x — аргумент; если же $x = \varphi(t)$ [причем функция $\varphi(t)$ — нелинейная], то эти формулы перестают быть справедливыми.

Таблица производных основных элементарных функций

Функция y	Производная $\frac{dy}{dx}$	Функция y	Производная $\frac{dy}{dx}$
C (const)	0	$\arcsin x$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
x	1		
x^n	nx^{n-1}	$\arccos x$	$-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\frac{1}{x}$	$-\frac{1}{x^2}$		
$\frac{1}{x^n}$	$-\frac{n}{x^{n+1}}$	$\operatorname{arctg} x$	$\frac{1}{1+x^2}$
$\sqrt{x}$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$	$\operatorname{arcctg} x$	$-\frac{1}{1+x^2}$
$\sqrt[n]{x}$	$\frac{1}{n\sqrt[n]{x^{n-1}}}$	$\operatorname{arcsec} x$	$\frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}$
e^x	e^x		
e^{kx}	ke^{kx}	$\operatorname{arccosec} x$	$-\frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}$
a^x	$a^x \ln a$	$\operatorname{sh} x$	$\operatorname{ch} x$
a^{kx}	$ka^{kx} \ln a$	$\operatorname{ch} x$	$\operatorname{sh} x$
$\ln x$	$\frac{1}{x}$	$\operatorname{th} x$	$\frac{1}{\operatorname{ch}^2 x}$
$\log_a x$	$\frac{1}{x}\log_a e = \frac{1}{x \ln a}$	$\operatorname{cth} x$	$-\frac{1}{\operatorname{sh}^2 x}$
$\lg x$	$\frac{1}{x}\lg e \approx \frac{0{,}4343}{x}$	$\operatorname{Arsh} x$	$\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$
$\sin x$	$\cos x$		
$\cos x$	$-\sin x$	$\operatorname{Arch} x$	$\pm\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$
$\operatorname{tg} x$	$\frac{1}{\cos^2 x} = \sec^2 x$	$\operatorname{Arth} x$	$\frac{1}{1-x^2}$
$\operatorname{ctg} x$	$-\frac{1}{\sin^2 x} = -\operatorname{cosec}^2 x$	$\operatorname{Arcth} x$	$-\frac{1}{x^2-1}$
$\sec x$	$\frac{\sin x}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x \sec x$		
$\operatorname{cosec} x$	$-\frac{\cos x}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x \operatorname{cosec} x$		

Таблица производных высших порядков некоторых элементарных функций

Функция y	Производная $\frac{d^n y}{dx^n}$
x^m	$m(m-1)(m-2)\ldots(m-n+1)\,x^{m-n}$ (при m целом и $n>m$ производная равна нулю)
$\frac{1}{x^m}$	$(-1)^n m(m+1)(m+2)\ldots(m+n-1)\,\frac{1}{x^{m+n}}$
$\sqrt[m]{x}$	$(-1)^{n-1}\frac{1}{m^n}(m-1)(2m-1)\ldots[(n-1)m-1]\,\frac{1}{\sqrt[m]{x^{mn-1}}}$
e^x	e^x
e^{kx}	$k^n e^{kx}$
a^x	$(\ln a)^n a^x$
a^{kx}	$(k\ln a)^n a^{kx}$
$\ln x$	$(-1)^{n-1}(n-1)!\,\frac{1}{x^n}$
$\log_a x$	$(-1)^{n-1}\frac{(n-1)!}{\ln a}\,\frac{1}{x^n}$
$\sin x$	$\sin\left(x+\frac{n\pi}{2}\right)$
$\sin kx$	$k^n \sin\left(kx+\frac{n\pi}{2}\right)$
$\cos x$	$\cos\left(x+\frac{n\pi}{2}\right)$
$\cos kx$	$k^n \cos\left(kx+\frac{n\pi}{2}\right)$
$\mathrm{sh}\,x$	$\begin{cases}\mathrm{sh}\,x & \text{при } n \text{ четном},\\ \mathrm{ch}\,x & \text{при } n \text{ нечетном};\end{cases}$
$\mathrm{ch}\,x$	$\begin{cases}\mathrm{ch}\,x & \text{при } n \text{ четном},\\ \mathrm{sh}\,x & \text{при } n \text{ нечетном}.\end{cases}$

Правила дифференцирования. Если u, v — функции аргумента x, по которому производится дифференцирование, то:

1) $(u\pm v)'=u'\pm v'$ (*производная суммы*); $(u\pm v)^{(n)}=u^{(n)}\pm v^{(n)}$;
2) $(uv)'=u'v+uv'$ (*производная произведения*);

$$(uv)^{(n)}=u^{(n)}v+\binom{n}{1}u^{(n-1)}v'+\binom{n}{2}u^{(n-2)}v''+\ldots+uv^{(n)};$$

в частности, если c — постоянная, то $(cu)'=cu'$; $(cu)^{(n)}=cu^{(n)}$.

3) $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{vu' - uv'}{v^2}$ (*производная частного*);

4) $(u^v)' = vu^{v-1}u' + u^v \ln u \cdot v'$ (*производная общей показательной функции*);

5) если $y = f(u)$ и $u = \varphi(x)$, то $\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}$ (*правило дифференцирования функции от функции*).

В более общем случае, если $y = f(u)$, $u = \varphi(v)$, $v = \psi(x)$, то $\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dv} \cdot \frac{dv}{dx}$ и т. д.

6) Если переменная y задана как функция аргумента x неявно уравнением $F(x, y) = 0$, то ее производные могут быть найдены с помощью частных производных (определение частных производных см. стр. 94):

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{F'_x}{F'_y}; \quad \frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{F''_{xx}(F'_y)^2 - 2F''_{xy}F'_xF'_y + F''_{yy}(F'_x)^2}{F''_{yy}(F'_y)^2}.$$

7) Если зависимость между y и x дана в *параметрической форме* $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$, то

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y'_t}{x'_t}, \quad \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{y''_{tt}x'_t - x''_{tt}y'_t}{(x'_t)^3}.$$

8) Если равенство $y = f(x)$ рассматривать как определяющее неявно функцию $x = \varphi(y)$, то f и φ — символы двух *взаимно обратных* функций. Производные таких функций связаны между собой соотношением $\varphi'(y) = \frac{1}{f'(x)}$.

Основные теоремы дифференциального исчисления. *Теорема Ролля.* Если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$, дифференцируема в интервале (a, b) и $f(a) = f(b)$, то найдется в этом интервале по крайней мере одна точка $x = c$, в которой $f'(c) = 0$ [касательная к графику функции в точке $x = c$ параллельна оси X (рис. 1-82)].

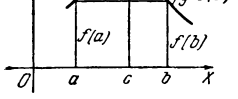


Рис. 1-82.

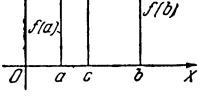


Рис. 1-83.

Теорема Лагранжа. Если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$ и дифференцируема в интервале (a, b), то в этом интервале найдется по крайней мере одна точка $x = c$ такая, что имеет место *формула конечных приращений*:

$$f(b) - f(a) = (b - a) f'(c)$$

[касательная к кривой $y = f(x)$ в точке с абсциссой $x = c$ параллельна хорде, соединяющей точки с абсциссами $x = a$ и $x = b$ (рис. 1-83)].

Теорема Коши. Если функции $f(x)$ и $\varphi(x)$ непрерывны на отрезке $[a, b]$ и дифференцируемы в интервале (a, b), причем ни в одной точке этого интервала $f'(x)$ и $\varphi'(x)$ не равны нулю одновременно и $\varphi(a) \neq \varphi(b)$, то в этом интервале найдется по крайней мере одна точка $x=c$, для которой $\dfrac{f(b)-f(a)}{\varphi(b)-\varphi(a)} = \dfrac{f'(c)}{\varphi'(c)}$.

Возрастание и убывание функций. Если для любых точек x_1 и x_2 интервала (a, b) из неравенства $x_1 < x_2$ следует, что $f(x_1) < f(x_2)$, то функция $f(x)$ называется в этом интервале *возрастающей*. Если из неравенства $x_1 < x_2$ следует $f(x_1) > f(x_2)$, то функция называется *убывающей*.

Функция называется *монотонной* в интервале, если она в этом интервале возрастает (*монотонно возрастающая функция*) или убывает (*монотонно убывающая функция*).

Для того чтобы функция $f(x)$ в некотором интервале возрастала (убывала), достаточно, чтобы во всех точках этого интервала $f'(x) > 0$ [соответственно $f'(x) < 0$].

Максимум и минимум. Число x_0, изображаемое точкой на оси X, называется *точкой максимума* (*точкой минимума*) функции $f(x)$, если существует такая окрестность этой точки, что для любой точки x этой окрестности ($x \neq x_0$) имеет место неравенство $f(x_0) > f(x)$ [соответственно $f(x_0) < f(x)$].

Значение функции в точке максимума (минимума) называется *максимумом* (*минимумом*) функции.

Общее название для максимума и минимума — *экстремум*.

В точке экстремума производная данной функции $f'(x)$ либо равна нулю (рис. 1-84, *а*), либо не существует (рис. 1-84, *б*) (*необходимое*

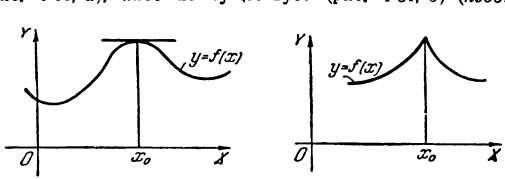


Рис. 1-84.

условие экстремума). Если x_0 — корень уравнения $f'(x)=0$ [или если $f'(x_0)$ не существует] и имеется такая окрестность точки x_0, что во всех точках этой окрестности слева от x_0 производная $f'(x)$ имеет один знак, а во всех точках справа от x_0 — противоположный знак, то точка x_0 является точкой экстремума (*достаточное условие*). При этом изменение знака (слева направо) с «+» на «—» соответствует точке максимума, а с «—» на «+» — точке минимума.

Другое достаточное условие: если $f'(x_0)=0$ и $f''(x_0) < 0$, то x_0 — точка максимума; если $f'(x_0)=0$ и $f''(x_0) > 0$, то x_0 — точка минимума.

§ 1-9. Функции многих переменных

Основные понятия. Функцией переменных $x, y, z, \ldots$ называется такая величина u [обозначение: $u=f(x, y, z, \ldots)$], которая принимает определенное значение, когда даны значения не зависящих друг от друга аргументов $x, y, z, \ldots$ Совокупность этих значений аргументов определяет *область существования функции*.

Если функция зависит от двух аргументов: $z=f(x, y)$, то геометрически она может быть интерпретирована при помощи поверхности, уравнение которой $z=f(x, y)$ (стр. 76). Каждая пара значений аргументов (x, y) может быть изображена при помощи точки $M(x, y)$ плоскости XY, и функцию двух переменных можно рассматривать как *функцию точки* в плоскости XY: $z=f(M)$; область существования такой функции — некоторая область в плоскости XY.

Пример. Область существования функции $z=\sqrt{1-x^2-y^2}$ есть круг $x^2+y^2\leqslant 1$.

В качестве окрестности точки (x_0, y_0) принято брать либо прямоугольник с центром в этой точке и сторонами, параллельными координатным осям (т. е. совокупность значений x и y, удовлетворяющих неравенствам $|x-x_0|\leqslant h$, $|y-y_0|\leqslant k$, где $2h$ и $2k$ — длины сторон прямоугольника), либо круг с центром в данной точке $[(x-x_0)^2+(y-y_0)^2\leqslant\rho^2$, где ρ — радиус круга].

Число c называется *пределом функции* $f(x, y)$ при x стремящемся к a и y стремящемся к b, если, как бы мало ни было положительное число δ, к нему можно подобрать столь малые положительные числа h и k, что для всех значений x и y $(x\neq a,\ y\neq b)$, удовлетворяющих условиям $|x-a|<h$ и $|y-b|<k$, имеет место неравенство $|f(x, y)-c|<\delta$.

Обозначение: $\lim\limits_{\substack{x\to a\\ y\to b}} f(x, y)=c$.

Подобным образом определяется понятие предела для функции любого числа аргументов.

Смысл символов: $\lim\limits_{\substack{x\to\infty\\ y\to b}} f(x, y)=c$, $\lim\limits_{\substack{x\to a\\ y\to b}} f(x, y)=\infty$, $\lim\limits_{\substack{x\to\infty\\ y\to b}} f(x, y)=\infty$

и т. д. аналогичен смыслу соответствующих символов для функции одного аргумента (стр. 85).

Функция $f(x, y)$ называется *непрерывной в точке* (x_0, y_0), если

$$\lim_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x, y)=f(x_0, y_0).$$

Функция, непрерывная во всех точках некоторой области, называется *непрерывной в* этой *области*.

Производные и дифференциалы. *Частной производной по аргументу* x функции $u=f(x, y, z, \ldots)$ называется производная этой функции, вычисленная в предположении, что все аргументы, кроме x, постоянны:

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x, y, z, \ldots)-f(x, y, z, \ldots)}{\Delta x}.$$

Обозначения частной производной по x: $\frac{du}{dx}$, $\frac{\partial f}{\partial x}$, f'_x, $\frac{\partial}{\partial x}f(x, y, z, \ldots)$.

Аналогичным образом определяются и обозначаются частные производные по другим аргументам.

Для функции $z=f(x, y)$ частная производная $\frac{\partial z}{\partial x}=\operatorname{tg}\alpha$, где α — угол между касательной в данной точке поверхности $z=f(x, y)$ к сечению поверхности плоскостью, параллельной плоскости XZ, и положительным направлением оси X (рис. 1-85); аналогично $\frac{\partial z}{\partial y}=\operatorname{tg}\beta$.

Частные производные высших порядков определяются и обозначаются так: $\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)=\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}=f''_{xx}$, $\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)=\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}=f''_{xy}$ и т. д. В случае, когда подлежащие вычислению частные производные непрерывны, результат многократного дифференцирования не зависит от порядка дифференцирования; так, например, $f''_{xy}=f''_{yx}$.

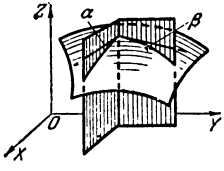


Рис. 1-85.

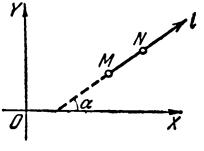


Рис. 1-86.

Производная в данном направлении. *Производной функции $f(x, y)$ в точке $M(x, y)$ по направлению l* (обозначение: $\frac{\partial f}{\partial l}$) называется предел $\frac{\partial f}{\partial l}=\lim\limits_{N\to M}\frac{f(N)-f(M)}{MN}$ (рис. 1-86).

Если α — угол между направлением l и положительным направлением оси X, то $\frac{\partial f}{\partial l}=\frac{\partial f}{\partial x}\cos\alpha+\frac{\partial f}{\partial y}\sin\alpha$.

Аналогично определяется производная функции $f(x, y, z)$ в данном направлении l в пространстве. Если при этом α, β, γ — углы, образованные направлением l с положительными направлениями соответствующих координатных осей, то $\frac{\partial f}{\partial l}=\frac{\partial f}{\partial x}\cos\alpha+\frac{\partial f}{\partial y}\cos\beta+\frac{\partial f}{\partial z}\cos\gamma$.

Дифференциал. *Полным дифференциалом* функции $z=f(x, y, \ldots)$, имеющей непрерывные частные производные $f'_x(x, y, \ldots)$, $f'_y(x, y, \ldots)$,..., называется выражение $dz=f'_x(x, y, \ldots)\Delta x+f'_y(x, y, \ldots)\Delta y+\ldots$, где Δx, Δy, ... — приращения аргументов.

Дифференциалы аргументов равны их приращениям $dx=\Delta x$, $dy=\Delta y$, ... и потому можно записать: $dz=f'_x\,dx+f'_y\,dy+\ldots$ Эта формула *инвариантна*, т. е. сохраняется и в том случае, если $x, y, \ldots$ не являются аргументами, а в свою очередь зависят от переменных $u, v, \ldots$.

Выражения $f'_x\,dx$, $f'_y\,dy$, ... называются *частными дифференциалами*: $d_x z=f'_x\,dx$, $d_y z=f'_y\,dy$, ...

Полный дифференциал функции dz отличается от *полного приращения* $\Delta z=f(x+\Delta x, y+\Delta y, \ldots)-f(x, y, \ldots)$ на бесконечно малую более высокого порядка, чем $\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}+\ldots$

Для того чтобы выражение $M(x, y)\,dx+N(x, y)\,dy$, где функции $M(x, y)$, $N(x, y)$ непрерывны вместе со своими частными производными первого порядка $\frac{\partial M}{\partial y}$ и $\frac{\partial N}{\partial x}$, было полным дифференциалом некоторой функции двух переменных x и y, необходимо и достаточно, чтобы имело место тождество $\frac{\partial M}{\partial y}=\frac{\partial N}{\partial x}$. Аналогично, выражение

$P(x, y, z)\,dx + Q(x, y, z)\,dy + R(x, y, z)\,dz$ является полным дифференциалом некоторой функции трех переменных x, y, z, если $\frac{\partial R}{\partial y} \equiv \frac{\partial Q}{\partial z}$; $\frac{\partial P}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial x}$; $\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}$.

Геометрически полный дифференциал dz функции двух переменных изображается при помощи приращения аппликаты касательной плоскости в данной точке поверхности $z = f(x, y)$, соответствующего приращениям аргументов dx и dy (рис. 1-87).

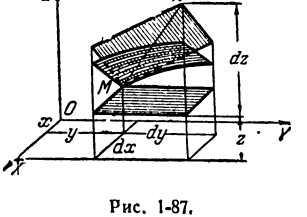


Рис. 1-87.

Формулы для *полных дифференциалов высших порядков* функции двух переменных:

$$d^2z = d(dz) = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\,dx^2 + 2\,\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}\,dx\,dy + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\,dy^2 = \left(\frac{\partial}{\partial x}\,dx + \frac{\partial}{\partial y}\,dy\right)^2 z; \ldots;$$

$$d^n z = d(d^{n-1}z) = \left(\frac{\partial}{\partial x}\,dx + \frac{\partial}{\partial y}\,dy\right)^n z$$

справедливы, если x и y — аргументы или если x и y зависят от аргументов $u, v, \ldots$ линейно.

Дифференцирование сложных и неявных функций. Если $z = f(x, y, \ldots)$ и $x = \varphi_1(u, v, \ldots)$; $y = \varphi_2(u, v, \ldots)$, ..., то

$$\frac{\partial z}{\partial u} = \frac{\partial f}{\partial x}\,\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial f}{\partial y}\,\frac{\partial y}{\partial u} + \ldots;$$

$$\frac{\partial z}{\partial v} = \frac{\partial f}{\partial x}\,\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial f}{\partial y}\,\frac{\partial y}{\partial v} + \ldots$$

В частности, если $x = \varphi_1(t)$, $y = \varphi_2(t)$, ..., то

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial x}\,\frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y}\,\frac{dy}{dt} + \ldots$$

Если равенство $f(x, y, z, \ldots) = 0$ определяет неявно z как функцию аргументов $x, y, \ldots$, то

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{f'_x}{f'_z}; \quad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{f'_y}{f'_z}; \ldots$$

Экстремум. Точка (x_0, y_0) называется *точкой экстремума* функции $f(x, y)$, если существует такая ее окрестность, что для всех точек (x, y) этой окрестности имеет место одно из неравенств $f(x_0, y_0) > f(x, y)$ (в случае *максимума*) или $f(x_0, y_0) < f(x, y)$ (в случае *минимума*). Геометрически это означает, что в точке максимума (минимума) $A(x_0, y_0)$ аппликата поверхности AP больше (соответственно меньше) аппликаты любой другой точки некоторой окрестности точки A (рис. 1-88).

Аналогично определяется экстремум для функции $f(x, y, \ldots)$ любого числа аргументов.

В точке экстремума частные производные функции по всем аргументам равны нулю (если эти производные существуют):

$$\frac{\partial f}{\partial x}=0; \quad \frac{\partial f}{\partial y}=0, \ldots$$

(*необходимые условия экстремума*).

В случае функции $f(x, y)$, зависящей от двух аргументов, способ определения точек экстремума следующий. Если (x_0, y_0) — одно из решений системы уравнений:

$$\frac{\partial f}{\partial x}=0; \quad \frac{\partial f}{\partial y}=0,$$

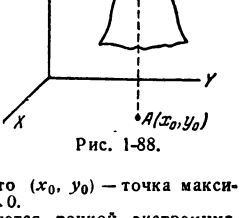


Рис. 1-88.

числа A, B, C равны

$$A=\frac{\partial^2 f(x_0, y_0)}{\partial x^2}, \quad B=\frac{\partial^2 f(x_0, y_0)}{\partial x\, \partial y}, \quad C=\frac{\partial^2 f(x_0, y_0)}{\partial y^2}$$

и дискриминант $\Delta = AC - B^2$ положителен, то (x_0, y_0) — точка максимума при $A<0$ и точка минимума при $A>0$.

В случае $\Delta<0$ точка (x_0, y_0) не является точкой экстремума. Случай $\Delta=0$ требует дальнейшего исследования.

Для отыскания экстремума функции n переменных $f(x, y, z, \ldots)$ в случаях, когда аргументы $x, y, z, \ldots$ связаны между собой при помощи k условий ($k<n$):

$$\varphi_1(x, y, z, \ldots)=0; \quad \varphi_2(x, y, z, \ldots)=0; \quad \varphi_k(x, y, z, \ldots)=0$$

(*условный экстремум*), следует составить вспомогательную функцию

$$F(x, y, z, \ldots)=f(x, y, z, \ldots)+\lambda_1\varphi_1(x, y, z, \ldots)+$$
$$+\lambda_2\varphi_2(x, y, z, \ldots)+\ldots+\lambda_k\varphi_k(x, y, z, \ldots)$$

($\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k$ — постоянные, так называемые *множители Лагранжа*).

Система $n+k$ уравнений с $n+k$ неизвестными ($x, y, z, \ldots; \lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k$):

$$\varphi_1=0, \quad \varphi_2=0, \ldots, \varphi_k=0,$$
$$\frac{\partial F}{\partial x}=0, \quad \frac{\partial F}{\partial y}=0, \quad \frac{\partial F}{\partial z}=0, \ldots,$$

дает *необходимые* (но не достаточные) *условия условного экстремума*

Глава 1-5

ИНТЕГРАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ

§ 1-10. Неопределенный интеграл

Определение. Функция $F(x)$ называется *первообразной* для функции $f(x)$, если $F'(x)=f(x)$. Если $F_1(x)$ и $F_2(x)$ — первообразные для одной и той же функции $f(x)$, то разность $F_1(x)-F_2(x)$ постоянна. Совокупность всех первообразных для некоторой функции $f(x)$ назы-

вается *неопределенным интегралом* от этой функции и обозначается $\int f(x)\,dx$. Здесь $f(x)$ — *подынтегральная функция*, $f(x)\,dx$ — *подынтегральное выражение*, x — *переменная интегрирования*.

Таким образом,

$$\int f(x)\,dx = F(x) + C,$$

где $F(x)$ — одна из первообразных функции $f(x)$, а C — *произвольная постоянная* (*постоянная интегрирования*).

Неопределенный интегралсвязан с определенным интегралом (см. стр. 111) равенством

$$\int f(x)\,dx = \int_a^x f(x)\,dx + C,$$

где C — произвольная постоянная (a также произвольно).

Интегрирование элементарных функций не всегда приводит к элементарным функциям. В таких случаях интеграл образует новую неэлементарную функцию, которая может быть вычислена с нужной точностью и которой иногда дается специальное наименование. Таковы, например, интегралы:

$$\int_0^x \frac{dx}{\ln x} = \operatorname{li} x \quad (\textit{интегральный логарифм}),$$

$$\int_0^x \frac{\sin x}{x}\,dx = \operatorname{si} x \quad (\textit{интегральный синус}),$$

$$\int_0^{\sin\varphi} \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}} = F(k, \varphi) \quad (\textit{эллиптический интеграл I-го рода})$$

Правила интегрирования функций

1) $\int [f_1(x) \pm f_2(x)]\,dx = \int f_1(x)\,dx \pm \int f_2(x)\,dx$ (правило интегрирования суммы);

2) $\int af(x)\,dx = a\int f(x)\,dx$ (правило вынесения постоянного множителя a за знак интеграла);

3) $\int u(x)\,dv(x) = u(x)\,v(x) - \int v(x)\,du(x)$ (правило *интегрирования по частям*);

4) если $x = \varphi(t)$, то $\int f(x)\,dx = \int f[\varphi(t)]\,\varphi'(t)\,dt$ (правило *замены переменной* или правило *подстановки*).

Таблица основных интегралов *)

1) $\int dx = x$; 2) $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1}$ $(n \neq -1)$;

3) $\int \frac{dx}{x} = \ln x$ **); 4) $\int \frac{dx}{x^2+a^2} = \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{x}{a}$;

5) $\int \frac{dx}{x^2-a^2} = \frac{1}{2a} \ln \frac{x-a}{x+a} = \begin{cases} -\frac{1}{a} \operatorname{Arth} \frac{x}{a}, & \text{если } |x| < a; \\ -\frac{1}{a} \operatorname{Arcth} \frac{x}{a}, & \text{если } |x| > a; \end{cases}$

6) $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \arcsin \frac{x}{a}$;

7) $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+a}} = \ln\left(x+\sqrt{x^2+a}\right) = \begin{cases} \operatorname{Arsh} \frac{x}{\sqrt{a}}, & \text{если } a > 0; \\ \operatorname{Arch} \frac{x}{\sqrt{-a}}, & \text{если } a < 0; \end{cases}$

8) $\int e^x dx = e^x$; 9) $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a}$;

10) $\int \sin x\, dx = -\cos x$; 11) $\int \cos x\, dx = \sin x$;

12) $\int \operatorname{tg} x\, dx = -\ln \cos x$; 13) $\int \operatorname{ctg} x\, dx = \ln \sin x$;

14) $\int \frac{dx}{\sin x} = \ln \operatorname{tg} \frac{x}{2}$; 15) $\int \frac{dx}{\cos x} = \ln \operatorname{tg}\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right)$;

16) $\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x$; 17) $\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x$;

18) $\int \operatorname{sh} x\, dx = \operatorname{ch} x$; 19) $\int \operatorname{ch} x\, dx = \operatorname{sh} x$;

20) $\int \operatorname{th} x\, dx = \ln \operatorname{ch} x$; 21) $\int \operatorname{cth} x\, dx = \ln \operatorname{sh} x$;

22) $\int \frac{dx}{\operatorname{sh}^2 x} = -\operatorname{cth} x$; 23) $\int \frac{dx}{\operatorname{ch}^2 x} = \operatorname{th} x$.

Интегрирование рациональных функций

1) $\int (ax+b)^n dx = \frac{1}{(n+1)a} (ax+b)^{n+1}$ $(n \neq -1)$;

2) $\int \frac{dx}{ax+b} = \frac{1}{a} \ln (ax+b)$;

---

*) Произвольные постоянные здесь и в дальнейших таблицах опущены.

**) Здесь и во всех других формулах, содержащих в правых частях логарифмические выражения, под $\ln f(x)$ следует понимать $\ln |f(x)|$; знак абсолютной величины везде опущен.

3) $\int \frac{dx}{(ax+b)^n} = -\frac{1}{(n-1)a(ax+b)^{n-1}}$ $(n \neq 1)$;

4) $\int \frac{dx}{ax^2+b} = \frac{1}{\sqrt{ab}} \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{a}{b}}\, x$ $(ab>0)$;

5) $\int \frac{dx}{ax^2-b} = \frac{1}{2\sqrt{ab}} \ln \frac{\sqrt{ab}-ax}{\sqrt{ab}+ax}$ $(ab>0)$;

6) $\int \frac{dx}{(x+a)(x+b)} = \frac{1}{a-b} \ln \frac{x+b}{x+a}$ $(a \neq b)$;

7) $$\int \frac{dx}{ax^2+bx+c} = \frac{1}{a} \int \frac{dx}{\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{4ac-b^2}{4a^2}} =$$

$$= \begin{cases} \frac{2}{\sqrt{4ac-b^2}} \operatorname{arctg} \frac{2ax+b}{\sqrt{4ac-b^2}}, & \text{если } 4ac-b^2>0; \\ \frac{1}{\sqrt{b^2-4ac}} \ln \frac{2ax+b-\sqrt{b^2-4ac}}{2ax+b+\sqrt{b^2-4ac}}, & \text{если } 4ac-b^2<0; \\ -\frac{2}{2ax+b}, & \text{если } 4ac-b^2=0; \end{cases}$$

8) $$\int \frac{Mx+N}{ax^2+bx+c}\,dx = \frac{M}{2a} \ln(ax^2+bx+c) + \frac{2aN-Mb}{2a} \int \frac{dx}{ax^2+bx+c};$$

9) *) $$\int \frac{dx}{(ax^2+bx+c)^n} =$$

$$= \frac{2ax+b}{(n-1)(4ac-b^2)(ax^2+bx+c)^{n-1}} + \frac{2(2n-3)a}{(n-1)(4ac-b^2)} \int \frac{dx}{(ax^2+bx+c)^{n-1}} \quad (n \neq 1);$$

можно также подстановкой $x+\frac{b}{2a} = \frac{\sqrt{4ac-b^2}}{2a} \operatorname{tg} t$ $(4ac-b^2>0)$ свести к виду $\int \cos^{2(n-1)} t\,dt$ (стр. 106—107);

10) $$\int \frac{Mx+N}{(ax^2+bx+c)^n}\,dx =$$

$$= -\frac{M}{2(n-1)a(ax^2+bx+c)^{n-1}} + \frac{2aN-bM}{2a} \int \frac{dx}{(ax^2+bx+c)^n} \quad (n \neq 1).$$

Интегрирование рациональных дробей в общем случае. Неправильную рациональную дробь $\frac{P(x)}{Q(x)}$ можно представить в виде суммы

*) Для вычисления интеграла эта формула применяется $n-1$ раз *(рекуррентная формула)*.

некоторого многочлена $P_0(x)$ и правильной рациональной дроби $\frac{P_1(x)}{Q(x)}$ (см. стр. 13). Следовательно, $\int \frac{P(x)}{Q(x)}\,dx = \int P_0(x)\,dx + \int \frac{P_1(x)}{Q(x)}\,dx$.

Правильную рациональную дробь $\frac{P_1(x)}{Q(x)}$ можно разложить на сумму простейших дробей (см. стр. 14), которые интегрируются по формулам 2), 3), 7), 8), 9), 10) на стр. 99—100.

Интегрирование алгебраических иррациональностей

1) $\int \sqrt{ax+b}\,dx = \frac{2}{3a}(\sqrt{ax+b})^3$;

2) $\int \sqrt[n]{ax+b}\,dx = \frac{n}{(n+1)a}\left(\sqrt[n]{ax+b}\right)^{n+1}$;

3) $\int \left(\sqrt[n]{ax+b}\right)^m dx = \frac{n}{(n+m)a}\left(\sqrt[n]{ax+b}\right)^{n+m}$;

4) $\int \frac{dx}{\sqrt{ax+b}} = \frac{2}{a}\sqrt{ax+b}$;

5) $\int \frac{dx}{\sqrt[n]{ax+b}} = \frac{n}{(n-1)a}\left(\sqrt[n]{ax+b}\right)^{n-1}$;

6) $\int \frac{dx}{\left(\sqrt[n]{ax+b}\right)^m} = \frac{n}{(n-m)a}\left(\sqrt[n]{ax+b}\right)^{n-m}$;

7) $\int \frac{Mx+N}{\sqrt{ax+b}}\,dx = \frac{2}{3a^2}(3Na - 2Mb + Max)\sqrt{ax+b}$;

8) $\int \frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}} = \frac{1}{\sqrt{a}}\ln(2ax+b+2\sqrt{a}\sqrt{ax^2+bx+c})$,

если $a>0$;

$= \frac{1}{\sqrt{a}}\operatorname{Arsh}\frac{2ax+b}{\sqrt{4ac-b^2}}$,

если $a>0$ и $4ac-b^2>0$;

$= \frac{1}{\sqrt{a}}\operatorname{Arch}\frac{2ax+b}{\sqrt{b^2-4ac}}$,

если $a>0$ и $4ac-b^2<0$;

$= -\frac{1}{\sqrt{-a}}\arcsin\frac{2ax+b}{\sqrt{b^2-4ac}}$, если $a<0$;

9) $\int \frac{Mx+N}{\sqrt{ax^2+bx+c}}\,dx =$

$= \frac{M}{a}\sqrt{ax^2+bx+c} + \frac{2aN-Mb}{2a}\int \frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}$;

10) $$\int \frac{x^n dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}} = \frac{x^{n-1}\sqrt{ax^2+bx+c}}{na} -$$
$$- \frac{(n-1)c}{na} \int \frac{x^{n-2}dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}} - \frac{(2n-1)b}{2na} \int \frac{x^{n-1}dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}};$$

11) $$\int \sqrt{x^2+a^2}\, dx = \frac{x}{2}\sqrt{x^2+a^2} + \frac{a^2}{2} \ln(x+\sqrt{x^2+a^2}) =$$
$$= \frac{x}{2}\sqrt{x^2+a^2} + \frac{a^2}{2} \operatorname{Arsh} \frac{x}{a};$$

12) $$\int \sqrt{x^2-a^2}\, dx = \frac{x}{2}\sqrt{x^2-a^2} - \frac{a^2}{2} \ln(x+\sqrt{x^2-a^2}) =$$
$$= \frac{x}{2}\sqrt{x^2-a^2} - \frac{a^2}{2} \operatorname{Arch} \frac{x}{a};$$

13) $$\int \sqrt{a^2-x^2}\, dx = \frac{x}{2}\sqrt{a^2-x^2} + \frac{a^2}{2} \arcsin \frac{x}{a};$$

14) $$\int x\sqrt{x^2 \pm a^2}\, dx = \frac{1}{3}(x^2 \pm a^2)^{3/2};$$

15) $$\int x\sqrt{a^2-x^2}\, dx = -\frac{1}{3}(a^2-x^2)^{3/2};$$

16) $$\int x^2\sqrt{x^2 \pm a^2}\, dx = \frac{x}{4}\sqrt{(x^2 \pm a^2)^3} -$$
$$- \frac{a^2}{8}\left[x\sqrt{x^2 \pm a^2} + a^2 \ln\left(x+\sqrt{x^2 \pm a^2}\right)\right] =$$
$$= \frac{x}{4}\sqrt{(x^2 \pm a^2)^3} - \frac{a^2}{8}\left(x\sqrt{x^2 \pm a^2} + a^2 \operatorname{Arsh} \frac{x}{a}\right);$$

17) $$\int x^2\sqrt{a^2-x^2}\, dx = -\frac{x}{4}(a^2-x^2)^{3/2} +$$
$$+ \frac{a^2}{8}\left(x\sqrt{a^2-x^2} + a^2 \arcsin \frac{x}{a}\right);$$

18) $$\int \frac{\sqrt{x^2+a^2}}{x}\, dx = \sqrt{x^2+a^2} - a \ln \frac{a+\sqrt{x^2+a^2}}{x};$$

19) $$\int \frac{\sqrt{x^2-a^2}}{x}\, dx = \sqrt{x^2-a^2} - a \arccos \frac{a}{x};$$

20) $$\int \frac{\sqrt{a^2-x^2}}{x}\, dx = \sqrt{a^2-x^2} - a \ln \frac{a+\sqrt{a^2-x^2}}{x};$$

21) $$\int \sqrt{ax^2+bx+c}\, dx = \frac{2ax+b}{4a}\sqrt{ax^2+bx+c} +$$
$$+ \frac{4ac-b^2}{8a} \int \frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}};$$

можно также, положив $x+\frac{b}{2a}=t$, привести к одному из видов 11), 12) или 13);

22) $\int \frac{dx}{(x-\alpha)^n\sqrt{ax^2+bx+c}}$ приводится к виду (10) подстановкой $x-\alpha=\frac{1}{z}$;

23) $\int R\left\{x, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{m_1}{n_1}}, \ldots, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{m_p}{n_p}}\right\}dx$, или в частном случае ($c=0$; $d=1$):

$$\int R\left\{x, (ax+b)^{\frac{m_1}{n_1}}, \ldots, (ax+b)^{\frac{m_p}{n_p}}\right\}dx,$$

где R — рациональная функция от аргументов, обозначенных внутри фигурной скобки, а $m_1, m_2, \ldots, m_p$, $n_1, n_2, \ldots, n_p$ — целые числа, приводится к интегралу от рациональной дроби подстановкой $\frac{ax+b}{cx+d}=t^N$ (в указанном частном случае $ax+b=t^N$), где N — общее наименьшее кратное чисел $n_1, n_2, \ldots, n_p$.

Пример 1. $\int \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\frac{dx}{x}$. Полагая $\frac{1-x}{1+x}=t^2$, имеем: $x=\frac{1-t^2}{1+t^2}$ и $dx=\frac{-4t\,dt}{(1+t^2)^2}$, откуда $\int \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\frac{dx}{x}=\int \frac{-4t^2\,dt}{(1-t^2)(1+t^2)}$.

Разложив подынтегральное выражение на сумму простых дробей, получим:

$$-\frac{4t^2}{(1+t)(1-t)(1+t^2)}=-\frac{1}{1+t}-\frac{1}{1-t}+\frac{2}{1+t^2},$$ и далее,

$$\int \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\frac{dx}{x}=2\operatorname{arctg} t-\ln(1+t)+\ln(1-t)+C=$$

$$=2\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}+\ln\frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}}+C.$$

Пример 2. $\int \frac{dx}{\sqrt{1+x}+\sqrt[4]{1+x}}$. Полагая $1+x=t^6$, имеем: $dx=6t^5\,dt$; следовательно,

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1+x}+\sqrt[3]{1+x}}=6\int \frac{t^3\,dt}{t+1}=2t^3-3t^2+6t-6\ln(t+1)+C=$$

$$=2\sqrt{1+x}-3\sqrt[3]{1+x}+6\sqrt[6]{1+x}-6\ln\left(\sqrt[6]{1+x}+1\right)+C;$$

24) $\int R\left(x, \sqrt{ax^2+bx+c}\right)dx$, где R — рациональная функция от x и $\sqrt{ax^2+bx+c}$, приводится к интегралу от рациональной дроби одной из следующих трех подстановок (*подстановки Эйлера*):

а) $\sqrt{ax^2+bx+c}=t\pm x\sqrt{a}$ $\quad (a>0)$;

б) $\sqrt{ax^2+bx+c}=tx\pm\sqrt{c}$ $(c>0)$;

в) $\sqrt{ax^2+bx+c}=t(x-\alpha)$ $(4ac-b^2<0)$,

где α — один из корней трехчлена ax^2+bx+c.

$\int R(x,\sqrt{ax^2+bx+c})\,dx$ можно привести также к виду

$$\int R_1(\sin t,\ \cos t)\,dt$$

(стр. 107) при помощи *тригонометрических подстановок*:

$$x+\frac{b}{2a}=\begin{cases}\dfrac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\sin t;\\[2ex] \dfrac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\cos t\end{cases}\qquad x+\frac{b}{2a}=\begin{cases}\dfrac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\sec t;\\[2ex] \dfrac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\operatorname{cosec} t\end{cases}$$

$(a<0,\ 4ac-b^2<0)$; $(a>0;\ 4ac-b^2<0)$;

$$x+\frac{b}{2a}=\begin{cases}\dfrac{\sqrt{4ac-b^2}}{2a}\operatorname{tg} t;\\[2ex] \dfrac{\sqrt{4ac-b^2}}{2a}\operatorname{ctg} t\end{cases}\qquad (a>0,\ 4ac-b^2>0);$$

25) $\int x^m(ax^n+b)^p dx$ (интеграл от *биномиального дифференциала*) выражается через элементарные функции только при выполнении хотя бы одного из следующих условий *(условия Чебышева интегрируемости биномиального дифференциала)*:

а) p целое; б) $\dfrac{m+1}{n}$ целое; в) $\dfrac{m+1}{n}+p$ целое.

В первом случае, если $p>0$, получается сумма степенных интегралов; если же $p<0$, то подстановка $x=z^N$, где N — общий знаменатель дробей m и n, приводит к интегралу от рациональной функции.

Во втором случае полагают $ax^n+b=z^s$, где s — знаменатель дроби $p=\dfrac{r}{s}$.

В третьем случае применяют подстановку $ax^n+b=z^s x^n$.

Пример 1. $\int x^{1/3}(1+3x^{2/3})^{1/3}dx$. Здесь $\dfrac{m+1}{n}=2$, и следовательно, полагаем $1+3x^{2/3}=z^3$, откуда

$$x=\frac{(z^3-1)^{3/2}}{3\sqrt{3}},\quad dx=\frac{\sqrt{3}}{2}(z^3-1)^{1/2}z^2\,dz$$

и

$$\int x^{1/3}(1+3x^{2/3})^{1/3}dx=\frac{1}{2}\int z^3(z^3-1)\,dz=\frac{z^7}{14}-\frac{z^4}{8}+C=$$

$$=\frac{(1+3x^{2/3})^{7/3}}{14}-\frac{(1+3x^{2/3})^{4/3}}{8}+C.$$

Пример 2. $\int\dfrac{dx}{x^{11}\sqrt{1+x^4}}$. Здесь $\dfrac{m+1}{n}+p=-3$; положив $1+x^4=z^2x^4$, имеем: $x=\dfrac{1}{(z^2-1)^{1/4}}$, $dx=-\dfrac{z\,dz}{2(z^2-1)^{5/4}}$ и

$$\int \frac{dx}{x^{11}\sqrt{1+x^4}} = -\frac{1}{2}\int (z^2-1)^2\,dz = -\frac{z^5}{10}+\frac{z^3}{3}-\frac{z}{2}+C =$$
$$-\frac{1}{16}\sqrt{\left(\frac{1+x^4}{x^4}\right)^5}+\frac{1}{3}\sqrt{\left(\frac{1+x^4}{x^4}\right)^3}-\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1+x^4}{x^4}}+C.$$

Интегрирование тригонометрических функций

(m, n, p, q – целые положительные числа.)

1) $\int \sin^2 x\,dx = -\frac{1}{4}\sin 2x+\frac{1}{2}x;$

2) $\int \cos^2 x\,dx = \frac{1}{4}\sin 2x+\frac{1}{2}x;$

3) $\int \sin x\cos x\,dx = \frac{1}{2}\sin^2 x;$

4) $\int \sin mx\cos nx\,dx = -\frac{\cos(m+n)x}{2(m+n)}-\frac{\cos(m-n)x}{2(m-n)} \quad (m\neq n);$

5) $\int \sin mx\sin nx\,dx = \frac{\sin(m-n)x}{2(m-n)}-\frac{\sin(m+n)x}{2(m+n)} \quad (m\neq n);$

6) $\int \cos mx\cos nx\,dx = \frac{\sin(m-n)x}{2(m-n)}+\frac{\sin(m+n)x}{2(m+n)} \quad (m\neq n);$

7) $\int \sin(mx+\alpha)\sin(mx+\beta)\,dx =$

$$=\frac{1}{2m}[\cos(\beta-\alpha)mx-\sin(mx+\alpha)\cos(mx+\beta)];$$

8) $\int \cos(mx+\alpha)\cos(mx+\beta)\,dx = \frac{1}{2m}[\cos(\beta-\alpha)mx+$
$$+\sin(mx+\alpha)\cos(mx+\beta)];$$

9) $\int \sin(mx+\alpha)\cos(mx+\beta)\,dx = \frac{1}{2m}[\sin(\alpha-\beta)mx+$
$$+\sin(mx+\alpha)\sin(mx+\beta)];$$

10) $\int \sin(mx+\alpha)\sin(nx+\beta)\,dx = \frac{1}{2(m-n)}\sin[(m-n)x+\alpha-\beta]-$
$$-\frac{1}{2(m+n)}\sin[(m+n)x+\alpha+\beta];$$

11) $\int \cos(mx+\alpha)\cos(nx+\beta)\,dx = \frac{1}{2(m+n)}\sin[(m+n)x+\alpha+\beta]+$
$$+\frac{1}{2(m-n)}\sin[(m-n)x+\alpha-\beta];$$

12) $\int \sin(mx+\alpha)\cos(nx+\beta)\,dx = -\frac{1}{2(m+n)}\cos[(m+n)x+\alpha+\beta]-$
$$-\frac{1}{2(m-n)}\cos[(m-n)x+\alpha-\beta];$$

13) $\int \frac{dx}{1+\cos x} = \operatorname{tg}\frac{x}{2}$;

14) $\int \frac{dx}{1-\cos x} = -\operatorname{ctg}\frac{x}{2}$;

15) $\int \frac{dx}{a+b\cos x} =$

$$= \begin{cases} \frac{2}{\sqrt{a^2-b^2}} \operatorname{arctg}\left(\sqrt{\frac{a-b}{a+b}}\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right) & (\text{если } a^2 > b^2), \\ \frac{1}{\sqrt{b^2-a^2}} \ln\frac{b+a\cos x+\sqrt{b^2-a^2}\sin x}{a+b\cos x} = \\ = \frac{2}{\sqrt{b^2-a^2}} \operatorname{Arth}\left(\sqrt{\frac{b-a}{b+a}}\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right) \\ (\text{если } a^2 < b^2); \end{cases}$$

16) $\int \frac{\cos x\,dx}{a+b\cos x} = \frac{x}{b} - \frac{a}{b}\int \frac{dx}{a+b\cos x}$;

17) $\int \frac{\sin x\,dx}{a+b\cos x} = -\frac{1}{b}\ln(a+b\cos x)$;

18) $\int \sin^n x\,dx = -\frac{\cos x \sin^{n-1} x}{n} + \frac{n-1}{n}\int \sin^{n-2} x\,dx$;

19) $\int \cos^n x\,dx = \frac{\sin x \cos^{n-1} x}{n} + \frac{n-1}{n}\int \cos^{n-2} x\,dx$;

20) $\int \operatorname{tg}^n x\,dx = \frac{\operatorname{tg}^{n-1} x}{n-1} - \int \operatorname{tg}^{n-2} x\,dx$;

21) $\int \operatorname{ctg}^n x\,dx = \frac{\operatorname{ctg}^{n-1} x}{n-1} - \int \operatorname{ctg}^{n-2} x\,dx$;

22) $\int \frac{dx}{\sin^n x} = -\frac{\cos x}{(n-1)\sin^{n-1} x} + \frac{n-2}{n-1}\int \frac{dx}{\sin^{n-2} x}$;

23) $\int \frac{dx}{\cos^n x} = \frac{\sin x}{(n-1)\cos^{n-1} x} + \frac{n-2}{n-1}\int \frac{dx}{\cos^{n-2} x}$;

24) $\int \sin^p x \cos^q x\,dx = \frac{\sin^{p+1} x \cos^{q-1} x}{p+q} +$

$$+ \frac{q-1}{p+q}\int \sin^p x \cos^{q-2} x\,dx = -\frac{\sin^{p-1} x \cos^{q+1} x}{p+q} +$$

$$+ \frac{p-1}{p+q}\int \sin^{p-2} x \cos^q x\,dx;$$

25) $\int \sin^{-p} x \cos^q x\,dx = -\frac{\sin^{-p+1} x \cos^{q+1} x}{p-1} +$

$$+ \frac{p-q-2}{p-1}\int \sin^{-p+2} x \cos^q x\,dx;$$

26) $\int \sin^p x \cos^{-q} x\,dx = \frac{\sin^{p+1} x \cos^{-q+1} x}{q-1} + \frac{q-p-2}{q-1} \int \sin^p x \cos^{-q+2} x\,dx;$

27) $\int \sin^r x \cos^s x\,dx$ приводится к сумме степенных интегралов подстановкой $\sin x = z$, если $s>0$ и нечетное, и $\cos x = z$, если $r>0$ и нечетное.

Пример. $\int \frac{\sin^3 x\,dx}{\sqrt{\cos x}} = \int \frac{(1-\cos^2 x)\sin x\,dx}{\sqrt{\cos x}} = -\int \frac{1-z^2}{\sqrt{z}}\,dz =$

$$= -2z^{1/2} + \frac{2}{5} z^{5/2} + C = -2\cos^{1/2} x + \frac{2}{5}\cos^{5/2} x + C.$$

В частности, вместо формул 18), 19), 20), 21), 24), 25), 26), если n, p или q нечетные, удобнее употреблять указанную подстановку.

В случае, если оба числа r и s четные и положительные, можно понизить степень, применяя тождества:

$$\cos^2 x = \frac{1}{2} + \frac{\cos 2x}{2}, \quad \sin^2 x = \frac{1}{2} - \frac{\cos 2x}{2},$$

$$\sin x \cos x = \frac{1}{2} \sin 2x.$$

28) $\int \operatorname{tg}^r x \sec^n x\,dx$, $\int \operatorname{ctg}^r x \sec^n x\,dx$, $\int \operatorname{tg}^r x \operatorname{cosec}^n x\,dx$, $\int \operatorname{ctg}^r x \operatorname{cosec}^n dx$,

где $n>0$ и четное, а r — любое, приводятся к сумме степенных интегралов: первые два — подстановкой $\operatorname{tg} x = z$; вторые два — подстановкой $\operatorname{ctg} x = z$ (следует при этом учитывать тождества: $\sec^2 x = 1 + \operatorname{tg}^2 x$, $\operatorname{cosec}^2 x = 1 + \operatorname{ctg}^2 x$).

В частности, этим способом удобно вычислять интегралы 22) и 23) в случае, если n четное.

Пример. $\int \sqrt{\operatorname{ctg} x} \sec^4 x\,dx = \int \frac{1+\operatorname{tg}^2 x}{\sqrt{\operatorname{tg} x}} \sec^2 x\,dx =$

$$= \int \frac{1+z^2}{\sqrt{z}}\,dz = 2z^{1/2} + \frac{2}{5} z^{5/2} + C = 2\operatorname{tg}^{1/2} x + \frac{2}{5} \operatorname{tg}^{5/2} x + C.$$

29) $\int R(\sin x, \cos x)\,dx$, где подынтегральная функция R рациональна относительно $\sin x$ и $\cos x$, приводится к интегралу от рациональной дроби подстановкой $\operatorname{tg} \frac{x}{2} = z$; при этом

$$dx = \frac{2dz}{1+z^2}, \quad \sin x = \frac{2z}{1+z^2}, \quad \cos x = \frac{1-z^2}{1+z^2}.$$

Интегрирование гиперболических функций

1) $\int \operatorname{sh}^2 x\,dx = \frac{1}{2} \operatorname{sh} x \operatorname{ch} x - \frac{1}{2} x;$

2) $\int \operatorname{ch}^2 x\,dx = \frac{1}{2} \operatorname{sh} x \operatorname{ch} x + \frac{1}{2} x;$

3) $\int \operatorname{sh}^n x\,dx = \frac{1}{n}\operatorname{sh}^{n-1} x \operatorname{ch} x - \frac{n-1}{n}\int \operatorname{sh}^{n-2} x\,dx \quad (n>0)$;

4) $\int \operatorname{ch}^n x\,dx = \frac{1}{n}\operatorname{ch}^{n-1} x \operatorname{sh} x + \frac{n-1}{n}\int \operatorname{ch}^{n-2} x\,dx \quad (n>0)$;

5) $\int \frac{dx}{\operatorname{sh} x} = \ln \operatorname{th} \frac{x}{2}$; 6) $\int \frac{dx}{\operatorname{ch} x} = 2 \operatorname{arctg} e^x$;

7) $\int \frac{dx}{\operatorname{sh}^n x} = \frac{1}{1-n}\operatorname{sh}^{1-n} x \operatorname{ch} x - \frac{n-2}{n-1}\int \frac{dx}{\operatorname{sh}^{n-2} x} \quad (n>1)$;

8) $\int \frac{dx}{\operatorname{ch}^n x} = \frac{1}{n-1}\operatorname{ch}^{1-n} x \operatorname{sh} x + \frac{n-2}{n-1}\int \frac{dx}{\operatorname{ch}^{n-2} x} \quad (n>1)$;

9) $\int \operatorname{th}^2 x\,dx = x - \operatorname{th} x$;

10) $\int \operatorname{cth}^2 x\,dx = x - \operatorname{cth} x$;

11) $\int \operatorname{sh} ax \operatorname{sh} bx\,dx = \frac{1}{2(a+b)}\operatorname{sh}(a+b)x - \frac{1}{2(a-b)}\operatorname{sh}(a-b)x \quad (a^2 \neq b^2)$;

12) $\int \operatorname{ch} ax \operatorname{ch} bx\,dx = \frac{1}{2(a+b)}\operatorname{sh}(a+b)x + \frac{1}{2(a-b)}\operatorname{sh}(a-b)x \quad (a^2 \neq b^2)$;

13) $\int \operatorname{sh} ax \operatorname{ch} bx\,dx = \frac{1}{2(a+b)}\operatorname{ch}(a+b)x + \frac{1}{2(a-b)}\operatorname{ch}(a-b)x \quad (a^2 \neq b^2)$.

Интегрирование некоторых других трансцендентных функций

1) $\int \arcsin x\,dx = x \arcsin x + \sqrt{1-x^2}$;

2) $\int \arccos x\,dx = x \arccos x - \sqrt{1-x^2}$;

3) $\int \operatorname{arctg} x\,dx = x \operatorname{arctg} x - \frac{1}{2}\ln(1+x^2)$;

4) $\int \operatorname{arcctg} x\,dx = x \operatorname{arcctg} x + \frac{1}{2}\ln(1+x^2)$;

5) $\int x \arcsin x\,dx = \frac{1}{4}[(2x^2-1)\arcsin x + x\sqrt{1-x^2}]$;

6) $\int x \arccos x\,dx = \frac{1}{4}[(2x^2-1)\arccos x - x\sqrt{1-x^2}]$;

7) $\int x \operatorname{arctg} x\,dx = \frac{1}{2}[(x^2+1)\operatorname{arctg} x - x]$;

8) $\int x \operatorname{arcctg} x\,dx = \frac{1}{2}[(x^2+1)\operatorname{arcctg} x + x]$;

9) $\int x^n \arcsin x\,dx = \frac{1}{n+1}\left(x^{n+1}\arcsin x - \int \frac{x^{n+1}\,dx}{\sqrt{1-x^2}}\right)$;

10) $\int x^n \arccos x\,dx = \frac{1}{n+1}\left(x^{n+1}\arccos x + \int \frac{x^{n+1}\,dx}{\sqrt{1-x^2}}\right)$;

11) $\int x^n \operatorname{arctg} x\,dx = \frac{1}{n+1}\left(x^{n+1}\operatorname{arctg} x - \int \frac{x^{n+1}\,dx}{1+x^2}\right)$;

12) $\int x^n \operatorname{arcctg} x\,dx = \frac{1}{n+1}\left(x^{n+1}\operatorname{arcctg} x + \int \frac{x^{n+1}\,dx}{1+x^2}\right)$;

13) $\int \operatorname{Arsh} x\,dx = x\operatorname{Arsh} x - \sqrt{1+x^2}$;

14) $\int \operatorname{Arch} x\,dx = x\operatorname{Arch} x - \sqrt{x^2-1}$;

15) $\int \operatorname{Arth} x\,dx = x\operatorname{Arth} x + \frac{1}{2}\ln(1-x^2)$;

16) $\int x \operatorname{Arsh} x\,dx = \frac{1}{4}[(2x^2+1)\operatorname{Arsh} x - x\sqrt{1+x^2}]$;

17) $\int x \operatorname{Arch} x\,dx = \frac{1}{4}[(2x^2-1)\operatorname{Arch} x - x\sqrt{x^2-1}]$;

18) $\int \ln x\,dx = x\ln x - x$; 19) $\int (\ln x)^n\,dx = x(\ln x)^n - n\int (\ln x)^{n-1}\,dx$;

20) $\int x^n \ln x\,dx = x^{n+1}\left[\frac{\ln x}{n+1} - \frac{1}{(n+1)^2}\right]$;

21) $\int \frac{(\ln x)^n}{x}\,dx = \frac{(\ln x)^{n+1}}{n+1}$; 22) $\int \frac{dx}{x\ln x} = \ln\ln x$;

23) $\int \sin(\ln x)\,dx = \frac{x}{2}(\sin\ln x - \cos\ln x)$;

24) $\int \cos(\ln x)\,dx = \frac{x}{2}(\sin\ln x + \cos\ln x)$;

25) $\int x\sin ax\,dx = -\frac{1}{a}x\cos ax + \frac{1}{a^2}\sin ax$;

26) $\int x\cos ax\,dx = \frac{1}{a}x\sin ax - \frac{1}{a^2}\cos ax$;

27) $\int x^n \sin ax\,dx = -\frac{1}{a}x^n\cos ax + \frac{n}{a}\int x^{n-1}\cos ax\,dx$;

28) $\int x^n \cos ax\,dx = \frac{1}{a}x^n\sin ax - \frac{n}{a}\int x^{n-1}\sin ax\,dx$;

29) $\int x \operatorname{sh} ax\, dx = \frac{1}{a} x \operatorname{ch} ax - \frac{1}{a^2} \operatorname{sh} ax;$

30) $\int x \operatorname{ch} ax\, dx = \frac{1}{a} x \operatorname{sh} ax - \frac{1}{a^2} \operatorname{ch} ax;$

31) $\int x^n \operatorname{sh} ax\, dx = \frac{1}{a} x^n \operatorname{ch} ax - \frac{n}{a} \int x^{n-1} \operatorname{ch} ax\, dx;$

32) $\int x^n \operatorname{ch} ax\, dx = \frac{1}{a} x^n \operatorname{sh} ax - \frac{n}{a} \int x^{n-1} \operatorname{sh} ax\, dx;$

33) $\int x e^{ax} dx = \frac{e^{ax}}{a^2} (ax - 1);$

34) $\int x^n e^{ax} dx = \frac{1}{a} x^n e^{ax} - \frac{n}{a} \int x^{n-1} e^{ax} dx;$

35) $\int \frac{dx}{1 + e^{ax}} = \frac{1}{a} \ln \frac{e^{ax}}{1 + e^{ax}};$

36) $\int \frac{dx}{b + ce^{ax}} = \frac{x}{b} - \frac{1}{ab} \ln (b + ce^{ax});$

37) $\int \frac{e^{ax} dx}{b + ce^{ax}} = \frac{1}{ac} \ln (b + ce^{ax});$

38) $\int \frac{dx}{be^{ax} + ce^{-ax}} = \begin{cases} \frac{1}{a\sqrt{bc}} \operatorname{arctg}\left(e^{ax} \sqrt{\frac{b}{c}}\right) & (bc > 0); \\ \frac{1}{2a\sqrt{-bc}} \ln \frac{c + e^{ax}\sqrt{-bc}}{c - e^{ax}\sqrt{-bc}}; & (bc < 0); \end{cases}$

39) $\int \frac{xe^{ax} dx}{(1 + ax)^2} = \frac{e^{ax}}{a^2 (1 + ax)};$

40) $\int e^{ax} \sin (\omega x + \varphi) dx = \frac{e^{ax}}{a^2 + \omega^2} [a \sin (\omega x + \varphi) - \omega \cos (\omega x + \varphi)];$

41) $\int e^{ax} \cos (\omega x + \varphi) dx = \frac{e^{ax}}{a^2 + \omega^2} [a \cos (\omega x + \varphi) + \omega \sin (\omega x + \varphi)];$

42) $\int xe^{ax} \sin (\omega x + \varphi) dx = \frac{xe^{ax}}{a^2 + \omega^2} [a \sin (\omega x + \varphi) - \omega \cos (\omega x + \varphi)] -$

$$- \frac{e^{ax}}{(a^2 + \omega^2)^2} [(a^2 - \omega^2) \sin (\omega x + \varphi) - 2a\omega \cos (\omega x + \varphi)];$$

43) $\int xe^{ax} \cos (\omega x + \varphi) dx = \frac{xe^{ax}}{a^2 + \omega^2} [a \cos (\omega x + \varphi) + \omega \sin (\omega x + \varphi)] -$

$$- \frac{e^{ax}}{(a^2 + \omega^2)^2} [(a^2 - \omega^2) \cos (\omega x + \varphi) + 2a\omega \sin (\omega x + \varphi)];$$

44) $\int \operatorname{sh} ax \sin bx\, dx = \frac{1}{a^2 + b^2} (a \operatorname{ch} ax \sin bx - b \operatorname{sh} ax \cos bx);$

45) $\int \operatorname{ch} ax \cos bx\, dx = \frac{1}{a^2 + b^2} (a \operatorname{sh} ax \cos bx + b \operatorname{ch} ax \sin bx);$

46) $\int \operatorname{sh} ax \cos bx\, dx = \frac{1}{a^2+b^2}(a \operatorname{ch} ax \cos bx + b \operatorname{sh} ax \sin bx)$;

47) $\int \operatorname{ch} ax \sin bx\, dx = \frac{1}{a^2+b^2}(a \operatorname{sh} ax \sin bx - b \operatorname{ch} ax \cos bx)$.

§ 1-11. Определенный интеграл

Определение и геометрический смысл. Дана функция $f(x)$ на отрезке $[a, b]$. Числа $x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n$ выбираются так, что

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_{n-1} < x_n = b, \text{ если } b > a,$$

и

$$a = x_0 > x_1 > x_2 > \ldots > x_{n-1} > x_n = b, \text{ если } b < a.$$

Внутри или на границе каждого элементарного промежутка $[x_{i-1}, x_i]$ берется произвольное число ξ_i:

$$x_0 \leqslant \xi_1 \leqslant x_1,\ x_1 \leqslant \xi_2 \leqslant x_2, \ldots, x_{n-1} \leqslant \xi_n \leqslant x_n, \text{ если } b > a,$$

и

$$x_0 \geqslant \xi_1 \geqslant x_1,\ x_1 \geqslant \xi_2 \geqslant x_2, \ldots, x_{n-1} \geqslant \xi_n \geqslant x_n, \text{ если } b < a,$$

и составляется сумма $\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\,\Delta x_i$ *(интегральная сумма)*,

где $x_1 - x_0 = \Delta x_1$, $x_2 - x_1 = \Delta x_2, \ldots, x_n - x_{n-1} = \Delta x_n$.

Предел этой суммы, когда наибольшая из величин $|\Delta x_i|$ стремится к нулю (а следовательно, $n \to \infty$), называется *определенным интегралом* функции $f(x)$ в пределах от a до b:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\max|\Delta x_i| \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\,\Delta x_i.$$

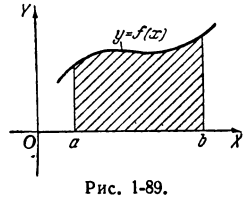


Рис. 1-89.

Если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$, то предел в правой части этого равенства существует и не зависит от выбора чисел $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}; \xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ *(теорема существования определенного интеграла)*.

Числа a и b называются соответственно *нижним* и *верхним пределами* интеграла, отрезок $[a, b]$ — *отрезком интегрирования*, $f(x)$ — *подынтегральной функцией*, $f(x)\,dx$ — *подынтегральным выражением*, x — *переменной интегрирования*.

Величина определенного интеграла не зависит от переменной интегрирования:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b f(t)\,dt.$$

Определенный интеграл с равными пределами, по определению, равен нулю:

$$\int_a^a f(x)\,dx = 0.$$

Если функция $f(x)$ знакоположительна внутри отрезка интегрирования, то $\int_a^b f(x)\,dx$ может быть геометрически изображен площадью криволинейной трапеции, ограниченной кривой $y = f(x)$, осью X и прямыми $x = a$ и $x = b$ (рис. 1-89).

Свойства определенного интеграла

1) $\int_a^b dx = b - a;$

2) $\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx;$

3) $\int_a^b f(x)\,dx + \int_b^c f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx;$

4) $\int_a^b k f(x)\,dx = k\int_a^b f(x)\,dx$ (k — постоянная);

5) $\int_a^b [f_1(x) \pm f_2(x)]\,dx = \int_a^b f_1(x)\,dx \pm \int_a^b f_2(x)\,dx.$

Теорема о среднем. Если $f(x)$ и $\varphi(x)$ непрерывны на отрезке $[a, b]$ и, кроме того, $\varphi(x)$ не изменяет знака на этом отрезке, то по крайней мере для одного числа ξ в интервале (a, b) имеет место равенство

$$\int_a^b f(x)\varphi(x)\,dx = f(\xi)\int_a^b \varphi(x)\,dx.$$

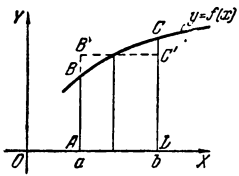


Рис. 1-90.

В частности, положив $\varphi(x) = 1$, имеем:

$$\int_a^b f(x)\,dx = (b - a) f(\xi).$$

Геометрически в этом частном случае теорема утверждает существование прямоугольника $AB'C'D$, равновеликого криволинейной трапеции $ABCD$ (рис. 1-90).

Производная определенного интеграла по верхнему пределу:

$$\frac{d}{dx}\int_a^x f(t)\,dt = f(x); \qquad \frac{d}{dx}\int_a^{\varphi(x)} f(t)\,dt = f[\varphi(x)]\,\varphi'(x).$$

Дифференцирование определенного интеграла по параметру:

1) $$\frac{\partial}{\partial\alpha}\int_a^b f(x,\alpha)\,dx = \int_a^b \frac{\partial f(x,\alpha)}{\partial\alpha}\,dx;$$

2) $$\frac{\partial}{\partial\alpha}\int_{x(\alpha)}^{X(\alpha)} f(x,\alpha)\,dx = \int_{x(\alpha)}^{X(\alpha)} \frac{\partial f(x,\alpha)}{\partial\alpha}\,dx + f[X(\alpha),\alpha]\frac{dX(\alpha)}{d\alpha} - f[x(\alpha),\alpha]\frac{dx(\alpha)}{d\alpha}.$$

Вычисление определенного интеграла. Если $F(x)$ — первообразная для функции $f(x)$ [т. е. $F'(x) = f(x)$], то

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(x)\Big|_a^b$$

(формула Ньютона—Лейбница), где

$$F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a).$$

Правило интегрирования по частям:

$$\int_a^b u(x)\,\frac{dv(x)}{dx}\,dx = u(x)\,v(x)\Big|_a^b - \int_a^b v(x)\,\frac{du(x)}{dx}\,dx.$$

Пример. $\int_0^1 xe^x\,dx = xe^x\Big|_0^1 - \int_0^1 e^x\,dx = 1.$

Правило замены переменной: если $x=\varphi(t)$, $a=\varphi(\alpha)$, $b=\varphi(b)$ и функция $\varphi(t)$ монотонна и непрерывна при $\alpha \leqslant t \leqslant \beta$, то

$$\int_a^b f(x)\,dx=\int_\alpha^\beta f[\varphi(t)]\,\varphi'(t)\,dt.$$

Пример. $\int_0^1 \sqrt{1-x^2}\,dx$. Полагая $x=\sin t$ $(t=\arcsin x)$, получаем:

$$\int_0^1 \sqrt{1-x^2}\,dx=\int_{\arcsin 0}^{\arcsin 1} \sqrt{1-\sin^2 t}\,\cos t\,dt=$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t\,dt=\frac{1}{2}\left(t+\frac{1}{2}\sin 2t\right)\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{\pi}{4}.$$

Несобственные интегралы. 1) *Интегралы с бесконечными пределами:*

$$\int_a^\infty f(x)\,dx=\lim_{b\to\infty}\int_a^b f(x)\,dx.$$

Если указанный в этом определении несобственного интеграла предел существует и конечен, интеграл называется *сходящимся*; в противном случае говорят, что интеграл *расходится*.

Аналогичным образом определяются интегралы вида

$$\int_{-\infty}^b f(x)\,dx \quad \text{и} \quad \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx.$$

Пример 1. $\int_1^\infty \frac{dx}{x^2}=\lim_{b\to\infty}\int_1^b \frac{dx}{x^2}=\lim_{b\to\infty}\left(-\frac{1}{b}+1\right)=1$; интеграл сходится.

Пример 2. $\int_1^\infty \frac{dx}{x}=\lim_{b\to\infty}\int_1^b \frac{dx}{x}=\lim_{b\to\infty}\ln b=\infty$; интеграл расходится.

2) *Интеграл от разрывной функции.* Если функция $f(x)$ непрерывна в промежутке $[a, b)$, а в точке $x=b$ обращается в ∞, то, по определению,

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\varepsilon \to 0} \int_a^{b-\varepsilon} f(x)\,dx \qquad (\varepsilon > 0).$$

Аналогичным образом определяется несобственный интеграл, если $f(x)$ непрерывна в промежутке $(a, b]$, а в точке $x=a$ обращается в ∞.

Случай, когда $f(x)$ разрывна в точке $x=c$, находящейся внутри интервала интегрирования, сводится к предыдущим:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx =$$

$$= \lim_{\varepsilon_1 \to 0} \int_a^{c-\varepsilon_1} f(x)\,dx + \lim_{\varepsilon_2 \to 0} \int_{c+\varepsilon_2}^b f(x)\,dx,$$

где $\varepsilon_1 > 0$ и $\varepsilon_2 > 0$.

Пример 1. $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}} = \lim_{\varepsilon \to 0} \int_\varepsilon^1 \frac{dx}{\sqrt{x}} = \lim_{\varepsilon \to 0} (2 - 2\sqrt{\varepsilon}) = 2$, интеграл сходится.

Пример 2. $\int_0^1 \frac{dx}{x} = \lim_{\varepsilon \to 0} \int_\varepsilon^1 \frac{dx}{x} = -\lim_{\varepsilon \to 0} \ln \varepsilon = \infty$; интеграл расходится.

Приложения к геометрии и механике. *Площадь криволинейной трапеции,* ограниченной графиком знакопостоянной внутри отрезка $[a, b]$ функции $y=f(x)$, осью X и прямыми $x=a$ и $x=b$ (см. рис. 1-89):

$$S = \int_a^b y\,dx = \int_a^b f(x)\,dx.$$

Если $f(x)$ знакопеременна, то формулу для вычисления площади следует применять отдельно для каждого отрезка, где $f(x)$ сохраняет знак, и сложить абсолютные значения полученных величин.

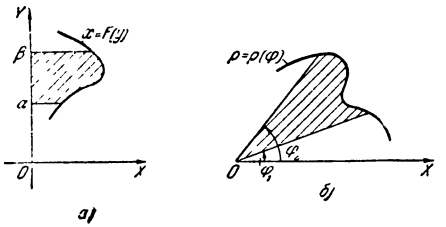
Если уравнения кривой даны в параметрической форме:

$$x = \varphi(t),\ y = \psi(t) \text{ и } a = \varphi(t_1),\quad b = \varphi(t_2),$$

то

$$S = \int_{t_1}^{t_2} \psi(t)\,\varphi'(t)\,dt.$$

Для трапеции, ограниченной графиком функции $x=F(y)$, осью Y и прямыми $y=\alpha$, $y=\beta$ (рис. 1-91, *а*), $S=\int\limits_{\alpha}^{\beta} x\,dy=\int\limits_{\alpha}^{\beta} F(y)\,dy$.



а) *б)*

Рис. 1-91.

Площадь криволинейного сектора, ограниченного кривой $\rho=\rho(\varphi)$ и лучами $\varphi=\varphi_1$, $\varphi=\varphi_2$ (рис. 1-91, *б*), $S=\frac{1}{2}\int\limits_{\varphi_1}^{\varphi_2}\rho^2\,d\varphi$.

Длина дуги плоской кривой, заданной уравнением в явной форме $y=f(x)$ или $x=F(y)$, или в параметрической форме $x=\varphi(t)$; $y=\psi(t)$:

$$L=\int\limits_{a}^{b}\sqrt{1+[f'(x)]^2}\,dx=\int\limits_{\alpha}^{\beta}\sqrt{1+[F'(y)]^2}\,dy=$$

$$=\int\limits_{t_1}^{t_2}\sqrt{[\varphi'(t)]^2+[\psi'(t)]^2}\,dt.$$

Здесь начальная и конечная точки дуги: $A(a, \alpha)$, $B(b, \beta)$ (рис. 1-92), а $t=t_1$, $t=t_2$ — значения параметра t, соответствующие точкам A и B.

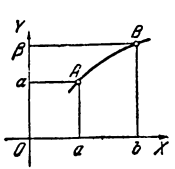


Рис. 1-92.

Если уравнение кривой задано в полярных координатах $\rho=\rho(\varphi)$, а значения полярного угла φ в начальной и конечной точках дуги $\varphi=\varphi_1$, $\varphi=\varphi_2$, то

$$L=\int\limits_{\varphi_1}^{\varphi_2}\sqrt{\rho^2+\left(\frac{d\rho}{d\varphi}\right)^2}\,d\varphi.$$

Площадь поверхности вращения, когда осью вращения служит ось X (рис. 1-93), а уравнение кривой, образующей поверхность вращения,

$y = f(x)$, или в параметрической форме $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$:

$$S = 2\pi \int_a^b f(x) \sqrt{1 + [f'(x)]^2}\, dx = 2\pi \int_{t_1}^{t_2} \psi(t) \sqrt{[\varphi'(t)]^2 + [\psi'(t)]^2}\, dt,$$

где $x = a$, $x = b$ — абсциссы начальной и конечной точек дуги. Соответствующие этим точкам значения параметра t: $t = t_1$, $t = t_2$.

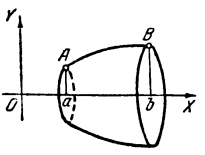


Рис. 1-93.

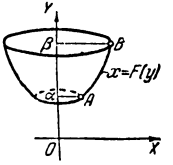


Рис. 1-94.

Когда осью вращения служит ось Y (рис. 1-94), а уравнение кривой, образующей поверхность вращения, $x = F(y)$, то

$$S = 2\pi \int_\alpha^\beta F(y) \sqrt{1 + [F'(y)]^2}\, dy,$$

где $y = \alpha$, $y = \beta$ — ординаты начальной и конечной точек дуги.

Объем тела вращения, когда осью вращения служит ось X (рис. 1-93):

$$V = \pi \int_a^b [f(x)]^2\, dx,$$

а когда осью вращения служит ось Y (рис. 1—94):

$$V = \pi \int_\alpha^\beta [F(y)]^2\, dy$$

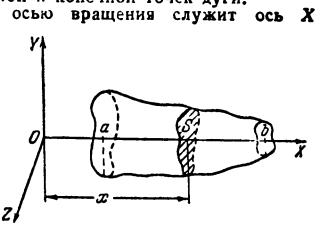


Рис. 1-95.

(обозначения те же, что в формулах для вычисления площади поверхности вращения).

Объем тела произвольной формы. Если тело заключено между плоскостями $x = a$ и $x = b$, перпендикулярными к оси X, и площадь сечения, перпендикулярного к этой оси, $S = S(x)$ дана как функция от x, где x — расстояние плоскости этого сечения от точки O (рис. 1-95), то объем тела вычисляется по формуле

$$V = \int_a^b S(x)\, dx.$$

Путь, пройденный точкой, движущейся со скоростью $v = v(t)$, за время от $t = \tau$ до $t = T$, равен:

$$S = \int_{\tau}^{T} v(t)\, dt.$$

Работа, производимая переменной силой $F(x)$, перемещающей точку по прямой линии от положения $x = a$ до положения $x = b$ (если направление силы совпадает с направлением оси X), равна:

$$A = \int_{a}^{b} F(x)\, dx.$$

Статические моменты, координаты центра тяжести и моменты инерции

а) *Дуга плоской кривой.* Обозначения: уравнение кривой $y = y(x)$ или $x = x(y)$, начальная точка дуги $A(a, \alpha)$, конечная точка $B(b, \beta)$ (рис. 1-92 на стр. 116).

Статические моменты: относительно оси X

$$S_x = \int_{a}^{b} y(x) \sqrt{1 + [y'(x)]^2}\, dx = \int_{\alpha}^{\beta} y \sqrt{1 + [x'(y)]^2}\, dy;$$

относительно оси Y

$$S_y = \int_{a}^{b} x \sqrt{1 + [y'(x)]^2}\, dx = \int_{\alpha}^{\beta} x(y) \sqrt{1 + [x'(y)]^2}\, dy.$$

Координаты центра тяжести:

$$x_c = \frac{S_y}{L}, \quad y_c = \frac{S_x}{L},$$

где L — длина дуги.

Моменты инерции: относительно оси X

$$I_x = \int_{a}^{b} [y(x)]^2 \sqrt{1 + [y'(x)]^2}\, dx =$$

$$= \int_{\alpha}^{\beta} y^2 \sqrt{1 + [x'(y)]^2}\, dy;$$

относительно оси Y

$$I_y = \int_{a}^{b} x^2 \sqrt{1 + [y'(x)]^2}\, dx = \int_{\alpha}^{\beta} [x(y)]^2 \sqrt{1 + [x'(y)]^2}\, dy;$$

относительно начала координат

$$I_0 = I_x + I_y = \int_a^b \{x^2 + [y(x)]^2\} \sqrt{1 + [y'(x)]^2}\, dx =$$

$$= \int_\alpha^\beta \{[x(y)]^2 + y^2\} \sqrt{1 + [x'(y)]^2}\, dy.$$

б) *Площадь плоской фигуры.* Обозначения: $x = a$ и $x = b$ — наименьшее и наибольшее значения x на границе фигуры; $y = \alpha$ и $y = \beta$ — наименьшее и наибольшее значения y на границе фигуры; $x(y)$ — длина

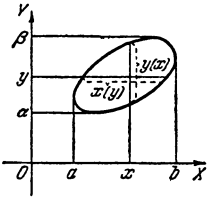


Рис. 1-96.

сечения, параллельного оси X, проведенного на расстоянии y от нее; $y(x)$ — длина сечения, параллельного оси Y и проведенного на расстоянии x от нее (рис. 1-96).

Статические моменты: относительно оси X

$$S_x = \int_\alpha^\beta y\, x(y)\, dy;$$

относительно оси Y

$$S_y = \int_a^b x\, y(x)\, dx.$$

Координаты центра тяжести:

$$x_c = \frac{S_y}{S};\ y_c = \frac{S_x}{S},$$

где S — площадь фигуры.

Моменты инерции: относительно оси X

$$I_x = \int_\alpha^\beta y^2\, x(y)\, dy;$$

относительно оси Y

$$I_y = \int_a^b x^2 y(x)\, dy;$$

относительно начала координат

$$I_0 = I_x + I_y.$$

1-я теорема Гюльдена. Если дуга плоской кривой длины l вращается около оси, не пересекающей эту дугу и лежащей с ней в одной плоскости, то площадь поверхности образованного при этом тела вращения вычисляется по формуле $S = 2\pi d \cdot l$, где d — расстояние центра тяжести дуги от оси вращения.

2-я теорема Гюльдена. Если плоская фигура площади S вращается около оси, не пересекающей эту фигуру и лежащей с ней в одной плоскости, то объем образованного при этом тела вращения вычисляется по формуле $v = 2\pi d \cdot S$, где d — расстояние центра тяжести площади фигуры от оси вращения.

Некоторые определенные интегралы

1) $\int_0^\infty \frac{dx}{ax^2 + b} = \frac{\pi}{2\sqrt{ab}}$ $(a > 0,\ b > 0)$;

2) $\int_0^\infty \frac{x^{a-1}}{1+x^b}\, dx = \frac{\pi}{b \sin \frac{a\pi}{b}}$ $(0 < a < b)$;

3) $\int_0^\infty \frac{\sin ax\, dx}{x} = \frac{\pi}{2}$ $(a > 0)$;

4) $\int_0^\infty \frac{\sin x}{\sqrt{x}}\, dx = \sqrt{\frac{\pi}{2}}$;

5) $\int_0^\infty \frac{\cos x}{\sqrt{x}}\, dx = \sqrt{\frac{\pi}{2}}$;

6) $\int_0^\infty \sin x^2\, dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{2}}$;

7) $\int_0^\infty \cos x^2\, dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{2}}$;

8) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n+1} x\, dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2n+1} x\, dx = \frac{2 \cdot 4 \cdot 6 \ldots 2n}{3 \cdot 5 \cdot 7 \ldots (2n+1)}$ ($n > 0$ и целое);

9) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n} x\, dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2n} x\, dx = \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \ldots (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \ldots 2n} \frac{\pi}{2}$ ($n > 0$ и целое);

10) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n+1}x \cos^{2m+1} x\, dx = \frac{m!n!}{2(m+n+1)!}$

($m > 0$, $n > 0$, m и n — целые);

11) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2\alpha+1} x \cos^{2\beta+1} x\, dx = \frac{\Gamma(\alpha+1)\,\Gamma(\beta+1)}{2\Gamma(\alpha+\beta+2)}$

(определение функции Γ см. на стр. 122);

12) $\int_0^{\infty} e^{-x}\, dx = 1;$

13) $\int_0^{\infty} e^{-x^2}\, dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2};$

14) $\int_0^{\infty} x^n e^{-x}\, dx = n!$

($n > 0$ и целое);

15) $\int_0^{\infty} e^{-ax} \sin bx\, dx = \frac{b}{a^2+b^2};$

16) $\int_0^{\infty} e^{-ax} \cos bx\, dx = \frac{a}{a^2+b^2};$

17) $\int_0^{\infty} e^{-a^2x^2} \cos bx\, dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \frac{e^{-\frac{b^2}{4a^2}}}{a}$ (при $a > 0$);

18) $\int_0^1 \frac{\ln x\, dx}{x-1} = \frac{\pi^2}{6};$

19) $\int_0^1 \frac{\ln x\, dx}{x+1} = -\frac{\pi^2}{12}.$

Некоторые неэлементарные функции, определяемые интегралами

1) $\int\limits_0^x \frac{\sin x\,dx}{x} = \mathrm{Si}\,x = x - \frac{x^3}{3\cdot 3!} + \frac{x^5}{5\cdot 5!} - \frac{x^7}{7\cdot 7!} + \ldots$ *(интегральный синус)*;

2) $-\int\limits_x^\infty \frac{\cos x\,dx}{x} = \mathrm{Ci}\,x = C + \ln x - \frac{x^2}{2\cdot 2!} + \frac{x^4}{4\cdot 4!} - \frac{x^6}{6\cdot 6!} + \ldots$ *(интегральный косинус)*, где $C = 0{,}5772\ldots$ *— эйлерова постоянная*, $x > 0$;

3) $\int\limits_0^x \frac{dx}{\ln x} = \mathrm{li}\,x = C + \ln(-\ln x) + \frac{\ln^2 x}{2\cdot 2!} + \frac{\ln^3 x}{3\cdot 3!} + \ldots \quad (0 < x < 1)$

(интегральный логарифм), где C — эйлерова постоянная;

4) $\int\limits_0^x e^{-ax^2}\,dx$ приводится к *интегралу вероятности* (см. таблицу на стр. 124—125) подстановкой $x = \frac{t}{\sqrt{2a}}$.

Эллиптические интегралы интеграл 1-го рода (см. таблицу на стр. 123)

5) $\int\limits_0^{\sin\varphi} \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}} = \int\limits_0^{\varphi} \frac{d\theta}{\sqrt{1-k^2\sin^2\theta}} = F(k, \varphi)$;

интеграл 2-го рода (см. таблицу на стр. 123)

6) $\int\limits_0^{\sin\varphi} \sqrt{\frac{1-k^2x^2}{1-x^2}}\,dx = \int\limits_0^{\varphi} \sqrt{1-k^2\sin^2\theta}\,d\theta = E(k, \varphi)$.

Эйлеровы интегралы· интеграл 1-го рода

7) $\int\limits_0^1 x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1}\,dx = B(\alpha, \beta)$;

интеграл 2-го рода (гамма-функция) (см. таблицу на стр. 126)

8) $\int\limits_0^\infty x^{t-1}e^{-x}\,dx = \Gamma(t)$.

Эйлеровы интегралы 1-го и 2-го рода связаны соотношением $B(\alpha, \beta) = \frac{\Gamma(\alpha)\,\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)}$.

Основные свойства функции $\Gamma(x)$: $\Gamma(1) = 1$, $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$, $1(n+1) = n!$, если $n > 0$ и целое; $\Gamma(-n) = \pm\infty$ $(n = 0, 1, 2, 3, \ldots)$.

Эллиптические интегралы 1-го рода: $F(k, \varphi)$, $k = \sin \alpha$

φ \ α	0°	10°	20°	30°	40°	50°	60°	70°	80°	90°
0°	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
10	0,1745	0,1746	0,1746	0,1748	0,1749	0,1751	0,1752	0,1753	0,1754	0,1754
20	0,3491	0,3493	0,3499	0,3508	0,3520	0,3533	0,3545	0,3555	0,3561	0,3564
30	0,5236	0,5243	0,5263	0,5294	0,5334	0,5379	0,5422	0,5459	0,5484	0,5493
40	0,6981	0,6997	0,7043	0,7116	0,7213	0,7323	0,7436	0,7535	0,7604	0,7629
50	0,8727	0,8756	0,8842	0,8982	0,9173	0,9401	0,9647	0,9876	1,0044	1,0107
60	1,0472	1,0519	1,0660	1,0896	1,1226	1,1643	1,2123	1,2619	1,3014	1,3170
70	1,2217	1,2286	1,2495	1,2853	1,3372	1,4068	1,4944	1,5959	1,6918	1,7354
80	1,3963	1,4056	1,4344	1,4846	1,5597	1,6660	1,8125	2,0119	2,2653	2,4362
90	1,5708	1,5828	1,6200	1,6858	1,7868	1,9356	2,1565	2,5046	3,1534	∞

Эллиптические интегралы 2-го рода: $E(k, \varphi)$, $k = \sin \alpha$

φ \ α	0°	10°	20°	30°	40°	50°	60°	70°	80°	90°
0°	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
10	0,1745	0,1745	0,1744	0,1743	0,1742	0,1740	0,1739	0,1738	0,1737	0,1736
20	0,3491	0,3489	0,3483	0,3473	0,3462	0,3450	0,3438	0,3429	0,3422	0,3420
30	0,5236	0,5229	0,5209	0,5179	0,5141	0,5100	0,5061	0,5029	0,5007	0,5000
40	0,6981	0,6966	0,6921	0,6851	0,6763	0,6667	0,6575	0,6497	0,6446	0,6428
50	0,8727	0,8698	0,8614	0,8483	0,8317	0,8134	0,7954	0,7801	0,7697	0,7660
60	1,0472	1,0426	1,0290	1,0076	0,9801	0,9493	0,9184	0,8914	0,8728	0,8660
70	1,2217	1,2149	1,1949	1,1632	1,1221	1,0750	1,0266	0,9830	0,9514	0,9397
80	1,3963	1,3870	1,3597	1,3161	1,2590	1,1926	1,1225	1,0565	1,0054	0,9848
90	1,5708	1,5589	1,5238	1,4675	1,3931	1,3055	1,2111	1,1184	1,0401	1,0000

Интеграл вероятности

x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$
0,00	0,0000	0,40	0,3108	0,80	0,5763
01	0,0080	41	0,3182	81	0,5821
02	0,0160	42	0,3255	82	0,5878
03	0,0239	43	0,3328	83	0,5935
04	0,0319	44	0,3401	84	0,5991
05	0,0399	45	0,3473	85	0,6047
06	0,0478	46	0,3545	86	0,6102
07	0,0558	47	0,3616	87	0,6157
08	0,0638	48	0,3688	88	0,6211
09	0,0717	49	0,3759	89	0,6265
0,10	0,0797	0,50	0,3829	0,90	0,6319
11	0,0876	51	0,3899	91	0,6372
12	0,0955	52	0,3969	92	0,6424
13	0,1034	53	0,4039	93	0,6476
14	0,1113	54	0,4108	94	0,6528
15	0,1192	55	0,4177	95	0,6579
16	0,1271	56	0,4245	96	0,6629
17	0,1350	57	0,4313	97	0,6680
18	0,1428	58	0,4381	98	0,6729
19	0,1507	59	0,4448	99	0,6778
0,20	0,1585	0,60	0,4515	1,00	0,6827
21	0,1663	61	0,4581	01	0,6875
22	0,1741	62	0,4647	02	0,6923
23	0,1819	63	0,4713	03	0,6970
24	0,1897	64	0,4778	04	0,7017
25	0,1974	65	0,4843	05	0,7063
26	0,2051	66	0,4907	06	0,7109
27	0,2128	67	0,4971	07	0,7154
28	0,2205	68	0,5035	08	0,7199
29	0,2282	69	0,5098	09	0,7243
0,30	0,2358	0,70	0,5161	1,10	0,7287
31	0,2434	71	0,5223	11	0,7330
32	0,2510	72	0,5285	12	0,7373
33	0,2586	73	0,5346	13	0,7415
34	0,2661	74	0,5407	14	0,7457
35	0,2737	75	0,5467	15	0,7499
36	0,2812	76	0,5527	16	0,7540
37	0,2886	77	0,5587	17	0,7580
38	0,2961	78	0,5646	18	0,7620
39	0,3035	79	0,5705	19	0,7660

$$\Phi(x) = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt$$

x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$
1,20	0,7699	1,60	0,8904	2,00	0,9545
21	0,7737	61	0,8926	05	0,9596
22	0,7775	62	0,8948	10	0,9643
23	0,7813	63	0,8969	15	0,9684
24	0,7850	64	0,8990	20	0,9722
25	0,7887	65	0,9011	25	0,9756
26	0,7923	66	0,9031	30	0,9786
27	0,7959	67	0,9051	35	0,9812
28	0,7995	68	0,9070	40	0,9836
29	0,8029	69	0,9090	45	0,9857
1,30	0,8064	1,70	0,9109	2,50	0,9876
31	0,8098	72	0,9146	60	0,9907
32	0,8132	74	0,9181	70	0,9931
33	0,8165	76	0,9216	80	0,9949
34	0,8198	78	0,9249	90	0,9963
35	0,8230				
36	0,8262			3,00	0,99730
37	0,8293	1,80	0,9281	10	0,99806
38	0,8324	82	0,9312	20	0,99863
39	0,8355	84	0,9342	30	0,99903
		86	0,9371	40	0,99933
1,40	0,8385	88	0,9399	50	0,99953
41	0,8415			60	0,99968
42	0,8444	1,90	0,9426	70	0,99978
43	0,8473	92	0,9451	80	0,99986
44	0,8501	94	0,9476	90	0,99990
45	0,8529	96	0,9500		
46	0,8557	98	0,9523	4,00	0,99994
47	0,8584				
48	0,8611				
49	0,8638				
1,50	0,8664				
51	0,8690				
52	0,8715				
53	0,8740				
54	0,8764				
55	0,8789				
56	0,8812				
57	0,8836				
58	0,8859				
59	0,8882				

Гамма-функция

x	$\Gamma(x)$	x	$\Gamma(x)$	x	$\Gamma(x)$	x	$\Gamma(x)$
1,00	1,00000	1,25	0,90640	1,50	0,88623	1,75	0,91906
01	0,99433	26	0,90440	51	0,88659	76	0,92137
02	0,98884	27	0,90250	52	0,88704	77	0,92376
03	0,98355	28	0,90072	53	0,88757	78	0,92623
04	0,97844	29	0,89904	54	0,88818	79	0,92877
1,05	0,97350	1,30	0,89747	1,55	0,88887	1,80	0,93138
06	0,96874	31	0,89600	56	0,88964	81	0,93408
07	0,96415	32	0,89464	57	0,89049	82	0,93685
08	0,95973	33	0,89338	58	0,89142	83	0,93969
09	0,95546	34	0,89222	59	0,89243	84	0,94261
1,10	0,95135	1,35	0,89115	1,60	0,89352	1,85	0,94561
11	0,94740	36	0,89018	61	0,89468	86	0,94869
12	0,94359	37	0,88931	62	0,89592	87	0,95184
13	0,93993	38	0,88854	63	0,89724	88	0,95507
14	0,93642	39	0,88785	64	0,89864	89	0,95838
1,15	0,93304	1,40	0,88726	1,65	0,90012	1,90	0,96177
16	0,92980	41	0,88676	66	0,90167	91	0,96523
17	0,92670	42	0,88636	67	0,90330	92	0,96877
18	0,92373	43	0,88604	68	0,90500	93	0,97240
19	0,92089	44	0,88581	69	0,90678	94	0,97610
1,20	0,91817	1,45	0,88566	1,70	0,90864	1,95	0,97988
21	0,91558	46	0,88560	71	0,91057	96	0,98374
22	0,91311	47	0,88563	72	0,91258	97	0,98768
23	0,91075	48	0,88575	73	0,91467	98	0,99171
24	0,90852	49	0,88595	74	0,91683	99	0,99581

§ 1-12. Кратные интегралы

Определения. Область S плоскости XY разбивается произвольно на элементарные части, площади которых обозначаются через ΔS_1, ΔS_2, . . . , ΔS_n (рис. 1-97); внутри или на границе каждой элементарной области с площадью ΔS_i выбирается произвольная точка $M_i(x_i, y_i)$ и составляется сумма (*интегральная сумма*) $\sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i)\,\Delta S_i$.

Предел, к которому стремится эта сумма, когда наибольший из диаметров *) элементарных областей стремится к нулю (если функция $f(x, y)$ непрерывна в области (S), то этот предел существует), называется *двойным интегралом* функции $f(x, y)$, распространенным на область S:

$$\iint\limits_S f(x, y)\, dS = \lim_{\Delta S_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i)\, \Delta S_i.$$

Если функция $f(x, y)$ во всех точках области S положительна, то $\iint\limits_S f(x, y)\, dS$ дает величину объема тела, ограниченного поверхностью $z = f(x, y)$, плоскостью XY и цилиндрической поверхностью с образующей, параллельной оси Z, пересекающей плоскость XY вдоль границы области S (рис. 1-98).

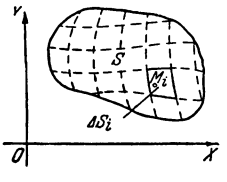


Рис. 1-97.

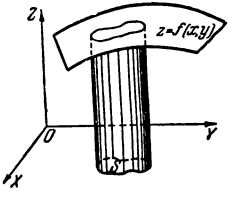


Рис. 1-98.

Тройным интегралом функции $f(x, y, z)$, распространенным на трехмерную область V, называется число, определяемое следующим образом.

Область V произвольно разбивается на элементарные части с объемами $\Delta V_1, \Delta V_2, \ldots, \Delta V_n$; внутри или на границе каждой элементарной области с объемом ΔV_i выбирается произвольная точка $M_i(x_i, y_i, z_i)$ и вычисляется предел суммы $\sum\limits_{i=1}^{n} f(x_i, y_i, z_i)\, \Delta V_i$ при условии, что наибольший из диаметров элементарных областей стремится к нулю:

$$\iiint\limits_V f(x, y, z)\, dV = \lim_{\Delta V_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i, z_i)\, \Delta V_i.$$

Вычисление двойного интеграла. Вычисление двойного интеграла сводится к последовательному вычислению двух определенных интегралов.

---

*) *Диаметром* фигуры называется наибольшее расстояние между двумя точками, находящимися на ее границе.

Вычисление двойного интеграла в декартовых координатах. *Элементарная площадь в декартовых координатах* выражается формулой $dS = dx\,dy$ (рис. 1-99). Вместо символа $\iint\limits_S f(x, y)\,dS$ обычно употребляют символ $\iint\limits_S f(x, y)\,dx\,dy$.

Если A и B — точки контура области S с наименьшим и наибольшим значениями x ($x = a$ и $x = b$), а $y = y_1(x)$ и $y = y_2(x)$ — уравнения частей этого контура AmB и AnB (рис. 1-100), то

$$\iint\limits_S f(x, y)\,dx\,dy = \int\limits_a^b dx \int\limits_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x, y)\,dy.$$

Первое (внутреннее) интегрирование производится при постоянном x.

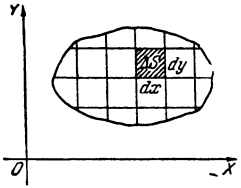


Рис. 1-99.

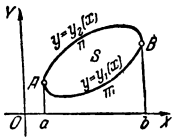


Рис. 1-100.

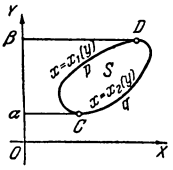


Рис. 1-101.

Если C и D — точки контура области S с наименьшим и наибольшим значениями y ($y = \alpha$ и $y = \beta$), а $x = x_1(y)$ и $x = x_2(y)$ — уравнения частей этого контура CpD и CqD (рис. 1-101), то

$$\iint\limits_S f(x, y)\,dx\,dy = \int\limits_\alpha^\beta dy \int\limits_{x_1(y)}^{x_2(y)} f(x, y)\,dx.$$

Первая из указанных формул применима в случае, когда любая прямая, параллельная оси Y (за исключением, быть может, конечного числа таких прямых), пересекает контур области S не более чем в двух точках; вторая — если любая прямая, параллельная оси X, пересекает контур области S не более чем в двух точках.

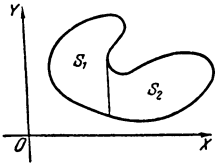


Рис. 1-102.

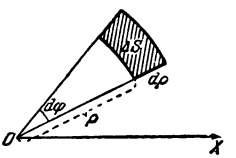


Рис. 1-103.

Если ни одно из указанных условий не выполнено, то следует область S разбить на две или несколько частей (рис. 1-102) и восполь-

зоваться равенством

$$\iint\limits_S f(x, y)\,dx\,dy = \iint\limits_{S_1} f(x, y)\,dx\,dy + \iint\limits_{S_2} f(x, y)\,dx\,dy.$$

Вычисление двойного интеграла в полярных координатах. *Элементарная площадь в полярных координатах:* $dS = \rho\,d\rho\,d\varphi$ (рис. 1-103).

Пользуясь формулами $x = \rho\cos\varphi$; $y = \rho\sin\varphi$, получаем: $f(x, y) = f(\rho\cos\varphi, \rho\sin\varphi) = F(\rho, \varphi)$ и $\iint\limits_S f(x, y)\,dx\,dy = \iint\limits_{(S)} F(\rho, \varphi)\,\rho\,d\rho\,d\varphi$.

Если A и B — точки контура области S с наименьшим и наибольшим значениями φ ($\varphi = \varphi_1$ и $\varphi = \varphi_2$), а $\rho = \rho_1(\varphi)$ и $\rho = \rho_2(\varphi)$ — уравнения частей AmB и AnB контура (рис. 1-104), то

$$\iint\limits_S F(\rho, \varphi)\,\rho\,d\rho\,d\varphi = \int\limits_{\varphi_1}^{\varphi_2} d\varphi \int\limits_{\rho_1(\varphi)}^{\rho_2(\varphi)} F(\rho, \varphi)\,\rho\,d\rho.$$

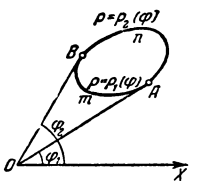


Рис. 1-104.

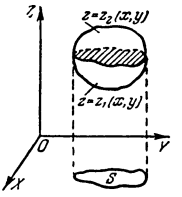


Рис. 1-105.

Вычисление тройного интеграла. а) В декартовых координатах

$$\iiint\limits_V f(x, y, z)\,dV = \iiint\limits_V f(x, y, z)\,dx\,dy\,dz =$$

$$= \iint\limits_S dx\,dy \int\limits_{z_1(x,\,y)}^{z_2(x,\,y)} f(x, y, z)\,dz =$$

$$= \int\limits_a^b dx \int\limits_{y_1(x)}^{y_2(x)} dy \int\limits_{z_1(x,\,y)}^{z_2(x,\,y)} f(x, y, z)\,dz,$$

где S — проекция области V на плоскость XY; $z = z_1(x, y)$ и $z = z_2(x, y)$ — уравнения нижней и верхней частей поверхности, ограничивающей область V (рис. 1-105).

ПРИЛОЖЕНИЯ КРАТНЫХ ИНТЕГРАЛОВ

1) Приложения двойных интегралов

Величина	Общая формула	В декартовых координатах	В полярных координатах
Площадь плоской фигуры	$\sigma = \iint\limits_S dS$	$\iint\limits_S dx\,dy$	$\iint\limits_S \rho\,d\varphi\,d\rho$
Площадь поверхности*)	$\sigma = \iint\limits_S \frac{dS}{\cos\gamma}$	$\iint\limits_S \sqrt{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}\,dx\,dy$	$\iint\limits_S \sqrt{\rho^2+\rho\left(\frac{\partial z}{\partial \rho}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial \varphi}\right)^2}\,d\varphi\,d\rho$
Объем тела**)	$V = \iint\limits_S z\,dS$	$\iint\limits_S z\,dx\,dy$	$\iint\limits_S z\rho\,d\varphi\,d\rho$

*) Здесь S — проекция поверхности на плоскость XY, γ — угол, образованный нормалью к элементу поверхности с осью Z (угол между элементом поверхности и плоскостью XY).

**) Имеется в виду объем тела, форма которого указана на рис. 1-105.

Продолжение

Величина	Общая формула	В декартовых координатах	В полярных координатах
Момент инерции плоской фигуры относительно оси X	$I_x = \iint\limits_S y^2\, dS$	$\iint\limits_S y^2\, dx\, dy$	$\iint\limits_S \rho^3 \sin^2\varphi\, d\varphi\, d\rho$
Момент инерции плоской фигуры относительно полюса O	$I_o = \iint\limits_S \rho^2\, dS$	$\iint\limits_S (x^2 + y^2)\, dx\, dy$	$\iint\limits_S \rho^3\, d\varphi\, d\rho$
Масса плоской фигуры с переменной плотностью δ	$M = \iint\limits_S \delta\, dS$	$\iint\limits_S \delta\, dx\, dy$	$\iint\limits_S \delta\rho\, d\varphi\, d\rho$
Координаты центра тяжести однородной плоской фигуры (σ — площадь фигуры)	$x_c = \dfrac{\iint\limits_S x\, dS}{\sigma}$ $y_c = \dfrac{\iint\limits_S y\, dS}{\sigma}$	$\dfrac{\iint\limits_S x\, dx\, dy}{\iint\limits_S dx\, dy}$ $\dfrac{\iint\limits_S y\, dx\, dy}{\iint\limits_S dx\, dy}$	$\dfrac{\iint\limits_S \rho^2 \cos\varphi\, d\varphi\, d\rho}{\iint\limits_S \rho\, d\varphi\, d\rho}$ $\dfrac{\iint\limits_S \rho^2 \sin\varphi\, d\varphi\, d\rho}{\iint\limits_S \rho\, d\varphi\, d\rho}$

2) Приложения тройных интегралов

Величина	Общая формула	В декартовых координатах	В цилиндрических координатах	В сферических координатах
Объем тела	$V = \iiint\limits_V dV$	$\iiint\limits_V dx\,dy\,dz$	$\iiint\limits_V \rho\,d\varphi\,d\rho\,dz$	$\iiint\limits_V r^2 \sin\theta\,d\varphi\,d\theta\,dr$
Момент инерции тела относительно оси OZ	$I_z = \iiint\limits_V \rho^2\,dV$	$\iiint\limits_V (x^2+y^2)\,dx\,dy\,dz$	$\iiint\limits_V \rho^3\,d\varphi\,d\rho\,dz$	$\iiint\limits_V r^4 \sin^3\theta\,d\varphi\,d\theta\,dr$
Момент инерции тела относительно полюса O	$I_0 = \iiint\limits_V r^2\,dV$	$\iiint\limits_V (x^2+y^2+z^2)\,dx\,dy\,dz$	$\iiint\limits_V (\rho^2+z^2)\rho\,d\varphi\,d\rho\,dz$	$\iiint\limits_V r^4 \sin\theta\,d\varphi\,d\theta\,dr$

Продолжение

Величина	Общая формула	В декартовых координатах	В цилиндрических координатах	В сферических координатах
Масса тела с переменной плотностью δ	$M = \iiint\limits_V \delta \, dV$	$\iiint\limits_V \delta \, dx \, dy \, dz$	$\iiint\limits_V \delta\rho \, d\varphi \, d\rho \, dz$	$\iiint\limits_V \delta r^2 \sin\theta \, d\varphi \, d\theta \, dr$
Координаты центра тяжести однородного тела (v — объем тела)	$x_c = \dfrac{\iiint\limits_V x \, dV}{v}$	$\dfrac{\iiint\limits_V x \, dx \, dy \, dz}{\iiint\limits_V dx \, dy \, dz}$		
	$y_c = \dfrac{\iiint\limits_V y \, dV}{v}$	$\dfrac{\iiint\limits_V y \, dx \, dy \, dz}{\iiint\limits_V dx \, dy \, dz}$		
	$z_c = \dfrac{\iiint\limits_V z \, dV}{v}$	$\dfrac{\iiint\limits_V z \, dx \, dy \, dz}{\iiint\limits_V dx \, dy \, dz}$		

б) В цилиндрических координатах (стр. 75):

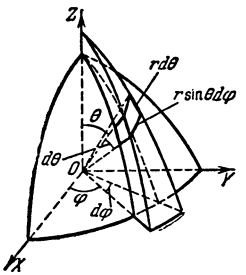


Рис. 1-106.

$$\iiint\limits_V f(x,y,z)\,dV = \iiint\limits_V F(\rho,\varphi,z)\,\rho\,d\varphi\,d\rho\,dz =$$

$$= \iint\limits_S \rho\,d\rho\,d\varphi \int\limits_{z_1(\rho,\varphi)}^{z_2(\rho,\varphi)} F(\rho,\varphi,z)\,dz =$$

$$= \int\limits_{\varphi_1}^{\varphi_2} d\varphi \int\limits_{\rho_1(\varphi)}^{\rho_2(\varphi)} \rho\,d\rho \int\limits_{z_1(\rho,\varphi)}^{z_2(\rho,\varphi)} F(\rho,\varphi,z)\,dz,$$

где S — проекция области V на плоскость XY, $z = z_1(\rho, \varphi)$ и $z = z_2(\rho, \varphi)$ — уравнения нижней и верхней частей поверхности, ограничивающей область V, и $F(\rho, \varphi, z) = f(\rho\cos\varphi, \rho\sin\varphi, z)$.

в) В сферических координатах (стр. 75) *элементарный объем* $dV = r^2 \sin\theta\,d\varphi\,d\theta\,dr$ (рис. 1-106) и

$$\iiint\limits_V f(x,y,z)\,dV = \iiint\limits_V F(r,\varphi,\theta)\,r^2\sin\theta\,d\varphi\,d\theta\,dr =$$

$$= \int\limits_{\varphi_1}^{\varphi_2} d\varphi \int\limits_{\theta_1(\varphi)}^{\theta_2(\varphi)} \sin\theta\,d\theta \int\limits_{r_1(\theta,\varphi)}^{r_2(\theta,\varphi)} F(r,\varphi,\theta)\,r^2\,dr,$$

где

$$F(r,\varphi,\theta) = f(r\sin\theta\cos\varphi,\ r\sin\theta\sin\varphi,\ r\cos\theta).$$

§ 1-13. Криволинейный интеграл

Определения. Вдоль дуги l (рис. 1-107) даны функции $P(x, y)$ и $Q(x, y)$; $A(a, \alpha)$ — начальная, а $B(b, \beta)$ — конечная точка дуги l; обозначив $a = x_0$; $b = x_n$; $\alpha = y_0$; $\beta = y_n$, делят дугу l на n элементарных частей точками $M_1(x_1, y_1)$; $M_2(x_2, y_2)$; ...; $M_{n-1}(x_{n-1}, y_{n-1})$ (нуме-

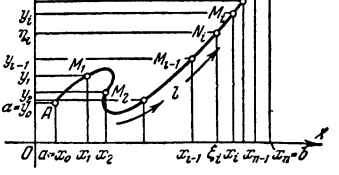


Рис. 1-107.

рация производится так, что точка M_i следует за точкой M_{i-1}, если двигаться по дуге от точки A к точке B). Внутри или на границе каждой элементарной дуги $M_{i-1}M_i$ выбирают произвольную точку $N_i(\xi_i, \eta_i)$ и составляют сумму

$$\sum_{i=1}^{n} [P(\xi_i, \eta_i)\,\Delta x_i + Q(\xi_i, \eta_i)\,\Delta y_i],$$

где $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$; $\Delta y_i = y_i - y_{i-1}$.

Предел, к которому стремится эта сумма, когда длина наибольшей из элементарных дуг стремится к нулю (а следовательно, $n \to \infty$), называется *криволинейным интегралом* выражения $P(x, y)\,dx + Q(x, y)\,dy$ вдоль дуги l:

$$\int_l P(x, y)\,dx + Q(x, y)\,dy = \lim_{\substack{\Delta x_i \to 0 \\ \Delta y_i \to 0}} \sum_{i=1}^{n} [P(\xi_i, \eta_i)\,\Delta x_i + Q(\xi_i, \eta_i)\,\Delta y_i].$$

Для существования криволинейного интеграла достаточно, чтобы функции $P(x, y)$ и $Q(x, y)$ были непрерывны вдоль дуги l, а дуга l была кусочно-гладкой *).

Если $P(x, y)$ и $Q(x, y)$ — проекции на координатные оси вектора силы $\mathbf{F}(x, y)$, действующей на материальную точку $M(x, y)$ в некоторой области (рис. 1-108), то

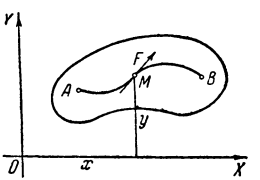


Рис. 1-108.

$$\int_l P(x, y)\,dx + Q(x, y)\,dy$$

выражает работу силы $\mathbf{F}$ при передвижении материальной точки M из положения A в положение B по дуге l, содержащейся в этой области.

Определение криволинейного интеграла

$$\int_l P(x, y, z)\,dx + Q(x, y, z)\,dy + R(x, y, z)\,dz$$

для дуги l пространственной кривой совершенно аналогично определению для дуги плоской кривой.

Криволинейный интеграл по замкнутому пути интегрирования C (*циркуляция*) обозначается символом $\oint_C P\,dx + Q\,dy$ или

$$\oint_C P\,dx + Q\,dy + R\,dz.$$

*) Дуга называется *кусочно-гладкой*, если она состоит из конечного числа непрерывных дуг с непрерывно вращающимися касательными.

Свойства криволинейного интеграла. 1. При изменении направления движения по дуге интеграл изменяет знак (рис. 1-109)

$$\int_{l'} P\,dx + Q\,dy = -\int_{l} P\,dx + Q\,dy$$

(дуга l' геометрически совпадает с дугой l, но начальная точка одной из них служит конечной для другой и наоборот).

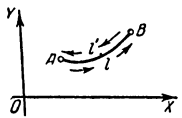


Рис. 1-109.

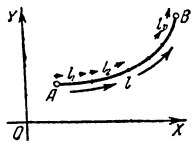


Рис. 1-110.

2. Если дуга l состоит из дуг $l_1, l_2, \ldots, l_p$, то

$$\int_{l} = \int_{l_1} + \int_{l_2} + \ldots + \int_{l_p}$$

(подынтегральное выражение одно и то же для всех интегралов) (рис. 1-110).

Вычисление криволинейного интеграла. Если плоская дуга l пересекается любой прямой, параллельной какой-либо координатной оси не более чем в одной точке, то ее уравнение может быть разрешено как относительно $x\,[x = x(y)]$, так и относительно $y\,[y = y(x)]$.

Если при этом $A(a, \alpha)$ — начальная, а $B(b, \beta)$ — конечная точки дуги, то справедлива, например, формула

$$\int_{l} P(x, y)\,dx + Q(x, y)\,dy = \int_{a}^{b} P[x, y(x)]\,dx + \int_{\alpha}^{\beta} Q[x(y), y]\,dy.$$

Если дуга l не удовлетворяет приведенному выше условию, но ее можно разбить на несколько частей, каждая из которых этому условию удовлетворяет, то указанную формулу можно применять к каждой части в отдельности и воспользоваться свойством 2 (см. выше).

Если уравнения дуги даны в параметрической форме $x = x(t)$, $y = y(t)$, а τ и T — значения параметра t, соответствующие точкам A и B, то

$$\int_{l} P(x, y)\,dx + Q(x, y)\,dy =$$

$$= \int_{\tau}^{T} \{P[x(t), y(t)]\,x'(t) + Q[x(t), y(t)]\,y'(t)\}\,dt.$$

Аналогичным образом для пространственной кривой $x = x(t)$, $y = y(t)$, $z = z(t)$:

$$\int_l P(x, y, z)\,dx + Q(x, y, z)\,dy + R(x, y, z)\,dz =$$

$$= \int_\tau^T \{P[x(t), y(t), z(t)]\,x'(t) + Q[x(t), y(t), z(t)]\,y'(t) +$$

$$+ R[x(t), y(t), z(t)]\,z'(t)\}\,dt.$$

Пример. Вычислить $\oint_C y\,dx - x\,dy$, где C — окружность радиуса r с центром в начале координат (направление обхода против движения часовой стрелки).

Уравнения окружности $x = r\cos t$; $y = r\sin t$ и, следовательно,

$$\int_C y\,dx - x\,dy = \int_0^{2\pi} [r\sin t\ (-r\sin t) - r\cos t\, r\cos t]\,dt = -2\pi r^2.$$

Связь между криволинейным и двойным интегралами. Если C — замкнутый контур, обходимый в положительном направлении (положительным направлением обхода замкнутого контура будем считать такое

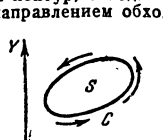


Рис. 1-111.

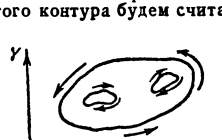


Рис. 1-112.

направление, при котором ограниченная контуром область остается слева), S — область, ограниченная контуром C (рис. 1-111), а функции $P(x, y)$ и $Q(x, y)$ непрерывны вместе со своими частными производными $\frac{\partial Q}{\partial x}$ и $\frac{\partial P}{\partial y}$ в области S, то

$$\oint_C P\,dx + Q\,dy = \iint_S \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dx\,dy$$

(формула Грина).

Если область S не односвязная *) и ее граница состоит из нескольких контуров, то под C в формуле Грина следует понимать совокупность всех этих контуров, причем направление обхода на каждом контуре выбирается так, чтобы область S находилась слева (рис. 1-112).

*) Конечная область S называется *односвязной*, если все точки, лежащие внутри любого замкнутого контура, проведенного в этой области, принадлежат области S.

Для того чтобы криволинейный интеграл $\int\limits_{AB} P(x, y)\,dx + Q(x, y)\,dy$, где функции $P(x, y)$ и $Q(x, y)$ и их частные производные непрерывны в области S, имел одно и то же значение для всех путей, лежащих в односвязной области S и идущих от точки $A(x_0, y_0)$ к точке $B(x_1, y_1)$, необходимо и достаточно, чтобы подынтегральное выражение $P(x, y)\,dx + Q(x, y)\,dy$ было полным дифференциалом, т. е. чтобы

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}.$$

В этом случае

$$\int\limits_l P(x, y)\,dx + Q(x, y)\,dy = U(x_1, y_1) - U(x_0, y_0),$$

где $dU(x, y) = P(x, y)\,dx + Q(x, y)\,dy$.

Независимость интеграла от пути интегрирования в области S равносильна равенству нулю интеграла по всякому замкнутому контуру, лежащему в этой области.

Если подынтегральное выражение представляет собой полный дифференциал, но внутри контура имеется особая точка, в которой нарушается непрерывность функций $P(x, y)$ или $Q(x, y)$ или их частных производных, то интеграл по такому контуру может оказаться не равным нулю, но в этом случае интеграл по всякому замкнутому контуру, окружающему одно и то же число раз одну и ту же особую точку, сохраняет постоянное значение.

Пример. Вычислить $\oint\limits_C \frac{x\,dy - y\,dx}{x^2 + y^2}$ вдоль пути C, окружающего один раз начало координат (начало координат — особая точка). Воспользовавшись параметрическими уравнениями окружности $x = r\cos t$; $y = r\sin t$, имеем:

$$\oint\limits_C \frac{x\,dy - y\,dx}{x^2 + y^2} = \int\limits_0^{2\pi} dt = 2\pi.$$

При помощи криволинейного интеграла можно вычислить площадь σ области S по формуле

$$\sigma = \frac{1}{2}\oint\limits_C x\,dy - y\,dx,$$

где C — контур области S.

Кроме рассмотренных выше криволинейных интегралов, называемых обычно *криволинейными интегралами по проекциям* (или интегралами второго типа), вводят *криволинейные интегралы по длине кривой* (интегралы первого типа). Сохраняя принятые выше (стр. 134—135) обозначения, определяют криволинейный интеграл от функции двух перемен-

ных $f(x, y)$ по длине дуги l как предел интегральной суммы:

$$\int_l f(x, y)\, ds = \lim_{\Delta s_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i, \eta_i)\, \Delta s_i,$$

где Δs_i — длина элементарной дуги кривой $M_{i-1}M_i$. Для существования этого предела достаточно, чтобы функция $f(x, y)$ была непрерывна вдоль дуги l, а дуга l была кусочно-гладкой (см. стр. 135).

Аналогично определяется криволинейный интеграл от функций трех переменных $f(x, y, z)$ по длине дуги l пространственной кривой

$$\int_l f(x, y, z)\, ds = \lim_{\Delta s_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i, \eta_i, \zeta_i)\, \Delta s_i.$$

Свойство 2 криволинейного интеграла по проекциям (см. стр. 136) сохраняется и для криволинейного интеграла по длине кривой, а свойство 1 заменяется следующим: при изменении направления движения по пути интегрирования криволинейный интеграл по длине кривой не изменяется:

$$\int_{l'} f(x, y)\, ds = \int_l f(x, y)\, ds.$$

Вычисление криволинейного интеграла по длине кривой, так же как и интеграла по проекциям (при сохранении указанных там условий), сводится к вычислению определенного интеграла. При этом:

1) если уравнение кривой $y = y(x)$, то $\int_l f(x, y)\, ds =$

$$= \int_a^b f[x, y(x)]\, \sqrt{1 + [y'(x)]^2}\, dx;$$

2) если уравнение кривой $x = x(y)$, то $\int_l f(x, y)\, ds =$

$$= \int_\alpha^\beta f[x(y), y]\, \sqrt{1 + [x'(y)]^2}\, dy;$$

3) если уравнения кривой заданы в параметрическом виде $x = x(t)$, $y = y(t)$, то

$$\int_l f(x, y)\, ds = \int_\tau^T f[x(t), y(t)]\, \sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2}\, dt\ ^*).$$

*) Здесь не играет роли, какая из конечных точек дуги l — начальная, а какая — конечная. В правых частях формул верхний предел интеграла следует брать больше нижнего.

Пример. Вычислить $\int\limits_l y\,ds$, где l — верхняя половина эллипса $x=\sqrt{5}\cos t$; $y=3\sin t$.

$$\int\limits_l y\,ds=3\int\limits_0^{\pi}\sin t\sqrt{5\sin^2 t+9\cos^2 t}\,dt=3\int\limits_0^{\pi}\sin t\sqrt{5+4\cos^2 t}\,dt=9+\frac{15}{4}\ln 5.$$

§ 1-14. Интеграл по поверхности

Определение. Интегралом функции $f(x, y, z)$ по области σ, расположенной на некоторой поверхности, называется число, определяемое следующим образом.

Область σ разбивается произвольно на элементарные области с площадями $\Delta\sigma_1$, $\Delta\sigma_2$, ..., $\Delta\sigma_n$ (рис. 1-113), внутри или на границе каждой элементарной области выбирается точка $M_i(x_i, y_i, z_i)$, составляется

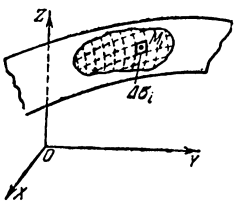


Рис. 1-113.

сумма $\sum\limits_{i=1}^{n} f(x_i, y_i, z_i)\,\Delta\sigma_i$ и находится предел, к которому стремится эта сумма, когда наибольший из диаметров δ_i элементарных областей стремится к нулю:

$$\iint\limits_{\sigma} f(x, y, z)\,d\sigma = \lim_{\max\delta_i\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i, z_i)\,\Delta\sigma_i.$$

Для существования этого предела достаточно, чтобы функция $f(x, y, z)$ была непрерывна в области σ и в каждой точке области σ можно было провести касательную плоскость, непрерывно вращающуюся при непрерывном перемещении точки.

Если область σ состоит из нескольких частей $\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_p$, то

$$\iint\limits_{\sigma} f(x, y, z)\,d\sigma = \iint\limits_{\sigma_1} f(x, y, z)\,d\sigma+\iint\limits_{\sigma_2} f(x, y, z)\,d\sigma+\ldots+\iint\limits_{\sigma_p} f(x, y, z)\,d\sigma.$$

Вычисление интеграла по поверхности. Вычисление интеграла по поверхности сводится к вычислению двойного интеграла при помощи формулы

$$\iint\limits_{\sigma} f(x, y, z)\,d\sigma=\iint\limits_{S}\frac{f[x, y, z(x, y)]}{|\cos\widehat{(n, z)}|}\,dS,$$

где S — проекция области σ на плоскость XY (рис. 1-114), $z=z(x, y)$ — уравнение поверхности, на которой расположена область σ, $(\widehat{n, z})$ — угол между нормалью к поверхности и осью Z, и следовательно:

$$|\cos(\widehat{n, z})| = \frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}}.$$

Связь интеграла по поверхности с криволинейным и тройным интегралами. Если σ — замкнутая поверхность, ограничивающая трехмерную область V, n — нормаль к поверхности σ, направленная вне

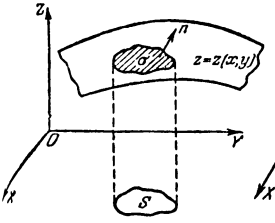


Рис. 1-114.

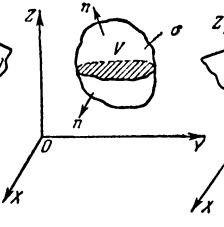


Рис. 1-115.

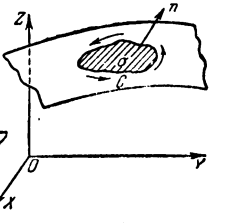


Рис. 1-116.

области V (внешняя нормаль) (рис. 1-115), а функции $P(x, y, z)$, $Q(x, y, z)$, $R(x, y, z)$ и их частные производные первого порядка непрерывны в области V, включая ее границу, то

$$\iiint_V \left(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}\right) dV =$$

$$= \iint_\sigma [P\cos(n, x)+Q\cos(n, y)+R\cos(n, z)]\, d\sigma$$

(формула Гаусса—Остроградского).

Если σ — область, лежащая на некоторой поверхности, ограниченная контуром C, n — нормаль к поверхности, направленная так, что она образует острый угол с осью Z (рис. 1-116), а функции $P(x, y, z)$, $Q(x, y, z)$, $R(x, y, z)$ и их частные производные первого порядка непрерывны в области σ, включая ее границу, то

$$\oint_C P\,dx+Q\,dy+R\,dz = \iint_\sigma \left\{\left[\frac{\partial R}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial z}\right]\cos(n, x)+\right.$$

$$\left.+\left[\frac{\partial P}{\partial z}-\frac{\partial R}{\partial x}\right]\cos(n, y)+\left[\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right]\cos(n, z)\right\} d\sigma$$

(формула Стокса).

В случае, если область σ многосвязна, под C следует понимать совокупность контуров, составляющих ее границу.

Условия независимости криволинейного интеграла по пространственной кривой от пути интегрирования следующие: $\frac{\partial R}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial z}$; $\frac{\partial P}{\partial z}=\frac{\partial R}{\partial x}$; $\frac{\partial Q}{\partial x}=\frac{\partial P}{\partial y}$; при этих условиях подынтегральное выражение является полным дифференциалом некоторой функции $U(x, y, z)$: $P\,dx+Q\,dy+R\,dz=dU$.

Глава 1-6

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ

§ 1-15. Плоские кривые

Дифференциал дуги. Дифференциал дуги плоской кривой выражается при помощи одной из следующих формул:

а) в декартовых координатах

$$ds=\sqrt{dx^2+dy^2}=\sqrt{1+(y')^2}\,dx;$$

$ds=\sqrt{(x'_t)^2+(y'_t)^2}\,dt$ (если кривая задана в параметрической форме);

б) в полярных координатах

$$ds=\sqrt{\rho^2+(\rho')^2}\,d\varphi.$$

За положительное направление отсчета дуг принимается такое направление, в котором дифференциал дуги положителен.

Касательная и нормаль (X, Y — текущие координаты точки касательной или нормали; x, y — координаты точки на кривой, через которую проведена касательная или нормаль).

Вид уравнений кривой	Уравнение касательной	Уравнение нормали
Явный $y=f(x)$	$Y-y=y'(X-x)$	$Y-y=-\frac{X-x}{y'}$
Неявный $F(x, y)=0$	$F'_x(X-x)+F'_y(Y-y)=0$	$\frac{X-x}{F'_x}=\frac{Y-y}{F'_y}$
Параметрический $x=\varphi(t)$, $y=\psi(t)$	$\frac{Y-y}{y'_t}=\frac{X-x}{x'_t}$	$x'_t(X-x)+y'_t(Y-y)=0$

Направление касательной определяется в декартовых координатах углом α между положительным направлением оси X и касательной, в полярных координатах — углом μ между радиусом-вектором $OM=\rho$ и касательной (рис. 1-117).

Углы α и μ определяются по формулам:

$$\operatorname{tg}\alpha=\frac{dy}{dx};\quad \cos\alpha=\frac{dx}{ds};\quad \sin\alpha=\frac{dy}{ds};$$

$$\operatorname{tg}\mu=\frac{\rho}{\rho'};\quad \cos\mu=\frac{d\rho}{ds};\quad \sin\mu=\rho\frac{d\varphi}{ds}.$$

Углом между двумя кривыми называется угол между касательными к этим кривым в их общей точке.

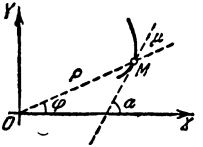


Рис. 1-117.

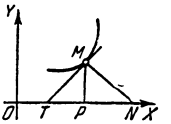


Рис. 1-118.

Если кривые заданы уравнениями

$$y=f_1(x),\quad y=f_2(x),$$

то угол φ между ними в точке пересечения $M(x_0, y_0)$ определяется по формуле

$$\operatorname{tg}\varphi=\frac{f_2'(x_0)-f_1'(x_0)}{1+f_2'(x_0)f_1'(x_0)}.$$

Формулы для вычисления длин некоторых отрезков (рис. 1-118), связанных с касательной и нормалью:

$$MT=\left|\frac{y\sqrt{1+(y')^2}}{y'}\right|\quad \textit{(отрезок касательной);}$$

$$MN=\left|y\sqrt{1+(y')^2}\right|\quad \textit{(отрезок нормали);}$$

$$PT=\left|\frac{y}{y'}\right|\quad \textit{(подкасательная);}$$

$$PN=|yy'|\quad \textit{(поднормаль).}$$

Выпуклость и вогнутость; точки перегиба. В точке M (рис. 1-119) кривая $y=f(x)$ обращена *выпуклостью вниз (вогнутостью вверх)*, если в некоторой окрестности этой точки касательная проходит ниже кривой; если же касательная проходит выше кривой, то кривая обращена *выпуклостью вверх*. Точка, в которой касательная переходит с одной стороны кривой на другую, называется *точкой перегиба* (рис. 1-120).

Кривая выпукла вверх во всякой точке, где $f''(x)<0$, и вниз во всякой точке, где $f''(x)>0$. В точке перегиба $f''(x)=0$ [или $f''(x)$ не существует]. Для нахождения точек перегиба надо найти все корни

уравнения $f''(x) = 0$. Если при переходе через какое-либо из этих значений x вторая производная меняет свой знак, то кривая имеет в этой точке перегиб.

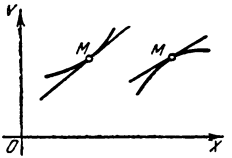


Рис. 1-119.

Рис. 1-120.

Если кривая дана уравнением в полярных координатах $\rho = f(\varphi)$, то значения аргумента φ, соответствующие точкам перегиба, удовлетворяют уравнению

$$\rho^2 + 2(\rho')^2 - \rho\rho'' = 0.$$

Кривизна кривой. *Кривизной* K кривой в точке M называется предел отношения угла между положительными направлениями касательных в точках M и N (*угол смежности*) к длине дуги MN, когда $N \to M$ (рис. 1-121):

$$K = \lim_{\Delta s \to 0} \frac{\Delta\alpha}{\Delta s} = \frac{d\alpha}{ds},$$

где α — угол между положительными направлениями касательной в точке M и оси X.

Радиусом кривизны R называется величина, обратная кривизне: $R = \frac{1}{K}$. Плоскими кривыми постоянной кривизны являются окружность $\left(K = \frac{1}{a}\right.$, где a — радиус окружности$\left.\right)$ и прямая ($K = 0$).

Формулы для вычисления K и R:

$$K = \frac{1}{R} = \frac{y''}{[1 + (y')^2]^{3/2}}; \qquad K = \frac{1}{R} = \frac{\rho^2 + 2(\rho')^2 - \rho\rho''}{[\rho^2 + (\rho')^2]^{3/2}}$$

(для уравнения в полярных координатах).

Точки кривой, в которых кривизна имеет максимум или минимум, называются *вершинами* кривой.

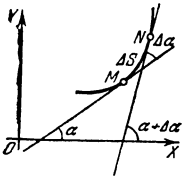


Рис. 1-121.

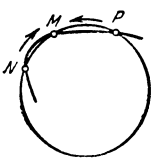


Рис. 1-122.

Окружностью кривизны кривой в точке M называется предельное положение окружности, проведенной через точку M и две другие точки кривой N и P (рис. 1-122), когда $N \to M$ и $P \to M$.

Радиус окружности кривизны равен радиусу кривизны, а центр окружности кривизны *(центр кривизны)* расположен на нормали к кривой, проведенной в точке M в сторону вогнутости кривой.

Координаты X, Y центра кривизны кривой $y = f(x)$ вычисляются по формулам:

$$X = x - \frac{y'[1 + (y')^2]}{y''};$$

$$Y = y + \frac{1 + (y')^2}{y''}.$$

Эволюта кривой — геометрическое место центров кривизны. Если в формулах для определения координат центра кривизны рассматривать X и Y как текущие координаты точки на эволюте, то эти формулы дают параметрические уравнения эволюты.

Эвольвента кривой — такая кривая, для которой данная является эволютой.

Нормаль MC эвольвенты Γ_2 является касательной к эволюте Γ_1 (рис. 1-123); длина дуги CC_1 эволюты равна соответствующему приращению радиуса кривизны эвольвенты $\widetilde{CC}_1 = M_1C_1 - MC$; поэтому эвольвенту Γ_2 называют также *разверткой* кривой Γ_1, получающейся разматыванием натянутой нити, намотанной на Γ_1. Каждая кривая имеет бесчисленное множество эвольвент, соответствующих различным первоначальным длинам нити (рис. 1-124).

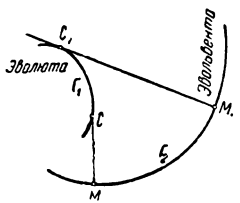


Рис. 1-123.

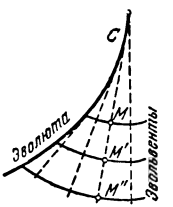


Рис. 1-124.

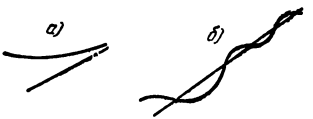


Рис. 1-125.

Асимптоты. Если расстояние до некоторой прямой от точки, удаляющейся в бесконечность по данной кривой, стремится к нулю, то эта прямая называется *асимптотой* данной кривой. Асимптота может или не пересекать кривую (рис. 1-125, *а*), или пересекать (рис. 1-125, *б*) ее конечное или бесконечное число раз.

Кривая $y = f(x)$ имеет горизонтальную асимптоту, если существует предел $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = b$ или $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \beta$.

В этом случае $y = b$ (или соответственно $y = \beta$) — уравнение этой асимптоты.

Если $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \infty$, то прямая $x = a$ — вертикальная асимптота.

Для отыскания наклонной асимптоты следует вычислить пределы $k = \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x}$ $\left(\text{и } \lim\limits_{x \to -\infty} \frac{f(x)}{x} \right)$ и $b = \lim\limits_{x \to +\infty} [f(x) - kx]$ (соответственно $\lim\limits_{x \to -\infty} [f(x) - kx]$).

Если пределы, определяющие величины k и b, существуют, то прямая $y = kx + b$ — асимптота данной кривой.

Пример. $y = \frac{x^3 + 2x^2 + 6}{x^2 + 3}$; $k = \lim\limits_{x \to \infty} \frac{x^3 + 2x^2 + 6}{(x^2 + 3)\,x} = 1$;

$b = \lim\limits_{x \to \infty} \left(\frac{x^3 + 2x^2 + 6}{x^2 + 3} - x \right) = 2$; уравнение асимптоты: $y = x + 2$.

Особые точки. Точка кривой $F(x, y) = 0$ называется *кратной (двойной, тройной* и т. д.), если ее координаты x_0, y_0 удовлетворяют системе уравнений: $F(x_0, y_0) = 0$; $F'_x(x_0, y_0) = 0$; $F'_y(x_0, y_0) = 0$.

Если при этом не обращается в нуль хотя бы одна из производных второго порядка $A = F''_{xx}(x_0, y_0)$; $B = F''_{xy}(x_0, y_0)$; $C = F''_{yy}(x_0, y_0)$, то точка называется *двойной*.

Двойная точка является:

а) *изолированной* (т. е. в некоторой ее окрестности нет других точек данной кривой), если $\Delta = AC - B^2 > 0$ (рис. 1-126, *а*);

б) *узловой*, если $\Delta < 0$ (рис. 1-126, *б*);

в) *точкой возврата* 1-*го* (рис. 1-126, *в*) или 2-*го* (рис. 1-126, *г*) *рода*, или *точкой самосоприкосновения* (рис. 1-126, *д*), если $\Delta = 0$.

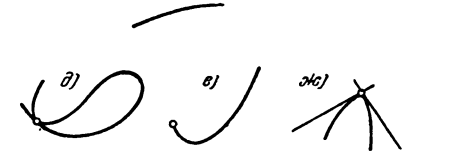


Рис. 1-126.

У неалгебраических кривых, кроме кратных точек, могут быть особенности другой природы, например *точки прекращения* (рис. 1-126, *е*), находящиеся на границе области существования функции $y = f(x)$, определяющей кривую, или в точках разрыва 1-го рода (см. стр. 88)

этой функции, *угловые точки* (рис. 1-126, *ж*), где левый и правый пределы (см. стр. 88) производной $f'(x)$ существуют и различны, и некоторые другие.

Огибающие семейства кривых. *Огибающей* семейства плоских кривых называется кривая (или совокупность нескольких кривых), которой касаются все линии данного семейства, причем каждой сколь угодно малой дуги этой кривой касается бесконечное множество линий семейства.

Если зависящее от одного параметра α семейство кривых

$$F(x, y, \alpha) = 0$$

имеет огибающую, то параметрические уравнения последней определяются из системы

$$F(x, y, \alpha) = 0; \quad F'_{\alpha}(x, y, \alpha) = 0.$$

Если из этой системы исключить параметр α, то получим неявное уравнение $D(x, y) = 0$.

Кривая $D(x, y) = 0$ (*дискриминантная кривая*) может содержать наряду с огибающей, если таковая имеется, также геометрическое место особых точек, не являющееся огибающей.

Пример 1. Дискриминантная кривая семейства $y = (x - \alpha)^3$ (рис. 1-127) $y = 0$ (ось X) является геометрическим местом точек перегиба и огибающей.

Пример 2. Дискриминантная кривая семейства $y^2 = (x - \alpha^3)$ (рис. 1-128), $y = 0$ является геометрическим местом точек возврата и огибающей.

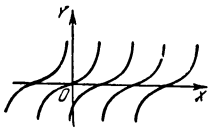


Рис. 1-127.

Рис. 1-128.

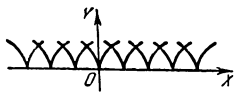


Рис. 1-129.

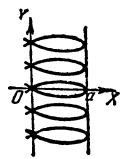


Рис. 1-130.

Пример 3. Дискриминантная кривая семейства $y^3 = (x - \alpha)^2$ (рис. 1-129), $y = 0$ есть геометрическое место точек возврата и не является огибающей.

Пример 4. Дискриминантная кривая семейства строфоид $(a + x)(y - a)^2 = x^2(a - x)$ (рис. 1-130) распадается на прямые $x = 0$ (геометрическое место узловых точек) и $x = a$ (огибающая).

Некоторые плоские кривые *). *График степенной функции.* а) $y = ax^n$ ($n \geq 1$ и целое) — *парабола n-го порядка* (рис. 1-131).

При n четном кривая симметрична относительно оси Y и имеет в начале координат экстремум, при n нечетном симметрична относительно начала координат, являющегося точкой перегиба. Асимптот нет.

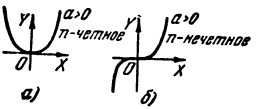


Рис. 1-131.

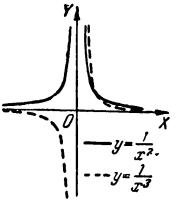


Рис. 1-132.

б) $y = \frac{a}{x^n} = ax^{-n}$ (n — целое положительное) (рис. 1-132) — *кривая гиперболического типа.*

Асимптоты — координатные оси. Экстремумов нет. При n нечетном симметрична относительно начала координат, а при n четном — относительно оси Y.

Полукубическая парабола (рис. 1-133) $y = ax^{3/2}$ (уравнения в параметрической форме: $x = t^2$, $y = at^3$). Асимптот не имеет.

Начало координат — точка возврата 1-го рода.

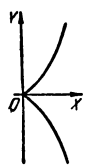


Рис. 1-133.

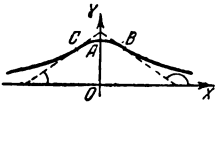


Рис. 1-134.

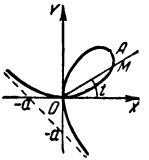


Рис. 1-135.

Локон Аньези (рис. 1-134) $y = \frac{a^3}{a^2 + x^2}$. Асимптота — ось X. Максимум A $(0, a)$. Точки перегиба B, C $\left(\pm\frac{a}{\sqrt{3}}, \frac{3a}{4}\right)$. Площадь между кривой и асимптотой πa^2.

Декартов лист (рис. 1-135) $x^3 + y^3 = 3axy$ или $x = \frac{3at}{1+t^3}$, $y = \frac{3at^2}{1+t^3}$ ($t = \operatorname{tg} MOX$).

---

*) Кривые второго порядка см. на стр. 66—73; рис. 1-42—1-52; графики тригонометрических, обратных тригонометрических, гиперболических обратных гиперболических функций см. на стр. 42—45 и 50.

В рассматриваемых ниже уравнениях параметр положителен.

Начало координат — узловая точка с касательными — осями координат. Асимптота $x+y+a=0$. Вершина $A\left(\frac{3}{2}a, \frac{3}{2}a\right)$. Площадь петли $\frac{3}{2}a^2$; площадь между кривой и асимптотой $\frac{3}{2}a^2$.

Циссоида (рис. 1-136) — геометрическое место точек M, для которых $OM=PQ$ (P — точка *производящей окружности* с диаметром a).

Уравнение: $y^2=\frac{x^3}{a-x}$ или $x=\frac{at^2}{1+t^2}$, $y=\frac{at^3}{1+t^2}$ ($t=\operatorname{tg} MOX$), или $\rho=\frac{a\sin^2\varphi}{\cos\varphi}$.

Начало координат — точка возврата 1-го рода. Асимптота $x=a$. Площадь между кривой и асимптотой $\frac{3}{4}\pi a^2$.

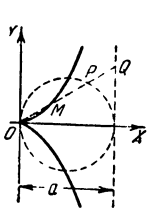


Рис. 1-136.

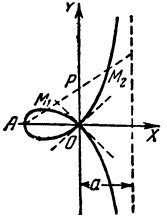


Рис. 1-137.

Строфоида (рис. 1-137) — геометрическое место точек M_1 и M_2, для которых $PM_1=PM_2=OP$.

Уравнение:

$$y^2=x^2\left(\frac{a+x}{a-x}\right) \text{ или } x=a\frac{t^2-1}{t^2+1},\ y=at\frac{t^2-1}{t^2+1}$$

($t=\operatorname{tg} MOX$) или $\rho=-a\frac{\cos 2\varphi}{\cos\varphi}$.

Начало координат — узловая точка (касательные $y=\pm x$). Асимптота $x=a$. Вершина $A(-a, 0)$. Площадь петли $a^2\left(2-\frac{\pi}{2}\right)$, площадь между кривой и асимптотой $a^2\left(2+\frac{\pi}{2}\right)$.

Конхоида (рис. 1-138) — геометрическое место точек M, для которых $OM=OP\pm l$, причем для знака «+» внешняя ветвь, для знака «—» — внутренняя.

Уравнение: $(x-a)^2(x^2+y^2)-l^2x^2=0$ или $x=a+l\cos\varphi$, $y=a\operatorname{tg}\varphi+l\sin\varphi$, или $\rho=\frac{a}{\cos\varphi}\pm l$.

Внешняя ветвь: асимптота $x=l$; вершина $A(a+l, 0)$; точки перегиба B и C [x равен наибольшему из корней уравнения $x^3-3a^2x+2a(a^2-l^2)=0$]. Площадь между ветвью и асимптотой бесконечна.

Внутренняя ветвь: асимптота $x=l$; вершина $D(a-l, 0)$; начало координат — двойная точка:

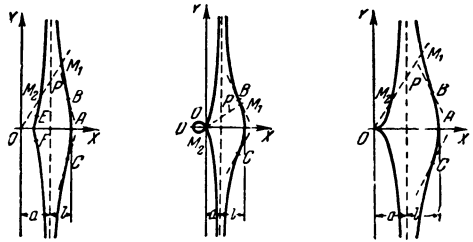
а) при $l<a$ — изолированная точка (рис. 1-138, *а*). Точки перегиба E и F [x равен второму по величине положительному корню уравнения $x^3-3a^2x+2a(a^2-l^2)=0$];

б) при $l > a$ — узловая точка (рис. 1-138, *б*); максимум и минимум при $x = a - \sqrt[3]{al^2}$;

в) при $l = a$ — точка возврата (рис. 1-138, *в*).

Улитка Паскаля (рис. 1-139): $OM = OP \pm l$.

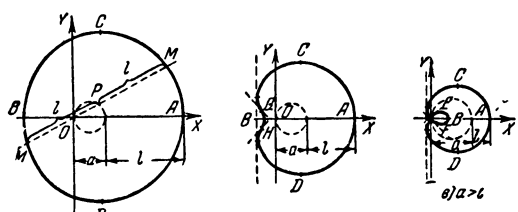
Уравнение: $(x^2 + y^2 - ax)^2 = l^2(x^2 + y^2)$ или $x = a\cos^2\varphi + l\cos\varphi$, $y = a\cos\varphi\sin\varphi + l\sin\varphi$, или $\rho = a\cos\varphi + l$.



а) $l < a$ *б) $l > a$* *в) $l = a$*

Рис. 1-138.

Вершины A, $B(a \pm l, 0)$. Четыре экстремума, если $a > l$, и два экстремума, если $a \leq l$: C, D, E, $F\left(\cos\varphi = \frac{-l \pm \sqrt{l^2 + 8a^2}}{4a}\right)$. Точки перегиба G и $H\left(\cos\varphi = -\frac{2a^2 + l^2}{3al}\right)$, если $a < l < 2a$.



а) $l > 2a$ *б) $a < l < 2a$* *в) $a > l$*

Рис. 1-139.

Начало координат — двойная точка: изолированная при $a < l$, узловая при $a > l$ и точка возврата при $a = l$ (в последнем случае кривая — *кардиоида*).

Площадь улитки $\frac{\pi a^2}{2} + \pi l^2$ [в случае $a > l$ (рис. 1-139, *в*) площадь внутренней петли при вычислении по этой формуле считается дважды].

Кардиоида (рис. 1-140) — частный случай улитки Паскаля: $OM = OP \pm a$. Уравнение $(x^2+y^2)^2 - 2ax\,(x^2+y^2) = a^2y^2$ или $x = a\cos\varphi \times (1+\cos\varphi)$, $y = a\sin\varphi\,(1+\cos\varphi)$, или $\rho = a\,(1+\cos\varphi)$. Начало координат — точка возврата. Вершина $A\,(2a, 0)$. Максимум и минимум при $\varphi = \pm\frac{\pi}{3}$: C, $D\left(\frac{3}{4}a, \pm\frac{3\sqrt{3}}{4}a\right)$. Площадь $\frac{3}{2}\pi a^2$; длина $8a$.

Овал Кассини (рис. 1-141) — геометрическое место точек M, для которых произведение расстояний от данных точек F_1 $(c, 0)$ и F_2 $(-c, 0)$ (фокусов) постоянно и равно a^2.

Уравнение $(x^2+y^2)^2 - 2c^2\,(x^2-y^2) = a^4 - c^4$ или $\rho^2 = c^2\cos 2\varphi \pm \sqrt{c^4\cos^2 2\varphi + (a^4 - c^4)}$.

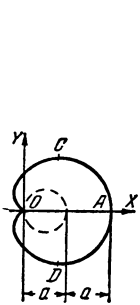


Рис. 1-140.

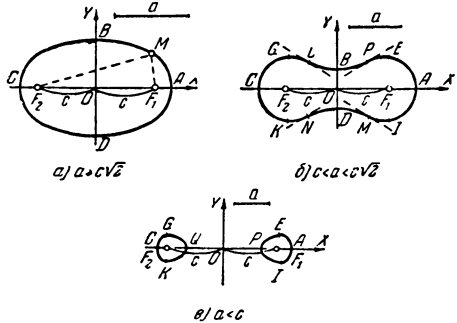


Рис. 1-141.

а) $a \geqslant c\sqrt{2}$ — выпуклый овал (рис. 1-141, *а*). Точки пересечения с осью X: A, $C\,(\pm\sqrt{a^2+c^2},\ 0)$; точки пересечения с осью Y: B, $D\,(0, \pm\sqrt{a^2-c^2})$.

б) $c < a < c\sqrt{2}$ (рис. 1-141, *б*).

Точки пересечения с осями те же, что и в случае а).

Максимумы и минимумы:

$$B, D\,(0, \pm\sqrt{a^2-c^2});\ E, G, K, I\left(\pm\frac{\sqrt{4c^4-a^4}}{2c}, \pm\frac{a^2}{2c}\right).$$

Точки перегиба: $P, L, M, N\left(\pm\sqrt{\frac{1}{2}(m-n)}, \pm\sqrt{\frac{1}{2}(m+n)}\right)$, где $n = \frac{a^4-c^4}{3c^2}$, $m = \sqrt{\frac{a^4-c^4}{3}}$.

в) $a < c$ — два овала (рис 1-141, *в*). Точки пересечения с осью X:

$$A, C\,(\pm\sqrt{a^2+c^2},\ 0) \text{ и } P, Q\,(\sqrt{c^2-a^2},\ 0).$$

Максимумы и минимумы:

$$E, G, K, I\left(\pm\frac{\sqrt{4c^4-a^4}}{2c}, \pm\frac{a^2}{2c}\right).$$

Лемниската Бернулли (рис. 1-142) — частный случай овала Кассини при $a = c$.

Уравнение: $(x^2 + y^2)^2 - 2a^2(x^2 - y^2) = 0$ или $\rho^2 = 2a^2 \cos 2\varphi$.

Начало координат — точка перегиба и узловая точка с касательными $y = \pm x$.

Точки пересечения кривой с осью X:

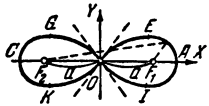


Рис. 1-142.

$$A,\ C\ (\pm a\sqrt{2},\ 0).$$

Максимумы и минимумы: $E,\ G,\ K,\ I\left(\pm\frac{a\sqrt{3}}{2},\ \pm\frac{a}{2}\right)$.

Площадь каждой петли a^2.

Циклоида (рис. 1-143) — траектория точки окружности, катящейся без скольжения по прямой.

Уравнение: $x + \sqrt{y(2a - y)} = a \operatorname{Arccos}\frac{a - y}{a}$ (a — радиус окружности), или $x = a(t - \sin t)$, $y = a(1 - \cos t)$ ($t = \angle MC_1B$).

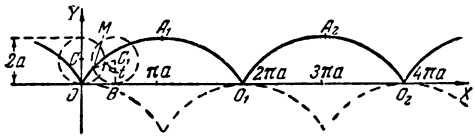


Рис. 1-143.

Точки возврата: $O, O_1, O_2, \ldots$ ($OO_1 = O_1O_2 = \ldots = 2\pi a$).

Вершины: $A_1, A_2, \ldots$ [$(2k + 1)\pi a$, $2a$].

Длина одной ветви $8a$; площадь между ней и осью X: $3\pi a^2$. Эволюта циклоиды — такая же циклоида (отмечена пунктиром).

Трохоиды — удлиненная (рис. 1-144, *а*) и укороченная (рис. 1-144, *б*) циклоиды, т. е. траектории точки, лежащей вне или внутри окружности, которая катится без скольжения по прямой линии.

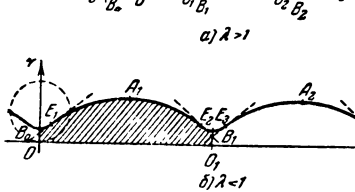


Рис. 1-144.

Уравнения в параметрической форме: $x = a(t - \lambda \sin t)$, $y = a(1 - \lambda \cos t)$, где a — радиус окружности, $t = \angle MC_1B$, $\lambda a = C_1M$ (для

удлиненной циклоиды $\lambda > 1$, для укороченной $\lambda < 1$): $OO_1 = 2\pi a$; максимумы: $A_1, A_2, \ldots [(2k+1)\pi a, (1+\lambda)a]$, минимумы: $B_0, B_1, B_2, \ldots$ $\ldots [2k\pi a, (1-\lambda)a]$.

Для удлиненной циклоиды — узловые точки:

$$D_0, D_1, D_2, \ldots [2k\pi a, a\left(1-\sqrt{\lambda^2-t_0^2}\right)],$$

где t_0 — наименьший положительный корень уравнения $t = \lambda \sin t$.

Для укороченной циклоиды — точки перегиба:

$$E_1, E_2, \ldots [a(\arccos\lambda - \lambda\sqrt{1-\lambda^2}), a(1-\lambda^2)].$$

Площадь, заштрихованная на чертеже, равна, $\pi a^2(2+\lambda^2)$.

Эпициклоида (рис. 1-145) — траектория точки M окружности, катящейся без скольжения по другой окружности вне ее.

Уравнения в параметрической форме: $x = (A+a)\cos\varphi - a\cos\frac{A+a}{a}\varphi$;

$y = (A+a)\sin\varphi - a\sin\frac{A+a}{a}\varphi$ (A — радиус неподвижного, a — подвижного круга; $\varphi = \angle COX$). При $m = \frac{A}{a} = 1$ — кардиоида. (см. стр. 150).

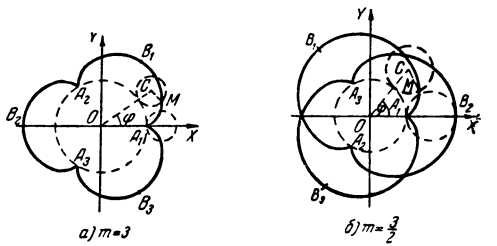


Рис. 1-145.

а) При m целом кривая замкнута и состоит из m одинаковых частей (рис. 1-145, *а*). Точки возврата $A_1, A_2, \ldots, A_m$: $\rho = A$; $\varphi = \frac{2k\pi}{m}$ ($k = 0, 1, \ldots, m-1$).

Вершины $B_1, B_2, \ldots, B_m$: $\rho = A + a$; $\varphi = \frac{2\pi}{m}\left(k + \frac{1}{2}\right)$.

б) При m дробном (рациональном) (рис. 1-145, *б*) кривая тоже замкнутая, но самопересекающаяся.

Длина одной ветви: $\overset{\frown}{A_1B_1A_2} = \frac{8(A+a)}{m}$.

При m целом длина всей кривой $8(A+a)$. Площадь сектора $A_1B_1A_2A_1$ (без сектора неподвижного круга) $\pi a^2\left(\frac{3A+2a}{A}\right)$.

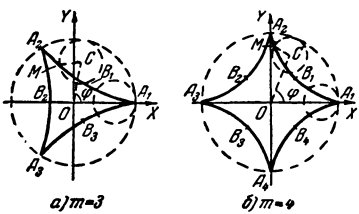
Гипоциклоида (рис. 1-146) — траектория точки окружности, катящейся без скольжения по другой окружности внутри нее. При любом m ($m > 1$) уравнение гипоциклоиды получается из соответствующего уравнения эпициклоиды заменой a на $-a$.

При $m = \frac{A}{a} = 2$ кривая вырождается в диаметр неподвижного круга.

При $m = \frac{A}{a} = 3$ (рис. 1-146, *а*) уравнение $x = a\,(2\cos\varphi + \cos 2\varphi)$, $y = a\,(2\sin\varphi - \sin 2\varphi)$.

Длина 16 a; площадь $2\pi a^2$.

При $m = \frac{A}{a} = 4$ (рис. 1-146, *б*) *астроида* $x = A\cos^3\varphi$, $y = A\sin^3\varphi$ или $x^{2/3} + y^{2/3} = A^{2/3}$. Длина 24 a (или 6A); площадь $6\pi a^2$ (или $\frac{3}{8}\pi A^2$).



а) m=3 *б) m=4*

Рис. 1-146.

Развертка (эвольвента) окружности (рис. 1-147) — траектория конца натянутой нити, разматывающейся с окружности ($\overset{\frown}{AB} = BM$).

Уравнения в параметрической форме:

$$x = a\cos\varphi + a\varphi\sin\varphi,$$
$$y = a\sin\varphi - a\varphi\cos\varphi$$

(a — радиус $\varphi = \angle BOX$).

Точка возврата $A\,(a, 0)$.

Длина дуги AM: $\frac{1}{2}a\varphi^2$.

Архимедова спираль (рис. 1-148) — траектория точки, движущейся с постоянной скоростью v по лучу, вращающемуся около полюса O с постоянной угловой скоростью ω.

Уравнение: $\rho = a\varphi$, где $a = \frac{v}{\omega}$.

Луч OR пересекает кривую в точках O, A_1, A_2, ..., A_n, ..., находящихся друг от друга на постоянном расстоянии $A_iA_{i+1} = 2\pi a$. Длина

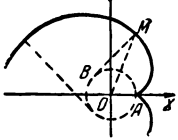


Рис. 1-147.

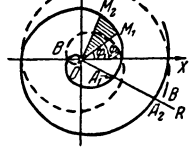


Рис. 1-148.

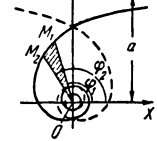


Рис. 1-149.

дуги OM (M — любая точка спирали) равна $\frac{a}{2}\left(\varphi\sqrt{\varphi^2+1} + \operatorname{Arsh}\varphi\right)$.

Площадь сектора M_1OM_2: $\frac{a^2}{6}\left(\varphi_2^3 - \varphi_1^3\right)$.

Гиперболическая спираль (рис. 1-149). Уравнение в полярных координатах: $\rho = \frac{a}{\varphi}$. Асимптота: $y = a$. Полюс — асимптотическая точка. Площадь сектора M_1OM_2: $\frac{a^2}{2}\left(\frac{1}{\varphi_1} - \frac{1}{\varphi_2}\right)$.

Логарифмическая спираль (рис. 1-150). Кривая пересекает все лучи, выходящие из полюса O, под одним и тем же углом α.

Уравнение: $\rho = ae^{k\varphi}$ ($k = \operatorname{ctg}\alpha$; если $\alpha = \frac{\pi}{2}$, то $k = 0$ и кривая — окружность). Полюс — асимптотическая точка. Длина дуги M_1M_2:

$$\frac{\sqrt{1+k^2}}{k}(\rho_2 - \rho_1).$$

Параболическая спираль (рис. 1-151): $\rho^2 = a\varphi$. Полюс — точка прекращения.

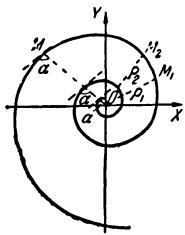


Рис. 1-150.

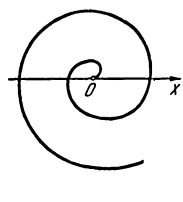


Рис. 1-151.

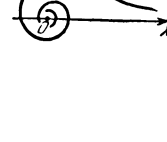


Рис. 1-152.

Жезл (рис. 1-152): $\rho^2 = \frac{a}{\varphi}$. Полюс — асимптотическая точка. Полярная ось — асимптота.

Показательная кривая (рис. 1-153) $y = a^x$ ($a > 0$).

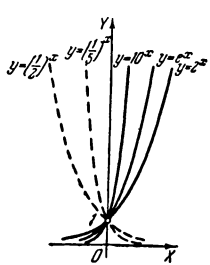


Рис. 1-153.

При $a = e$ — *натуральная* показательная кривая $y = e^x$. Функция y принимает только положительные значения. Асимптота — ось X.

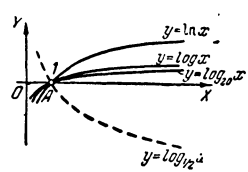


Рис. 1-154.

Логарифмическая кривая (рис. 1-154) $y = \log_a x$ ($a > 0$).

При $a = e$ — *натуральная* логарифмическая кривая $y = \ln x$. Функция y существует только при $x > 0$. Асимптота — ось Y.

График функции $y=e^{-(ax)^2}$ (рис. 1-155). Кривая симметрична относительно оси Y. Асимптота — ось X. Максимум $A(0, 1)$; точки перегиба B и $C\left(\pm\frac{1}{a\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{e}}\right)$. К этому виду относится *кривая нормального закона распределения ошибок (кривая Гаусса)*

$$y=\frac{h}{\sqrt{\pi}}e^{-h^2x^2}.$$

Кривая затухающего колебания (рис. 1-156) $y=Ae^{-ax}\sin(\omega x+\varphi_0)$. Она заключена между кривыми $y=\pm Ae^{-ax}$, которых касается в точках $A_1, A_2, \ldots\left[\frac{\left(k+\frac{1}{2}\right)\pi-\varphi_0}{\omega}, (-1)^k Ae^{-ax}\right]$.

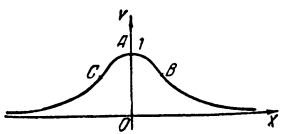


Рис. 1-155.

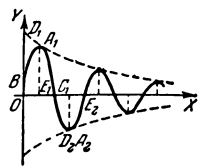


Рис. 1-156.

Асимптота — ось X. Точки пересечения с осями координат:

$$B(0, A\sin\varphi_0) \text{ и } C_1, C_2, \ldots\left(\frac{k\pi-\varphi_0}{\omega}, 0\right).$$

Экстремумы: $D_1, D_2, \ldots\left(x=\frac{k\pi-\varphi_0+\alpha}{\omega}\right)$, где $\operatorname{tg}\alpha=\frac{\omega}{a}$.

Точки перегиба: $E_1, E_2, \ldots\left(x=\frac{k\pi-\varphi_0+2\alpha}{\omega}\right)$.

Цепная линия (рис. 1-157). Линия равновесия гибкой тяжелой нерастяжимой нити, подвешенной в двух точках. Уравнение:

$$y=a\operatorname{ch}\frac{x}{a}=\left(a\,\frac{e^{\frac{x}{a}}+e^{-\frac{x}{a}}}{2}\right).$$

Кривая симметрична относительно оси Y. Вершина $A(0, a)$. Длина дуги AM: $a\operatorname{sh}\frac{x}{a}$; площадь $OAMP$: $a^2\operatorname{sh}\frac{x}{a}$.

Трактриса (рис. 1-158). Эвольвента цепной линии (развертывание начинается в вершине A). Уравнение:

$$x=a\operatorname{Arch}\frac{a}{y}-\sqrt{a^2-y^2}\quad\left(=a\ln\frac{a+\sqrt{a^2-y^2}}{y}-\sqrt{a^2-y^2}\right).$$

Асимптота — ось X. Точка возврата (с вертикальной касательной) $A(0, a)$. Кривая симметрична относительно оси Y. Длина дуги AM:

$$a \ln \frac{a}{y}.$$

Квадратриса Динострата (рис. 1-159):

$$x = y \operatorname{ctg} \frac{y}{a} \text{ или } \rho \sin \varphi = a\varphi$$

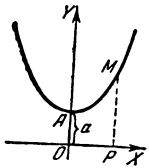


Рис. 1-157.

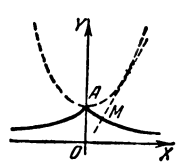


Рис. 1-158.

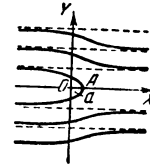


Рис. 1-159.

Асимптоты: $y = n\pi$ $(n = \pm 1, \pm 2, \ldots)$. Вершина $A(a, 0)$. Все остальные точки, для которых $x = a$, — точки перегиба.

§ 1-16. Пространственные кривые

Общие сведения. *Кривая в пространстве (линия двоякой кривизны)* может быть задана как линия пересечения двух поверхностей уравнениями $F(x, y, z) = 0$; $\Phi(x, y, z) = 0$, а также в *параметрической форме* $x = x(t)$, $y = y(t)$, $z = z(t)$. В частности, если параметр t совпадает с одной из текущих координат точки $M(x, y, z)$ на кривой (например, $t = x$), то уравнения кривой принимают вид: $y = y(x)$, $z = z(x)$.

Векторное уравнение кривой: $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$, где радиус-вектор любой точки кривой $\mathbf{r}(t) = x(t)\,\mathbf{i} + y(t)\,\mathbf{j} + z(t)\,\mathbf{k}$ (см. стр. 185).

На кривой выбирается положительное направление соответственно возрастанию параметра t.

Иногда удобно в качестве параметра выбрать длину дуги s кривой от некоторой начальной точки A (соответствующей значению $t = t_0$) до точки M:

$$s = \int_{t_0}^{t} \sqrt{(x'_t)^2 + (y'_t)^2 + (z'_t)^2}\, dt;$$

тогда уравнения кривой имеют вид: $x = x(s)$; $y = y(s)$; $z = z(s)$.

Дифференциал дуги кривой выражается формулой

$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2}.$$

Сопровождающий трехгранник. В каждой точке M пространственной кривой, в которой хотя бы одна из производных $\frac{dx}{dt}$, $\frac{dy}{dt}$, $\frac{dz}{dt}$ не равна нулю, определяются три взаимно-перпендикулярные прямые и три взаимно-перпендикулярные плоскости, каждая из которых про-

ходит через две из трех упомянутых прямых. Эти прямые и плоскости, образующие так называемый *сопровождающий трехгранник* (рис. 1-160), следующие:

1) *касательная* — определяется так же, как и для плоской кривой (стр. 89);

2) *нормальная плоскость* — плоскость, перпендикулярная к касательной; прямые, лежащие в этой плоскости и проходящие через точку M, называются *нормалями* к кривой;

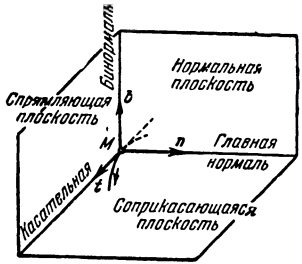


Рис. 1-160.

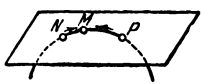


Рис. 1-161.

3) *соприкасающаяся плоскость* — предельное положение плоскости, проходящей через точку M и две другие точки кривой N и P, когда $N \to M$ и $P \to M$ (рис. 1-161);

4) *главная нормаль* — та из нормалей, которая лежит в соприкасающейся плоскости (линия пересечения нормальной и соприкасающейся плоскостей);

5) *бинормаль* — нормаль, перпендикулярная к соприкасающейся плоскости;

6) *спрямляющая плоскость* — плоскость, проходящая через касательную и бинормаль.

Положительное направление на касательной выбирается произвольно и определяется единичным вектором $\mathbf{t}$ (стр. 183); на главной нормали — направлено в сторону вогнутости кривой и определяется единичным вектором $\mathbf{n}$; на бинормали определяется единичным вектором $\mathbf{b} = \mathbf{t} \times \mathbf{n}$ (стр. 186).

Если кривая задана в форме $F(x, y, z) = 0$; $\Phi(x, y, z) = 0$, то касательная имеет уравнения:

$$\frac{X-x}{\begin{vmatrix} F'_y & F'_z \\ \Phi'_y & \Phi'_z \end{vmatrix}} = \frac{Y-y}{\begin{vmatrix} F'_z & F'_x \\ \Phi'_z & \Phi'_x \end{vmatrix}} = \frac{Z-z}{\begin{vmatrix} F'_x & F'_y \\ \Phi'_x & \Phi'_y \end{vmatrix}},$$

а нормальная плоскость — уравнение

$$\begin{vmatrix} X-x & Y-y & Z-z \\ F'_x & F'_y & F'_z \\ \Phi'_x & \Phi'_y & \Phi'_z \end{vmatrix} = 0,$$

где x, y, z — координаты точки M, а X, Y, Z — текущие координаты.

В последующих формулах сохраняются эти обозначения, а также принято r — радиус-вектор точки M, $\mathbf{R}$ — текущий радиус-вектор.

Уравнения элементов сопровождающего трехгранника, когда кривая задана параметрическими уравнениями, следующие (все производные берутся по t):

соприкасающаяся плоскость

$$\begin{vmatrix} X-x & Y-y & Z-z \\ x' & y' & z' \\ x'' & y'' & z'' \end{vmatrix} = 0, \quad \text{или} \quad (\mathbf{R}-\mathbf{r})\,\frac{d\mathbf{r}}{dt}\,\frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} = 0;$$

касательная

$$\frac{X-x}{x'} = \frac{Y-y}{y'} = \frac{Z-z}{z'}, \quad \text{или} \quad \mathbf{R} = \mathbf{r} + \lambda\,\frac{d\mathbf{r}}{dt};$$

нормальная плоскость

$$x'(X-x) + y'(Y-y) + z'(Z-z) = 0, \quad \text{или} \quad (\mathbf{R}-\mathbf{r})\,\frac{d\mathbf{r}}{dt} = 0;$$

бинормаль

$$\frac{X-x}{\begin{vmatrix} y' & z' \\ y'' & z'' \end{vmatrix}} = \frac{Y-y}{\begin{vmatrix} z' & x' \\ z'' & x'' \end{vmatrix}} = \frac{Z-z}{\begin{vmatrix} x' & y' \\ x'' & y'' \end{vmatrix}}, \text{ или } \quad \mathbf{R} = \mathbf{r} + \lambda\left(\frac{d\mathbf{r}}{dt} \times \frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2}\right);$$

главная нормаль

$$\frac{X-x}{\begin{vmatrix} y' & z' \\ m & n \end{vmatrix}} = \frac{Y-y}{\begin{vmatrix} z' & x' \\ n & l \end{vmatrix}} = \frac{Z-z}{\begin{vmatrix} x' & y' \\ l & m \end{vmatrix}} \text{ или } \quad \mathbf{R} = \mathbf{r} + \lambda\,\frac{d\mathbf{r}}{dt} \times \left(\frac{d\mathbf{r}}{dt} \times \frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2}\right)$$

спрямляющая плоскость

$$\begin{vmatrix} X-x & Y-y & Z-z \\ x' & y' & z' \\ l & m & n \end{vmatrix} = 0, \quad \text{или} \quad (\mathbf{R}-\mathbf{r})\,\frac{d\mathbf{r}}{dt}\left(\frac{d\mathbf{r}}{dt} \times \frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2}\right) = 0;$$

$$l = y'z'' - y''z'; \quad m = z'x'' - z''x'; \quad n = x'y'' - x''y'.$$

В случае, когда в качестве параметра принята длина дуги s, уравнения главной нормали и спрямляющей плоскости упрощаются:

$$\frac{X-x}{x''} = \frac{Y-y}{y''} = \frac{Z-z}{z''}, \quad \text{или } \mathbf{R} = \mathbf{r} + \lambda\,\frac{d^2\mathbf{r}}{ds^2} \text{ (главная нормаль);}$$

$$x''(X-x) + y''(Y-y) + z''(Z-z) = 0, \quad \text{или} \quad (\mathbf{R}-\mathbf{r})\,\frac{d^2\mathbf{r}}{ds^2} = 0$$

(спрямляющая плоскость).

Кривизна и кручение. *Кривизной* K кривой в точке M (рис. 1-162) называется предел, к которому стремится отношение угла δ между касательными в точках кривой M и N (*угол смежности*) к длине ΔS дуги MN, когда $N \to M$:

$$K = \lim_{N \to M} \frac{\delta}{\Delta S}.$$

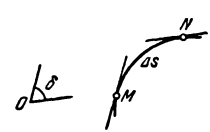


Рис. 1-162.

Радиусом кривизны ρ называется величина, обратная кривизне: $\rho = \frac{1}{K}$; K и ρ для пространственных кривых всегда положительны.

Если кривая задана параметрическими уравнениями, то

$$K=\frac{1}{\rho}=\frac{\sqrt{(x'^2+y'^2+z'^2)(x''^2+y''^2+z''^2)-(x'x''+y'y''+z'z'')^2}}{(x'^2+y'^2+z'^2)^{3/2}}.$$

В векторной форме:

$$K^2=\frac{\left(\frac{d\mathbf{r}}{dt}\right)^2\left(\frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2}\right)^2-\left(\frac{d\mathbf{r}}{dt}\,\frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2}\right)^2}{\left|\left(\frac{d\mathbf{r}}{dt}\right)^2\right|^3}.$$

В частности, если параметром является длина дуги s, то $K=\frac{1}{\rho}=\sqrt{x''^2+y''^2+z''^2}=\left|\frac{d^2\mathbf{r}}{ds^2}\right|$.

Пример. Для винтовой линии $x=a\cos t$; $y=a\sin t$; $z=bt$, приняв за начальную точку $t=0$, имеем: $s=\int\limits_0^t\sqrt{a^2+b^2}\,dt=$ $=t\sqrt{a^2+b^2}$, откуда $x=a\cos\frac{s}{\sqrt{a^2+b^2}}$; $y=a\sin\frac{s}{\sqrt{a^2+b^2}}$; $z=\frac{bs}{\sqrt{a^2+b^2}}$; $K=\frac{1}{\rho}=\frac{a}{a^2+b^2}$ (кривизна постоянна).

Кручением T (второй кривизной) кривой в точке M (рис. 1-163) называется предел, к которому стремится отношение угла θ между бинормалями (или, что то же самое, между соприкасающимися плоскостями) в точках M и N к длине ΔS дуги MN, когда $N\to M$: $T=\lim\limits_{N\to M}\frac{\theta}{\Delta S}$.

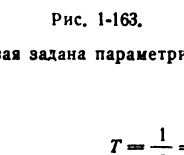


Рис. 1-163.

Радиусом кручения τ называется величина, обратная кручению: $\tau=\frac{1}{T}$. Если кривая задана параметрическими уравнениями, то

$$T=\frac{1}{\tau}=\rho^2\frac{\begin{vmatrix}x' & y' & z'\\ x'' & y'' & z''\\ x''' & y''' & z'''\end{vmatrix}}{(x'^2+y'^2+z'^2)^3}=\rho^2\frac{\frac{d\mathbf{r}}{dt}\,\frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2}\,\frac{d^3\mathbf{r}}{dt^3}}{\left|\left(\frac{d\mathbf{r}}{dt}\right)^2\right|^2}.$$

Если параметром служит длина дуги s, то

$$T=\frac{1}{\tau}=\frac{\begin{vmatrix}x' & y' & z'\\ x'' & y'' & z''\\ x''' & y''' & z'''\end{vmatrix}}{x''^2+y''^2+z''^2}=\rho^2\left(\frac{d\mathbf{r}}{ds}\,\frac{d^2\mathbf{r}}{ds^2}\,\frac{d^3\mathbf{r}}{ds^3}\right).$$

Вычисляемое по этим формулам кручение (и радиус кручения) имеет знак «+» или «—». Если $T>0$, то кривая для наблюдателя, стоящего на главной нормали параллельно бинормали (см. рис. 1-160 на стр. 158),

кается закручивающейся вверх справа налево. Если $T<0$, то кривая закручивается вверх слева направо.

Пример. Для винтовой линии $T=\frac{1}{\tau}=\frac{b}{a^2+b^2}$ (кручение постоянно).

Формулы Серре-Френе. Производные единичных векторов $\mathbf{t}$, $\mathbf{n}$ и $\mathbf{b}$ по длине дуги s выражаются через эти единичные векторы с помощью радиуса кривизны ρ и радиуса кручения τ посредством формул:

$$\frac{d\mathbf{t}}{ds}=\frac{\mathbf{n}}{\rho}; \quad \frac{d\mathbf{n}}{ds}=\frac{\mathbf{t}}{\rho}-\frac{\mathbf{b}}{\tau}; \quad \frac{d\mathbf{b}}{ds}=-\frac{\mathbf{n}}{\tau}.$$

§ 1-17. Поверхности

Общие сведения. *Неявная форма* уравнения поверхности: $F(x, y, z)=0$.

Параметрическая форма уравнений: $x=x(u, v)$; $y=y(u, v)$; $z=z(u, v)$. В частности, если в качестве параметров выбраны какие-либо две координаты (например, x и y), то уравнение поверхности имеет вид $z=z(x, y)$ (*явная форма*).

Векторная форма: $\mathbf{r}=\mathbf{r}(u, v)$, где $\mathbf{r}(u, v)=x(u, v)\,\mathbf{i}+y(u, v)\,\mathbf{j}+z(u, v)\,\mathbf{k}$.

Любая зависимость между параметрами $f(u, v)=0$ или $u=u(t)$, $v=v(t)$ вместе с уравнениями поверхности определяет кривую на поверхности; в частности, уравнения $u=\text{const}$ и $v=\text{const}$ определяют на поверхности два семейства так называемых *координатных линий*, соответствующих данному выбору параметров.

Любая пара значений $u=u_0$, $v=v_0$ определяет на поверхности некоторую точку M (u_0, v_0 — *гауссовы*, или *криволинейные, координаты* этой точки); через точку M проходят две координатные линии: $u=u_0$ и $v=v_0$ (рис. 1-64).

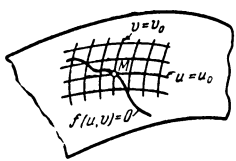


Рис. 1-164.

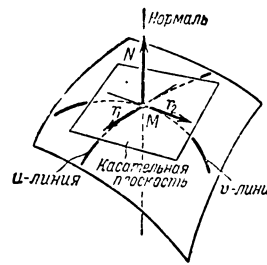


Рис. 1-165.

Касательная плоскость и нормаль. Если в точке $M(x, y, z)$ поверхности $F(x, y, z)=0$ хотя бы одна из производных $F'_x(x, y, z)$, $F'_y(x, y, z)$, $F'_z(x, y, z)$ не обращается в нуль, то касательные ко всем кривым, лежащим на поверхности и проходящим через точку M, лежат в одной плоскости, называемой *касательной плоскостью* (рис. 1-165). Перпендикуляр, проведенный через точку M к касательной плоскости, называется *нормалью* к поверхности.

Уравнения касательной плоскости и нормали к поверхности

Вид уравнения поверхности	Касательная плоскость	Нормаль
Явный	$Z - z = \frac{\partial z}{\partial x}(X - x) + \frac{\partial z}{\partial y}(Y - y)$	$\frac{X - x}{\frac{\partial z}{\partial x}} = \frac{Y - y}{\frac{\partial z}{\partial y}} = \frac{Z - z}{-1}$
Неявный	$F'_x(X-x)+F'_y(Y-y)+F'_z(Z-z)=0,$	$\frac{X - x}{F'_x} = \frac{Y - y}{F'_y} = \frac{Z - z}{F'_z}$
Параметрический	$\begin{vmatrix} X-x & Y-y & Z-z \\ \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial u} \\ \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial v} \end{vmatrix} = 0$	$\frac{X - x}{\begin{vmatrix} \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial u} \\ \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial v} \end{vmatrix}} = \frac{Y - y}{\begin{vmatrix} \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial u} \\ \frac{\partial z}{\partial v} & \frac{\partial x}{\partial v} \end{vmatrix}} = \frac{Z - z}{\begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u} \\ \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix}}$
Векторный	$(\mathbf{R} - \mathbf{r})\,\mathbf{r}_1\mathbf{r}_2 = 0$ или $(\mathbf{R} - \mathbf{r})\,\mathbf{N} = 0$	$\mathbf{R} = \mathbf{r} + \lambda\,(\mathbf{r}_1 \times \mathbf{r}_2)$ или $\mathbf{R} = \mathbf{r} + \lambda\mathbf{N}$

Касательная плоскость проходит через векторы $\mathbf{r}_1 = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u}$ и $\mathbf{r}_2 = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v}$, касательные к u-линии и v-линии в точке M. Вектор $\mathbf{r}_1 \times \mathbf{r}_2$ параллелен нормали. Орт нормали $\mathbf{N}^0 = \frac{\mathbf{r}_1 \times \mathbf{r}_2}{|\mathbf{r}_1 \times \mathbf{r}_2|}$ определяет положительное направление на нормали.

Любая плоскость, проходящая через нормаль к поверхности, называется *нормальной плоскостью*.

Если в некоторой точке на поверхности $F'_x = F'_y = F'_z = 0$, то касательные к различным кривым, лежащим на поверхности и проходящим через точку M, не лежат в одной плоскости и образуют коническую поверхность.

Уравнения касательной плоскости и нормали см. на стр. 162. Обозначения: x, y, z — координаты точки M поверхности, в которой проведены касательная плоскость и нормаль; X, Y, Z — текущие координаты; $\mathbf{r}$ — радиус-вектор точки M; $\mathbf{R}$ — текущий радиус-вектор.

Первая квадратичная форма. Дифференциал дуги ds линии, лежащей на поверхности, проходящей через точку M (u, v) *) (*линейный элемент поверхности*), находится по формуле

$$ds^2 = E\,du^2 + 2F\,du\,dv + G\,dv^2, \quad (*)$$

где

$$E = \left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial u}\right)^2 = \mathbf{r}_1^2;$$

$$F = \frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial y}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v} + \frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial z}{\partial v} = \mathbf{r}_1\mathbf{r}_2;$$

$$G = \left(\frac{\partial x}{\partial v}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial v}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial v}\right)^2 = \mathbf{r}_2^2.$$

Рис. 1-166.

Правая часть формулы (*) называется *первой квадратичной формой* поверхности; ее коэффициенты зависят только от положения точки M на поверхности.

Длина дуги линии $u = u(t)$; $v = v(t)$, лежащей на поверхности,

$$s = \int_{t_0}^{t_1} \sqrt{E\left(\frac{du}{dt}\right)^2 + 2F\frac{du}{dt}\frac{dv}{dt} + G\left(\frac{dv}{dt}\right)^2}\,dt,$$

где t_0 и t_1 — значения параметра t, соответствующие концам дуги.

Две различные поверхности, имеющие одну и ту же первую квадратичную форму, могут быть наложены одна на другую путем изгибания (т. е. без изменения длин дуг на поверхности).

Элементарная площадь, ограниченная линиями $u = \alpha$; $u + du = \alpha$; $v = \beta$; $v + dv = \beta$ (рис. 1-166), находится по формуле

$$dS = \sqrt{EG - F^2}\,du\,dv.$$

Кривизна. Две кривые, проходящие через точку M на поверхности и имеющие в ней общую соприкасающуюся плоскость, имеют в этой точке одинаковую кривизну (в частности, одна из этих кривых может быть плоской, т. е. целиком лежать в соприкасающейся плоскости).

*) u и v — гауссовы координаты точки M.

Если ρ — радиус кривизны некоторой кривой C на поверхности в точке M, а R — радиус кривизны в точке M кривой $C_{норм}$, полученной в сечении поверхности нормальной плоскостью, проведенной через эту точку и через касательную к данной кривой (*нормальное сечение*), то $\rho = R\cos\alpha$, где $\alpha = (\widehat{n, N})$ — угол между ортом n главной нормали к данной кривой и ортом N нормали к поверхности (рис. 1-167); R следует брать положительным, если орт N нормали к поверхности направлен в сторону вогнутости нормального сечения, и отрицательным — в противном случае (*теорема Менье*).

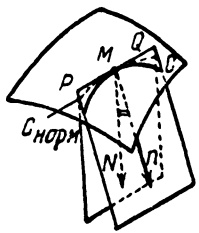


Рис. 1-167.

Нормальные сечения, проходящие через точку M с наименьшим и наибольшим радиусами кривизны, называются *главными сечениями*, а соответствующие радиусы кривизны R_1 и R_2 — *главными радиусами кривизны*.

Плоскости главных сечений взаимно перпендикулярны. Радиус кривизны любого нормального сечения выражается через главные радиусы кривизны с помощью *формулы Эйлера*:

$$\frac{1}{R} = \frac{\cos^2\omega}{R_1} + \frac{\sin^2\omega}{R_2},$$

где ω — угол между плоскостью рассматриваемого нормального сечения и плоскостью одного из главных сечений.

Если R_1 и R_2 в точке M одинакового знака, то поверхность (в некоторой окрестности точки M) расположена по одну сторону от касательной плоскости и точка M называется *эллиптической* (таковы, между прочим, все точки эллипсоида). В частности, если $R_1 = R_2$, то точка M — *круговая*.

Если R_1 и R_2 противоположных знаков, то поверхность пересекается в точке M касательной плоскостью и точка M — *гиперболическая* (таковы, в частности, все точки однополостного гиперболоида).

Если $R_1 = \infty$ или $R_2 = \infty$, то или для одного из главных сечений точка M является точкой перегиба или одно из главных сечений — прямая. Точка M в этом случае — *параболическая* (таковы все точки цилиндра).

Выражение $H = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right)$ называется *средней кривизной* поверхности в данной точке, выражение $K = \frac{1}{R_1 R_2}$ — *полной*, или *гауссовой*, *кривизной*.

Линии кривизны и геодезические линии. Кривые на поверхности, имеющие в каждой точке направление главных сечений, называются *линиями кривизны*.

Кривые на поверхности, для которых в каждой точке главная нормаль совпадает с нормалью к поверхности, называются *геодезическими линиями*.

Из всех дуг, лежащих на поверхности и соединяющих две данные точки, наименьшую длину имеет дуга геодезической линии.

Геодезическими линиями на поверхности круглого цилиндра являются винтовые линии, на плоскости — прямые, на шаровой поверхности — окружности больших кругов.

Глава 1-7

БЕСКОНЕЧНЫЕ РЯДЫ

§ 1-18. Числовые ряды

Основные понятия. *Частной суммой* S_n *числового ряда* $a_1 + a_2 + \ldots + a_n + \ldots$ называется сумма его первых n членов:

$$S_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n.$$

Если $\lim\limits_{n \to \infty} S_n$ существует и конечен, то ряд называется *сходящимся* и указанный предел называется *суммой ряда*: $S = \lim\limits_{n \to \infty} S_n$.

Если $\lim\limits_{n \to \infty} S_n$ не существует или бесконечен, то ряд называется *расходящимся*. Например, бесконечная геометрическая прогрессия со знаменателем q: $a + aq + aq^2 + \ldots + aq^n + \ldots$, сходится, если $-1 < q < 1$, и расходится, если $|q| \geqslant 1$.

Сумма сходящейся бесконечной геометрической прогрессии вычисляется по формуле

$$S = \frac{a}{1-q}.$$

Отбрасывание любого конечного числа членов ряда (или изменение величин этих членов) не нарушает сходимости или расходимости ряда.

Остатком сходящегося ряда называется разность между его суммой и частной суммой $R_n = S - S_n = a_{n+1} + a_{n+2} + \ldots$

Признаки сходимости рядов. Если ряд сходится, то предел его общего члена равен нулю: $\lim\limits_{n \to \infty} a_n = 0$ (*необходимый признак сходимости*). Этот признак недостаточен. Так, например, *гармонический* ряд $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n} + \ldots$ расходится, хотя необходимый признак выполнен, так как $\lim\limits_{n \to \infty} \frac{1}{n} = 0$.

Сравнение рядов. Пусть даны два *знакоположительных* ряда (т. е. два ряда с положительными членами): $a_1 + a_2 + \ldots + a_n + \ldots$, $b_1 + b_2 + \ldots + b_n + \ldots$ Если первый ряд сходится и $b_n \leqslant a_n$, то второй ряд тоже сходится. Если первый ряд расходится и $b_n \geqslant a_n$, то второй ряд тоже расходится.

Признак Даламбера. Если ряд знакоположителен и существует такая постоянная $q < 1$, что, начиная с некоторого n, имеет место неравенство $\frac{a_{n+1}}{a_n} \leqslant q < 1$, то ряд сходится.

Если, начиная с некоторого n, выполнено неравенство $\frac{a_{n+1}}{a_n} \geqslant 1$, то ряд расходится.

В частности, если существует предел $\lim\limits_{n \to \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = k$, то ряд сходится, если $k < 1$, и расходится, если $k > 1$; если же $k = 1$, то ряд может или сходиться, или расходиться.

Признак Коши. Знакоположительный ряд сходится, если, начиная с некоторого n, $\sqrt[n]{a_n} \leqslant q < 1$, и расходится, если $\sqrt[n]{a_n} \geqslant 1$.

В частности, если существует предел $\lim\limits_{n \to \infty} \sqrt[n]{a_n} = k$, то ряд сходится при $k < 1$ и расходится при $k > 1$; в случае, когда $k = 1$, ряд может или сходиться, или расходиться.

Интегральный признак сходимости. Общий член a_n ряда $a_1 + a_2 + \ldots + a_n + \ldots$ является функцией своего номера n: $a_n = f(n)$.

Если совпадающая с $f(n)$ при $x = n$ (n — целое положительное число) функция $f(x)$ непрерывна и монотонна при всех значениях $x \geqslant \alpha$ (α — любое число), то данный ряд сходится, если интеграл $\int\limits_{\alpha}^{\infty} f(x)\,dx$ — сходящийся, и расходится, если этот интеграл — расходящийся (стр. 114).

Пример. Ряд $1 + \frac{1}{2^p} + \frac{1}{3^p} + \ldots + \frac{1}{n^p} + \ldots$ сходится при $p > 1$ и расходится при $p < 1$, так как функция $f(x) = \frac{1}{x^p}$ монотонна и непрерывна при $x \geqslant 1$ и интеграл

$$\int\limits_1^{\infty} \frac{dx}{x^p} = \lim_{A \to \infty} \int\limits_1^{A} \frac{dx}{x^p} = \lim_{A \to \infty} \left[\frac{1}{p-1} - \frac{1}{(p-1)\,A^{p-1}} \right]$$

сходится $\left(\text{и равен } \frac{1}{p-1}\right)$ при $p > 1$ и расходится (равен ∞) при $p < 1$.

При $p = 1$ ряд тоже расходится (в этом случае мы имеем гармонический ряд), так как

$$\int\limits_1^{\infty} \frac{dx}{x} = \lim_{A \to \infty} \int\limits_1^{A} \frac{dx}{x} = \lim_{A \to \infty} \ln A = \infty.$$

Признак Лобачевского. Если члены ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f(n)$ монотонно убывают, то этот ряд сходится или расходится одновременно с рядом

$\sum_{m=1}^{\infty} p_m 2^{-m}$, где p_m определяются из неравенств:

$$f(p_m) \geqslant 2^{-m},$$
$$f(p_m + 1) \leqslant 2^{-m}.$$

Можно также определить p_m из равенства $f(p_m) = 2^{-m}$, если функция $f(x)$ монотонна и определена для любых значений x.

Пример. Исследовать сходимость ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$.

Из уравнения $\frac{1}{p_m^2} = 2^{-m}$ определяем $p_m = 2^{\frac{m}{2}}$ и составляем ряд $\sum_{n=1}^{\infty} p_m 2^{-m} = \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-\frac{m}{2}}$. Этот ряд является сходящейся геометрической прогрессией и, следовательно, ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$$

также сходится.

Признак В. П. Ермакова. Пусть при $x \geqslant \alpha$ (α — любое число) функция $f(x)$ монотонна и непрерывна; тогда ряд с общим членом $a_n = f(n)$ сходится, если существует такая постоянная $q < 1$, что при всяком $x > \alpha$

$$\frac{\varphi'(x) f[\varphi(x)]}{f(x)} \leqslant q < 1,$$

и расходится, если при всяком $x > \alpha$

$$\frac{\varphi'(x) f[\varphi(x)]}{f(x)} > 1,$$

где $\varphi(x)$ — произвольная дифференцируемая функция, удовлетворяющая условию $\varphi(x) > x$ при $x > \alpha$.

Если существует

$$\lim_{x \to \infty} \frac{\varphi'(x) f[\varphi(x)]}{f(x)} = K,$$

то ряд сходится при $K < 1$ и расходится при $K > 1$.

В частности, если положить $\varphi(x) = e^x$, то

$$K = \lim_{x \to \infty} \frac{e^x f(e^x)}{f(x)}.$$

Признак Даламбера может быть получен из признака Ермакова, если положить $\varphi(x) = x + 1$.

Пример. Приняв при исследовании сходимости ряда

$$\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \frac{1}{5 \cdot 6} + \ldots + \frac{1}{(2n-1)\,2n} + \ldots$$

$\varphi(x) = e^x$, получаем:

$$f(x) = \frac{1}{(2x-1)\,2x}; \qquad f[\varphi(x)] = \frac{1}{(2e^x - 1)\,2e^x};$$

$$\varphi'(x) = e^x$$

и

$$\lim_{x \to \infty} \frac{\varphi'(x)\, f[\varphi(x)]}{f(x)} = \lim_{x \to \infty} \frac{x\,(2x-1)}{2e^x - 1} = 0 < 1.$$

Следовательно, данный ряд сходится.

Знакочередующиеся ряды. Достаточный признак сходимости знакочередующегося ряда $u_1 - u_2 + u_3 - u_4 + \ldots + (-1)^{n+1} u_n + \ldots$ (здесь через u_1, u_2, ... обозначены абсолютные величины членов ряда): если $\lim_{n \to \infty} u_n = 0$ и, начиная с некоторого n (т. е. для всех $n \geq N$), абсолютная величина члена ряда изменяется монотонно ($u_n \geq u_{n+1} \geq \ldots$), то знакочередующийся ряд сходится (*теорема Лейбница*).

Если ряд удовлетворяет условиям теоремы Лейбница, то абсолютная величина остатка ряда при $n \geq N$ не превосходит абсолютной величины первого отброшенного члена ряда $|R_n| \leq u_{n+1}$.

Например, ряд $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \ldots$ сходится, так как оба условия, входящих в признак Лейбница, выполнены.

Абсолютная и условная сходимость. Если ряд $|a_1| + |a_2| + \ldots + |a_n| + \ldots$, составленный из абсолютных величин членов данного ряда $a_1 + a_2 + \ldots + a_n + \ldots$, сходится, то данный ряд тоже сходится и называется *абсолютно сходящимся* рядом.

Например, ряд $1 - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} - \frac{1}{4^2} + \ldots$ сходится абсолютно, так как ряд, членами которого являются абсолютные величины членов этого ряда, сходится, как это можно установить, например, с помощью интегрального признака.

Может случиться, что знакопеременный ряд сходится, тогда как ряд, составленный из абсолютных величин его членов, расходится. Такой ряд называется *неабсолютно* (или *условно*) сходящимся.

Например, ряд $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \ldots$ сходится (см. теорему Лейбница), в то время как ряд, составленный из абсолютных величин его членов (гармонический ряд), расходится; следовательно, данный ряд является условно сходящимся.

Свойства абсолютно и условно сходящихся рядов. Переместительное свойство сложения, имеющее место для конечных сумм, распространяется только на абсолютно сходящиеся ряды: произвольная перестановка членов абсолютно сходящегося ряда не может ни нарушить сходимость этого ряда, ни изменить его сумму. Для условно сходящегося ряда имеет место следующее предложение (*теорема Римана*): соответствующей перестановкой членов условно сходящегося ряда можно

его сумму сделать равной любому наперед заданному числу и даже превратить этот ряд в расходящийся.

Сочетательное свойство имеет место для всякого сходящегося ряда.

Действия над рядами. *Суммой (разностью)* рядов $a_1 + a_2 + \ldots + a_n + \ldots$, $b_1 + b_2 + \ldots + b_n + \ldots$ называется ряд $(a_1 \pm b_1) + (a_2 \pm b_2) + \ldots + (a_n \pm b_n) + \ldots$

Если данные ряды сходятся, то их сумма (разность) тоже является сходящимся рядом и притом сумма этого ряда равна сумме (разности) сумм данных рядов; сумма (разность) абсолютно сходящихся рядов есть тоже ряд абсолютно сходящийся.

Если данные ряды расходятся, то их сумма (разность) может быть тем не менее сходящимся (и даже абсолютно сходящимся) рядом; если же один из данных рядов сходится, а другой расходится, то их сумма (разность) есть всегда ряд расходящийся.

Произведением рядов $a_1 + a_2 + \ldots + a_n + \ldots$, $b_1 + b_2 + \ldots + b_n + \ldots$ называется ряд $c_1 + c_2 + \ldots + c_n + \ldots$ с общим членом $c_n = a_1 b_n + a_2 b_{n-1} + \ldots + a_n b_1$.

Если каждый из двух данных рядов сходящийся и при этом по крайней мере один из них сходится абсолютно, то их произведение представляет собой сходящийся ряд, сумма которого равна произведению сумм данных рядов. Если оба ряда сходятся абсолютно, то их произведение — тоже абсолютно сходящийся ряд.

Суммы некоторых числовых рядов

1) $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \ldots + \frac{1}{2^n} + \ldots = 2;$

2) $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{8} + \ldots \pm \frac{1}{2^n} \mp \ldots = \frac{2}{3};$

3) $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \ldots \pm \frac{1}{n} \mp \ldots = \ln 2;$

4) $1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \ldots \pm \frac{1}{2n-1} \mp \ldots = \frac{\pi}{4};$

5) $1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \ldots + \frac{1}{n!} + \ldots = e;$

6) $1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \ldots \pm \frac{1}{n!} \mp \ldots = \frac{1}{e};$

7) $1 - \frac{1}{3!} + \frac{1}{5!} - \frac{1}{7!} + \ldots \pm \frac{1}{(2n-1)!} \mp \ldots = \sin 1;$

8) $1 - \frac{1}{2!} + \frac{1}{4!} - \frac{1}{7!} + \ldots \pm \frac{1}{(2n-2)!} \mp \ldots = \cos 1;$

9) $\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \ldots + \frac{1}{n(n+1)} + \ldots = 1;$

10) $\frac{1}{1 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 5} + \frac{1}{5 \cdot 7} + \ldots + \frac{1}{(2n-1)(2n+1)} + \ldots = \frac{1}{2};$

11) $\frac{1}{1 \cdot 3} + \frac{1}{2 \cdot 4} + \frac{1}{3 \cdot 5} + \ldots + \frac{1}{(n-1)(n+1)} + \ldots = \frac{3}{4};$

12) $\frac{1}{3\cdot5}+\frac{1}{7\cdot9}+\frac{1}{11\cdot13}+\ldots+\frac{1}{(4n-1)(4n+1)}+\ldots=\frac{1}{2}-\frac{\pi}{8}$;

13) $\frac{1}{1\cdot2\cdot3}+\frac{1}{2\cdot3\cdot4}+\frac{1}{3\cdot4\cdot5}+\ldots+\frac{1}{n(n+1)(n+2)}+\ldots=\frac{1}{4}$;

14) $\frac{1}{1\cdot2\ldots k}+\frac{1}{2\cdot3\ldots(k+1)}+\frac{1}{3\cdot4\ldots(k+2)}+\ldots+$

$+\frac{1}{n(n+1)\ldots(n+k-1)}+\ldots=\frac{1}{(k-1)(k-1)!}$;

15) $1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}+\ldots+\frac{1}{n^2}+\ldots=\frac{\pi^2}{6}$;

16) $1-\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}-\frac{1}{4^2}+\ldots\pm\frac{1}{n^2}\mp\ldots=\frac{\pi^2}{12}$;

17) $1+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{5^2}+\frac{1}{7^2}+\ldots+\frac{1}{(2n+1)^2}+\ldots=\frac{\pi^2}{8}$;

18) $1-\frac{1}{3^2}+\frac{1}{5^2}-\frac{1}{7^2}+\ldots\pm\frac{1}{(2n+1)^2}\mp\ldots=\frac{\pi^2}{32}$;

19) $1+\frac{1}{2^4}+\frac{1}{3^4}+\frac{1}{4^4}+\ldots+\frac{1}{n^4}+\ldots=\frac{\pi^4}{90}$;

20) $1-\frac{1}{2^4}+\frac{1}{3^4}-\frac{1}{4^4}+\ldots\pm\frac{1}{n^4}\mp\ldots=\frac{7\pi^4}{720}$;

21) $1+\frac{1}{3^4}+\frac{1}{5^4}+\frac{1}{7^4}+\ldots+\frac{1}{(2n+1)^4}+\ldots=\frac{\pi^4}{96}$.

§ 1-19. Функциональные ряды

Сходимость. *Областью сходимости* функционального ряда $f_0(x)+f_1(x)+\ldots+f_n(x)+\ldots$ называется совокупность всех значений аргумента x, при которых этот ряд сходится.

Суммой этого ряда называется $\lim\limits_{n\to\infty} S_n(x)=S(x)$, где

$$S_n(x)=f_0(x)+f_1(x)+\ldots+f_n(x).$$

Областью сходимости *степенного ряда*

$$a_0+a_1x+a_2x^2+\ldots+a_nx^n+\ldots$$

всегда является интервал (*интервал сходимости*) с центром в точке $x=0$, причем во всех внутренних точках этого интервала ряд сходится абсолютно; на концах интервала сходимости ряд может или сходиться или расходиться. Половина длины интервала сходимости называется *радиусом сходимости* ряда. Радиус сходимости r степенного ряда определяется формулой $\frac{1}{r}=\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}$ (если этот предел существует или бесконечен).

Если радиус сходимости равен нулю, то ряд сходится только в точке $x=0$; если радиус сходимости бесконечен, то ряд сходится при всех значениях аргумента $(-\infty<x<\infty)$.

Для степенного ряда более общего вида

$$a_0+a_1(x-\alpha)+a_2(x-\alpha)^2+\ldots+a_n(x-\alpha)^n+\ldots$$

центром интервала сходимости служит точка $x=\alpha$.

Можно, не прибегая к приведенной выше формуле для радиуса сходимости (которая к тому же не всегда применима), определить интервал сходимости степенного ряда непосредственно, применяя признаки сходимости знакоположительных рядов к ряду, составленному из абсолютных величин членов исследуемого степенного ряда. При исследовании сходимости на концах интервала признаки Коши и Даламбера чаще всего не решают вопроса о сходимости, и здесь следует прибегать к другим признакам (интегральный, признак Лейбница и т. п.).

Пример. Определить интервал сходимости ряда

$$\frac{x+1}{2\cdot 1}+\frac{(x+1)^2}{2^2\cdot 2}+\frac{(x+1)^3}{2^3\cdot 3}+\ldots+\frac{(x+1)^n}{2^n\cdot n}+\ldots$$

Общий член ряда: $u_n=\dfrac{(x+1)^n}{2^n n}$. Применяя признак Даламбера к ряду, составленному из абсолютных величин членов данного ряда, получаем:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{|u_{n+1}|}{|u_n|}=\lim\left|\frac{(x+1)^{n+1}2^n n}{(x+1)^n 2^{n+1}(n+1)}\right|=\frac{|x+1|}{2}<1.$$

Решая неравенство, определяем интервал сходимости $-3<x<1$. При $x=1$ получаем гармонический ряд, который расходится, а при $x=-3$ имеем ряд $-1+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\ldots$, который сходится и притом условно (см. теорему Лейбница). Итак, ряд сходится, если $-3\leq x<1$.

Равномерная сходимость. Функциональный ряд

$$f_0(x)+f_1(x)+\ldots+f_n(x)+\ldots$$

называется *равномерно сходящимся* в некоторой области, если, каково бы ни было число $\varepsilon>0$, всегда можно найти такое $N(\varepsilon)$, что при $n>N(\varepsilon)$ для всех значений x, принадлежащих этой области, имеет место неравенство $|R_n(x)|<\varepsilon$, где $R_n(x)=f_{n+1}(x)+f_{n+2}(x)+\ldots$

Если абсолютные величины членов данного функционального ряда не превосходят в некоторой области величин соответствующих членов сходящегося числового знакоположительного ряда, то данный ряд сходится в этой области равномерно *(признак Вейерштрасса)*. Если ряд сходится равномерно на некотором отрезке, то его сумма $S(x)$ непрерывна, и этот ряд можно на данном отрезке почленно интегрировать, т. е. для всех значений x и a, принадлежащих рассматриваемому отрезку, имеет место равенство

$$\int_a^x S(x)\,dx=\int_a^x f_0(x)\,dx+\int_a^x f_1(x)\,dx+\ldots+\int_a^x f_n(x)\,dx+\ldots,$$

причем сходимость ряда, стоящего в правой части, равномерна.

Если в некоторой области производные членов данного функционального ряда непрерывны и ряд, составленный из этих производных, сходится равномерно, то сумма этого последнего ряда равна производной от суммы исходного ряда, т. е.

$$S'(x)=f_0'(x)+f_1'(x)+\ldots+f_n'(x)+\ldots$$

Степенной ряд сходится равномерно на всяком отрезке, лежащем целиком внутри интервала сходимости этого ряда.

При дифференцировании и интегрировании степенного ряда интервал сходимости не изменяется.

Ряды Тейлора и Маклорена. *Ряд Тейлора* позволяет представить заданную функцию $f(x)$ как сумму степенного ряда

$$f(x)=f(a)+\frac{x-a}{1!}f'(a)+\frac{(x-a)^2}{2!}f''(a)+\ldots+\frac{(x-a)^n}{n!}f^{(n)}(a)+\ldots$$

Это разложение справедливо, если *остаточный член* ряда $R_n(x)=f(x)-S_n(x)$ стремится к нулю при $n\to\infty$.

Здесь $S_n(x)=f(a)+\frac{x-a}{1!}f'(a)+\ldots+\frac{(x-a)^n}{n!}f^{(n)}(a)$.

Формулы для остаточного члена:

1) $R_n(x)=\frac{1}{n!}\int\limits_a^x(x-t)^n f^{(n+1)}(t)\,dt$ — *интегральная форма*;

2) $R_n(x)=\frac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)!}f^{(n+1)}[a+\theta(x-a)]\quad(0<\theta<1)$ — *форма Лагранжа*;

3) $R_n(x)=\frac{(x-a)^{n+1}}{n!}(1-\theta)^n f^{(n+1)}[a+\theta(x-a)]\quad(0<\theta<1)$ — *форма Коши*.

Равенство $f(x)=S_n(x)+R_n(x)$, где $S_n(x)$ — частная сумма ряда Тейлора, называется *формулой Тейлора*.

Ряд Маклорена получается из ряда Тейлора при $a=0$:

$$f(x)=f(0)+\frac{x}{1!}f'(0)+\frac{x^2}{2!}f''(0)+\ldots+\frac{x^n}{n!}f^{(n)}(0)+\ldots$$

Формулы для остаточного члена:

$$R_n(x)=\frac{1}{n!}\int\limits_0^x(x-t)^n f^{(n+1)}(t)\,dt=\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}f^{(n+1)}(\theta_1 x)=$$

$$=\frac{x^{n+1}}{n!}(1-\theta_2)^n f^{(n+1)}(\theta_2 x)\quad(0<\theta_1<1,\ 0<\theta_2<1).$$

Ряд Тейлора для функции двух переменных:

$$f(x+h,\,y+k)=f(x,y)+\frac{1}{1!}\left[\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}h+\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}k\right]+$$

$$+\frac{1}{2!}\left[\frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x^2}h^2+2\frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x\partial y}hk+\frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial y^2}k^2\right]+\ldots$$

или (в символической записи)

$$f(x+h,\,y+k)=f(x,y)+\frac{1}{1!}\left(\frac{\partial}{\partial x}h+\frac{\partial}{\partial y}k\right)f(x,y)+$$

$$+\frac{1}{2!}\left(\frac{\partial}{\partial x}h+\frac{\partial}{\partial y}k\right)^2 f(x,y)+\ldots+\frac{1}{n!}\left(\frac{\partial}{\partial x}h+\frac{\partial}{\partial y}k\right)^n f(x,y)+\ldots$$

Остаточный член ряда:

$$R_n(x)=\frac{1}{(n+1)!}\left(\frac{\partial}{\partial x}h+\frac{\partial}{\partial y}k\right)^{n+1}f(x+\theta_1 h;\,y+\theta_2 k)$$
$$(0<\theta_1<1,\ 0<\theta_2<1).$$

Разложение некоторых функций в степенные ряды

Разложение в ряд	Область сходимости ряда к заданной функции
$(a+x)^m = a^m + ma^{m-1}x + \ldots + \frac{m(m-1)\ldots(m-n+1)}{n!}a^{m-n}x^n + \ldots$	$-\lvert a\rvert < x < +\lvert a\rvert$
$a^x = 1 + \frac{x\ln a}{1!} + \frac{x^2\ln^2 a}{2!} + \ldots + \frac{x^n\ln^n a}{n!} + \ldots$	$-\infty < x < +\infty$
$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + \ldots$	$-\infty < x < +\infty$
$\sin x = \frac{x}{1!} - \frac{x^3}{3!} + \ldots + (-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \ldots$	$-\infty < x < +\infty$
$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \ldots + (-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!} + \ldots$	$-\infty < x < +\infty$
$\operatorname{tg} x = x + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} + \frac{17x^7}{315} + \frac{62x^9}{2\,835} + \ldots$	$-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$
$\operatorname{ctg} x = \frac{1}{x} - \left\{\frac{x}{3} + \frac{x^3}{45} + \frac{2x^5}{945} + \frac{x^7}{4725} + \ldots\right\}$	$-\pi < x < \pi$, кроме $x=0$

Продолжение

Разложение в ряд	Область сходимости ряда к заданной функции
$\arcsin x = x + \frac{1 \cdot x^3}{2 \cdot 3} + \frac{1 \cdot 3 \cdot x^5}{2 \cdot 4 \cdot 5} + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot x^7}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 7} + \ldots + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \ldots (2n-1)\, x^{2n+1}}{2 \cdot 4 \cdot 6 \ldots (2n) \cdot (2n+1)} + \ldots$	$-1 < x < 1$
$\operatorname{arc\,tg} x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + \ldots$	$-1 \leqslant x \leqslant 1$
$\operatorname{sh} x = \frac{x}{1!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots + \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \ldots$	$-\infty < x < +\infty$
$\operatorname{ch} x = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \ldots + \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \ldots$	$-\infty < x < +\infty$
$\operatorname{th} x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} - \frac{17x^7}{315} + \ldots$	$-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$
$\operatorname{cth} x = \frac{1}{x} + \frac{x}{3} - \frac{x^3}{45} + \frac{2x^5}{945} - \frac{x^7}{4\,725} + \ldots$	$-\pi < x < \pi$, кроме $x = 0$
$\operatorname{Ar\,sh} x = x - \frac{x^3}{2 \cdot 3} + \frac{1 \cdot 3 \cdot x^5}{2 \cdot 4 \cdot 5} - \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot x^7}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 7} + \ldots + (-1)^n \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \ldots (2n-1)\, x^{2n+1}}{2 \cdot 4 \cdot 6 \ldots (2n)\,(2n+1)} + \ldots$	$-1 \leqslant x \leqslant 1$

Продолжение

Разложение в ряд	Область сходимости ряда к заданной функции
$\operatorname{Arth} x = x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \ldots + \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + \ldots$	$-1 < x < 1$
$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \ldots + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} + \ldots$	$-1 < x \leqslant 1$
$\ln x = 2\left[\frac{x-1}{x+1} + \frac{1}{3}\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^3 + \frac{1}{5}\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^5 + \ldots + \frac{1}{2n+1}\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^{2n+1} + \ldots\right]$	$x > 0$
$\ln\frac{1+x}{1-x} = 2\left[x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \ldots + \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + \ldots\right]$	$-1 < x < 1$
$\ln\frac{x+1}{x-1} = 2\left[\frac{1}{x} + \frac{1}{3x^3} + \frac{1}{5x^5} + \ldots + \frac{1}{(2n+1)x^{2n+1}} + \ldots\right]$	$x < -1,\ x > 1$
$\int_0^x \frac{\sin x}{x}\,dx = \frac{x}{1\cdot 1!} - \frac{x^3}{3\cdot 3!} + \frac{x^5}{5\cdot 5!} - \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)(2n+1)!} + \ldots$	$-\infty < x < +\infty$
$\int_0^x e^{-x^2}dx = \frac{x}{1} - \frac{x^3}{3\cdot 1!} + \frac{x^5}{5\cdot 2!} - \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)n!} + \ldots$	$-\infty < x < +\infty$

Оценка остаточного члена. При помощи разложения функции в степенной ряд вычисляются приближенные значения алгебраических и трансцендентных функций. Ошибка, совершаемая при замене суммы ряда его частной суммой, равна остаточному члену ряда. При такого рода вычислениях требуется уметь решать следующие три основные задачи:

1. Оценить ошибку, зная число членов частной суммы, принятой за приближенное численное значение функции, т. е. оценить $|R_n(x)|$ при данных значениях n и x.

2. Задавшись максимально допустимой величиной ошибки, найти число членов частной суммы, которую можно принять за искомое численное значение функции, т. е. найти наименьшее n из неравенства $|R_n(x)| < \delta$, где x и δ даны.

3. Определить, для каких значений аргумента приближенная формула, полученная заменой суммы ряда его частной суммой с определенным числом членов, дает ошибку, не превышающую заданной величины, т. е. решить относительно x неравенство $|R_n(x)| < \delta$, где n и δ известны.

Пример 1. Какова величина допущенной ошибки, если положить $e \approx 2 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!}$?

Берем в разложении функции e^x остаточный член в форме Лагранжа $R_n(x) = \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} e^{\theta x}$; так как $n=4$ и $x=1$, то $e^{\theta x} < e < 3$ и $|R_4(1)| < \frac{3}{5!} = 0{,}025$.

Пример 2. Сколько нужно взять членов ряда

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \dots,$$

чтобы вычислить число e с точностью до 0,0001?

Имеем: $R_n(1) = \frac{e^\theta}{(n+1)!}$; $e^0 < e < 3$. Следовательно, достаточно взять n, удовлетворяющее неравенству $\frac{3}{(n+1)!} < 0{,}0001$; наименьшее значение, удовлетворяющее этому неравенству $n=7$ ($8! = 40\,320$); итак, с точностью до 0,0001

$$e \approx 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \frac{1}{5!} + \frac{1}{6!} + \frac{1}{7!}.$$

Пример 3. При каких значениях x приближенная формула $\cos x \approx 1 - \frac{x^2}{2}$ дает ошибку, не превышающую 0,001?

Здесь $n=3$, $R_3(x) = \frac{\cos \theta x}{4!} x^4$; так как $|\cos \theta x| < 1$, то $|R_3(x)| < \frac{x^4}{4!}$. Решив неравенство $\frac{x^4}{4!} < 0{,}001$, получаем

$$|x| < \sqrt[4]{0{,}024} \approx 0{,}394 \quad \text{(радианов)} \approx 22°23'.$$

Ряды Фурье. Разложение в ряд Фурье. Если функция $f(x)$, определенная в интервале $(-\pi, \pi)$, удовлетворяет *условиям Дирихле*, т. е. если она в этом интервале: а) равномерно ограничена (т. е. существует

такая постоянная M, что $|f(x)|<M$ во всех точках интервала); б) имеет не более чем конечное число точек разрыва и притом только первого рода (стр. 88); в) имеет не более чем конечное число точек максимума и минимума, то она может быть разложена в *ряд Фурье*, т. е. в *тригонометрический ряд* вида

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx),$$

где числа $a_0,\ a_1,\ b_1,\ \ldots,\ a_n,\ b_n,\ \ldots$ *(коэффициенты Фурье)* определяются по *формулам Эйлера—Фурье:*

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos nx\,dx \qquad (n=0,\ 1,\ 2,\ \ldots);$$

$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin nx\,dx \qquad (n=1,\ 2,\ \ldots).$$

Роль интервала $(-\pi,\ \pi)$ может играть любой интервал $(a,\ a+2\pi)$, в частности интервал $(0,\ 2\pi)$. В этом последнем случае коэффициенты Фурье вычисляются по формулам:

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{0}^{2\pi}f(x)\cos nx\,dx \qquad (n=0,\ 1,\ 2,\ \ldots),$$

$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_{0}^{2\pi}f(x)\sin nx\,dx \qquad (n=1,\ 2,\ \ldots).$$

В случае интервала $(-\pi,\ \pi)$ сумма ряда Фурье $S(x)$ равна: а) значению функции $f(x)$ в каждой точке, где $f(x)$ непрерывна; б) среднему арифметическому предельных значений $f(x)$ слева и справа (стр. 88) во всякой точке разрыва (рис. 1-168), т. е.

$$S(x)=\frac{f(x-0)+f(x+0)}{2},$$

где

$$f(x-0)=\lim_{\varepsilon\to 0}f(x-\varepsilon)$$

и $f(x+0)=\lim\limits_{\varepsilon\to 0}f(x+\varepsilon)$ $\qquad(\varepsilon>0).$

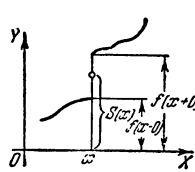


Рис. 1-168.

Вне интервала $(-\pi,\ \pi)$ сумма ряда представляет собой периодическое (с периодом 2π) продолжение определенной выше функции $S(x)$.

Если функция $f(x)$ четная, т. е. $f(-x)=f(x)$, то $b_n=0$ $(n=1, 2, \ldots)$, и она разлагается в *неполный ряд Фурье* по косинусам кратных дуг:

$$\frac{a_0}{2}+a_1\cos x+a_2\cos 2x+\ldots+a_n\cos nx+\ldots,$$

где коэффициенты a_n могут быть вычислены по формулам:

$$a_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\cos nx\,dx \qquad (n=0, 1, 2, \ldots).$$

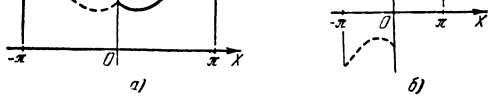
Если функция $f(x)$ нечетная, т. е. $f(-x)=-f(x)$, то $a_n=0$ $(n=0, 1, 2, \ldots)$, и она разлагается в *неполный ряд Фурье* по синусам кратных дуг:

$$b_1\sin x+b_2\sin 2x+\ldots+b_n\sin nx+\ldots,$$

где коэффициенты b_n могут быть вычислены по формулам:

$$b_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\sin nx\,dx \qquad (n=1, 2, \ldots).$$

Функция, заданная в интервале $(0, \pi)$, может быть продолжена в интервал $(-\pi, 0)$ либо как четная функция (рис. 1-169, *а*), либо как нечетная (рис. 1-169, *б*), по нашему усмотрению; если она удовлетворяет условиям Дирихле в интервале, на котором она определена, то ее можно разложить, по желанию, в неполный ряд Фурье по одним синусам или по одним косинусам кратных дуг.



а) *б)*

Рис. 1-169.

В более общем случае, если функция $f(x)$ определена и удовлетворяет условиям Дирихле в интервале $(-l, l)$, ее можно разложить в ряд вида

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\frac{n\pi x}{l}+b_n\sin\frac{n\pi x}{l}\right),$$

где

$$a_n = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\cos\frac{n\pi x}{l}\,dx, \quad b_n = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\sin\frac{n\pi x}{l}\,dx$$

$(n = 0, 1, 2, \ldots$ для a_n и $1, 2, \ldots$ для $b_n)$

Сумма такого ряда Фурье $S(x)$ определяется так же, как и в предыдущем частном случае.

Если функция $f(x)$ четная, то $b_n = 0$ и $a_n = \frac{2}{l}\int_0^l f(x)\cos\frac{n\pi x}{l}\,dx$.

Если же $f(x)$ — нечетная, то и $b_n = \frac{2}{l}\int_0^l f(x)\sin\frac{n\pi x}{l}\,dx$.

Свойства коэффициентов Фурье. Если некоторая функция $f(x)$ приближенно заменена на интервале (a, b) функцией $\varphi(x)$, то *средней квадратической погрешностью* такого приближения называется число δ, определяемое равенством $\delta^2 = \frac{1}{b-a}\int_a^b [f(x) - \varphi(x)]^2\,dx$.

Коэффициенты Фурье функции $f(x)$ обладают следующим *минимальным свойством* средняя квадратичная погрешность приближенного выражения функции $f(x)$ на интервале $(-\pi, \pi)$ при помощи тригонометрического полинома n-го порядка $\frac{a_0}{2} + a_1\cos x + b_1\sin x + a_2\cos 2x + b_2\sin 2x + \ldots + a_n\cos nx + b_n\sin nx$ будет наименьшей, если коэффициенты такого многочлена взять равными соответствующими коэффициентами Фурье функции $f(x)$.

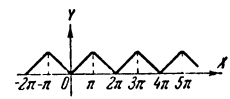
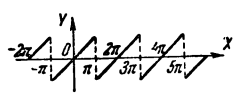
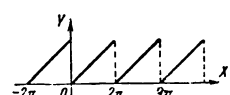
Коэффициенты Фурье функции $f(x)$ связаны со средней квадратичной величиной этой функции *равенством Парсеваля*.

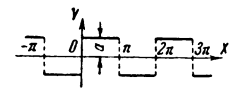
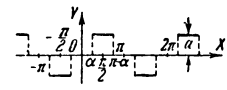
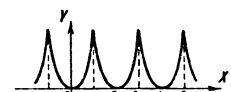
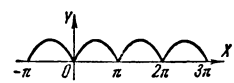
$$\frac{a_0^2}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}(a_k^2 + b_k^2) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}[f(x)]^2\,dx.$$

Если функция $f(x)$ удовлетворяет на любом конечном интервале условиям Дирихле и интеграл $\int_{-\infty}^{\infty}|f(x)|\,dx$ сходится (см. стр. 114), то имеет место предельная (при $l \to \infty$) формула разложения функции в ряд Фурье *(интеграл Фурье)*

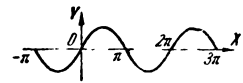
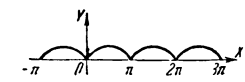
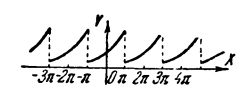
$$f(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\infty} ds \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\cos s(t-x)\,dt.$$

Разложение некоторых функций в ряды Фурье

Функция	Разложение в ряд	Область сходимости ряда к заданной функции	График суммы ряда
$y = x$	$\frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\left(\frac{\cos x}{1^2} + \frac{\cos 3x}{3^2} + \frac{\cos 5x}{5^2} + \ldots\right)$	$0 \leqslant x \leqslant \pi$	
$y = x$	$2\left(\frac{\sin x}{1} - \frac{\sin 2x}{2} + \frac{\sin 3x}{3} - \ldots\right)$	$-\pi < x < \pi$	
$y = x$	$\pi - 2\left(\frac{\sin x}{1} + \frac{\sin 2x}{2} + \frac{\sin 3x}{3} + \ldots\right)$	$0 < x < 2\pi$	

Функция	Разложение в ряд	Область сходимости ряда к заданной функции	График суммы ряда
$y = a$	$\frac{4a}{\pi}\left(\frac{\sin x}{1} + \frac{\sin 3x}{3} + \frac{\sin 5x}{5} + \ldots\right)$	$0 < x < \pi$	
$y = 0$ при $0 \leqslant x < \alpha$ и при $\pi - \alpha < x \leqslant \pi$, $y = a$ при $\alpha < x < \pi - \alpha$	$\frac{4a}{\pi}\left(\frac{\cos\alpha \sin x}{1} + \frac{1}{3}\cos 3\alpha \sin 3x + \frac{1}{5}\cos 5\alpha \sin 5x + \ldots\right)$	$0 \leqslant x \leqslant \pi$, кроме $x = \alpha$ и $x = \pi - \alpha$	
$y = x^2$	$\frac{\pi^2}{3} - 4\left(\frac{\cos x}{1} - \frac{\cos 2x}{2^2} + \frac{\cos 3x}{3^2} - \ldots\right)$	$-\pi \leqslant x \leqslant \pi$	
$y = x(\pi - x)$	$\frac{\pi^2}{6} - \left(\frac{\cos 2x}{1^2} + \frac{\cos 4x}{2^2} + \frac{\cos 6x}{3^2} + \ldots\right)$	$0 \leqslant x \leqslant \pi$	

Продолжение

Функция	Разложение в ряд	Область сходимости ряда к заданной функции	График суммы ряда
$x = x(\pi - x)$	$\frac{8}{\pi}\left(\frac{\sin x}{1^3} + \frac{\sin 3x}{3^3} + \frac{\sin 5x}{5^3} + \ldots\right)$	$0 \leqslant x \leqslant \pi$	
$y = \sin x$	$\frac{2}{\pi} - \frac{4}{\pi}\left(\frac{\cos 2x}{1 \cdot 3} + \frac{\cos 4x}{3 \cdot 5} + \frac{\cos 6x}{5 \cdot 7} + \ldots\right)$	$0 \leqslant x \leqslant \pi$	
$y = \cos x$	$\frac{8}{\pi}\left(\frac{\sin 2x}{1 \cdot 3} + \frac{2 \sin 4x}{3 \cdot 5} + \frac{3 \sin 6x}{5 \cdot 7} + \ldots\right)$	$0 < x < \pi$	
$y = e^x$	$\frac{1}{\pi}\operatorname{sh}\pi + \frac{2}{\pi}\operatorname{sh}\pi \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{\cos kx - k \sin kx}{1+k^2}$	$-\pi < x < \pi$	

Глава 1-8

ВЕКТОРНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ

§ 1-20. Векторная алгебра

Основные понятия. Величины, которые характеризуются одним положительным или отрицательным числом, называются *скалярными* или *скалярами* (длина, температура, масса, работа и т. д.). Величины, для определения которых необходимо знать размеры и их направление в пространстве, называются *векторными* или *векторами* (сила, скорость, ускорение и т. д.). Геометрически векторная величина изображается направленным отрезком AB и обозначается $\overline{AB} = \mathbf{a}$ (рис. 1-170). Точка A называется *началом (точкой приложения)*, а B — *концом* вектора. Длина вектора $\mathbf{a}$ обозначается через $|\mathbf{a}|$ или a. Она называется также его *модулем*.

Нуль-вектор (0) — вектор, у которого начало и конец совпадают; его длина равна нулю, а направление неопределенное.

Два вектора считаются равными ($\mathbf{a} = \mathbf{b}$), если равны их длины и они одинаково направлены.

Векторы, параллельные одной и той же прямой, называются *коллинеарными*. Векторы называются *взаимно-противоположными*, если они равны по длине и противоположны по направлению.

Векторы, расположенные в одной или в параллельных плоскостях, называются *компланарными*.

Ортом или *единичным вектором* вектора $\mathbf{a}$ называется вектор, совпадающий с ним по направлению и имеющий длину, равную единице (обозначение: $\mathbf{a}^0$).

Орты координатных осей обозначаются через $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$, $\mathbf{k}$.

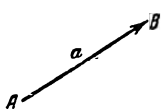


Рис. 1-170.

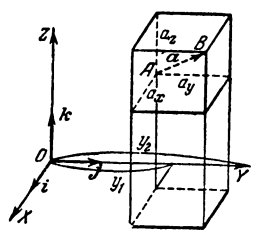


Рис. 1-171.

Проекции вектора $\mathbf{a}$ на оси прямоугольной декартовой системы координат (рис. 1-171) связаны с длиной вектора и его направляющими косинусами соотношениями:

$$a_x = |\mathbf{a}| \cos(\widehat{\mathbf{a}, x}); \quad a_y = |\mathbf{a}| \cos(\widehat{\mathbf{a}, y}); \quad a_z = |\mathbf{a}| \cos(\widehat{\mathbf{a}, z}).$$

Проекция положительна или отрицательна в зависимости от того, образует ли вектор острый или тупой угол с положительным направлением соответствующей координатной оси.

Вектор вполне определен тремя скалярами — своими проекциями на оси координат.

Проекции a_x, a_y, a_z называются также *координатами* вектора в координатной системе XYZ.

Если x_1, y_1, z_1 — координаты начала вектора, а x_2, y_2, z_2 — координаты его конца, то $a_x = x_2 - x_1$; $a_y = y_2 - y_1$; $a_z = z_2 - z_1$.

Длина вектора **a** и его направляющие косинусы определяются через проекции вектора по формулам:

$$|\mathbf{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2};$$

$$\cos(\widehat{\mathbf{a}, x}) = \frac{a_x}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}};$$

$$\cos(\widehat{\mathbf{a}, y}) = \frac{a_y}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}};$$

$$\cos(\widehat{\mathbf{a}, z}) = \frac{a_z}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}}.$$

Вектор $\overline{OM} = \mathbf{r}$ называется *радиусом-вектором* точки M, если начало его совпадает с началом координат, а конец с точкой M; проекции радиуса-вектора **r** (рис. 1-172) равны координатам точки M: $r_x = x$; $r_y = y$; $r_z = z$.

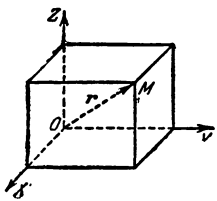


Рис. 1-172.

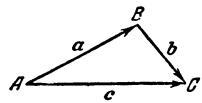


Рис. 1-173.

Действия над векторами. *Суммой* двух векторов $\mathbf{a} = \overline{AB}$ и $\mathbf{b} = \overline{BC}$ называется вектор $\mathbf{c} = \overline{AC}$ (рис. 1-173), идущий из начала A первого слагаемого **a** к концу C второго слагаемого **b**: $\mathbf{c} = \mathbf{a} + \mathbf{b}$.

Сумма векторов **a**, **b**, ..., **e** (рис. 1-174) есть вектор $\mathbf{g} = \overline{AG}$, замыкающий ломаную $ABC \ldots G$, составленную из векторов-слагаемых: $\mathbf{g} = \mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c} + \ldots + \mathbf{e}$.

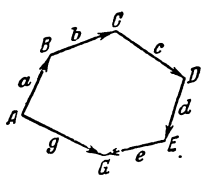


Рис. 1-174.

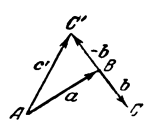


Рис. 1-175.

Векторная сумма обладает свойством *переместительности*: $\mathbf{a} + \mathbf{b} = \mathbf{b} + \mathbf{a}$, и свойством *сочетательности* $(\mathbf{a} + \mathbf{b}) + \mathbf{c} = \mathbf{a} + (\mathbf{b} + \mathbf{c})$

Разностью двух векторов $\mathbf{a} = \overline{AB}$ и $\mathbf{b} = \overline{BC}$ (рис. 1-175) называется вектор $\mathbf{c}' = \overline{AC}'$, соединяющий начало A вектора $\mathbf{a}$ с концом C вектора $-\mathbf{b}$, противоположного вектору $\mathbf{b}$ ($\overline{BC}' = -\overline{BC}$). Эта разность является суммой векторов $\mathbf{a}$ и $-\mathbf{b}$: $\mathbf{c} = \mathbf{a} - \mathbf{b} = \mathbf{a} + (-\mathbf{b})$.

Сумма и разность двух векторов $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ (рис. 1-176) могут быть получены, как два вектора-диагонали параллелограмма с и $\mathbf{c}'$, построенного на векторах $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$.

Для модулей вектора-суммы и вектора-разности справедливы неравенства

$$|\mathbf{a}| - |\mathbf{b}| \leqslant |\mathbf{a} \pm \mathbf{b}| \leqslant |\mathbf{a}| + |\mathbf{b}|.$$

Координаты вектора-суммы и вектора-разности двух векторов равны соответственно сумме и разности координат составляющих векторов, т. е. если $\mathbf{c} = \mathbf{a} \pm \mathbf{b}$, то $c_x = a_x \pm b_x$; $c_y = a_y \pm b_y$; $c_z = a_z \pm b_z$.

Произведение скаляра m на вектор $\mathbf{a}$ есть вектор, коллинеарный с $\mathbf{a}$, имеющий длину $|m| \cdot |\mathbf{a}|$ и направление, совпадающее с $\mathbf{a}$ при $m > 0$ и противоположное $\mathbf{a}$ при $m < 0$.

Основные свойства: $m\mathbf{a} = \mathbf{a}m$; $m(n\mathbf{a}) = n(m\mathbf{a})$; $(m + n)\mathbf{a} = m\mathbf{a} + n\mathbf{a}$; $m(\mathbf{a} + \mathbf{b}) = m\mathbf{a} + m\mathbf{b}$.

Если вектор $\mathbf{b}$ коллинеарен вектору $\mathbf{a}$, то $\mathbf{b} = m\mathbf{a}$.

Если векторы $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ и $\mathbf{c}$ компланарны, то один из них является линейной комбинацией двух других, т. е. $\mathbf{c} = m\mathbf{a} + n\mathbf{b}$ (m и n — скаляры).

Выражение вектора $\mathbf{a}$ через свой единичный вектор $\mathbf{a}^0$: $\mathbf{a} = |\mathbf{a}|\,\mathbf{a}^0$.

Выражение вектора $\mathbf{a}$ через орты координатных осей:

$$\mathbf{a} = a_x\mathbf{i} + a_y\mathbf{j} + a_z\mathbf{k}.$$

Векторы $a_x\mathbf{i}$, $a_y\mathbf{j}$, $a_z\mathbf{k}$ называются *составляющими* или *компонентами* вектора $\mathbf{a}$ по координатным осям.

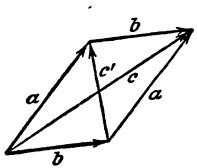


Рис. 1-176.

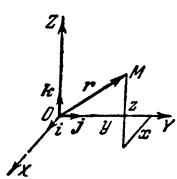


Рис. 1-177.

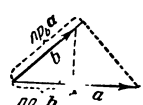


Рис. 1-178.

В частности, для радиуса-вектора $\mathbf{r}$ точки $M(x, y, z)$ (рис. 1-177) имеем $\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$.

Скалярным произведением двух векторов $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ (обозначение $\mathbf{ab}$) называется произведение длин векторов-сомножителей на косинус угла между ними или, иначе, произведение длины одного из векторов-сомножителей на проекцию второго (рис. 1-178) на направление первого:

$$\mathbf{ab} = |\mathbf{a}|\,|\mathbf{b}| \cos(\widehat{\mathbf{a}, \mathbf{b}}) = |\mathbf{a}|\, np_a\mathbf{b} = |\mathbf{b}|\, np_b\mathbf{a}.$$

Свойства скалярного произведения: $\mathbf{ab} = \mathbf{ba}$; $m \cdot \mathbf{ab} = m\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \mathbf{a} \cdot m\mathbf{b}$; $\mathbf{a}(\mathbf{b} + \mathbf{c}) = \mathbf{ab} + \mathbf{ac}$.

Скалярные произведения координатных ортов: $\mathbf{ii} = \mathbf{jj} = \mathbf{kk} = 1$; $\mathbf{ij} = \mathbf{jk} = \mathbf{ki} = 0$.

Выражение скалярного произведения двух векторов через координаты векторов-сомножителей $\mathbf{ab} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z$.

Угол между векторами **a** и **b** определяется по формуле

$$\cos(\widehat{\mathbf{a}, \mathbf{b}}) = \frac{\mathbf{ab}}{|\mathbf{a}|\,|\mathbf{b}|} = \frac{a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}\sqrt{b_x^2 + b_y^2 + b_z^2}}.$$

Условие перпендикулярности двух векторов $\mathbf{ab} = 0$, или в координатах $a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z = 0$.

Векторное произведение двух векторов **a** и **b** (обозначение: [**a b**] или $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$) есть вектор **c** с длиной, численно равной (рис. 1-179) площади параллелограмма, построенного на векторах-сомножителях, направленный перпендикулярно к плоскости параллелограмма таким образом, чтобы векторы **a**, **b** и **c** образовали правую тройку, т. е. чтобы кратчайший поворот от **a** к **b**, если смотреть с конца вектора **c**, совершался против направления движения часовой стрелки.

Рис. 1-179.

Модуль векторного произведения связан с модулями векторов-сомножителей равенством $|\mathbf{c}| = |\mathbf{a} \times \mathbf{b}| = |\mathbf{a}|\,|\mathbf{b}| \sin(\widehat{\mathbf{a}, \mathbf{b}})$. При перестановке местами векторов-сомножителей векторное произведение изменяет направление на противоположное $\mathbf{b} \times \mathbf{a} = -\mathbf{a} \times \mathbf{b}$.

Векторное произведение двух векторов обладает свойствами: $m(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) = m\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \mathbf{a} \times m\mathbf{b}$; $\mathbf{a} \times (\mathbf{b} + \mathbf{c}) = \mathbf{a} \times \mathbf{b} + \mathbf{a} \times \mathbf{c}$.

Векторные произведения координатных ортов: $\mathbf{i} \times \mathbf{i} = \mathbf{j} \times \mathbf{j} = \mathbf{k} \times \mathbf{k} = 0$; $\mathbf{i} \times \mathbf{j} = \mathbf{k}$; $\mathbf{j} \times \mathbf{k} = \mathbf{i}$; $\mathbf{k} \times \mathbf{i} = \mathbf{j}$; $\mathbf{j} \times \mathbf{i} = -\mathbf{k}$; $\mathbf{k} \times \mathbf{j} = -\mathbf{i}$; $\mathbf{i} \times \mathbf{k} = -\mathbf{j}$.

Выражение векторного произведения через координаты векторов-сомножителей:

$$\mathbf{c} = \mathbf{a} \times \mathbf{b} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix};$$

его проекции:

$$c_x = \begin{vmatrix} a_y & a_z \\ b_y & b_z \end{vmatrix}; \quad c_y = \begin{vmatrix} a_z & a_x \\ b_z & b_x \end{vmatrix}; \quad c_z = \begin{vmatrix} a_x & a_y \\ b_x & b_y \end{vmatrix}.$$

Площадь параллелограмма, построенного на векторах **a** и **b**, может быть вычислена по формуле

$$S = |\mathbf{a} \times \mathbf{b}| = \sqrt{\begin{vmatrix} a_y & a_z \\ b_y & b_z \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} a_z & a_x \\ b_z & b_x \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} a_x & a_y \\ b_x & b_y \end{vmatrix}^2}.$$

Условие коллинеарности двух векторов $\mathbf{a} \times \mathbf{b} = 0$, а в координатах:

$$\begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix} = 0,$$

или

$$\frac{a_x}{b_x} = \frac{a_y}{b_y} = \frac{a_z}{b_z}.$$

Смешанное (векторно-скалярное) произведение трех векторов **a**, **b** и **c** (рис. 1-180) [обозначение: $(\mathbf{a} \times \mathbf{b})\,\mathbf{c}$ или $\mathbf{abc}$] есть скаляр, по абсолютной величине равный объему параллелепипеда, построенного на векторах **a**, **b** и **c**, как на ребрах. Смешанное произведение положительно, если векторы **a**, **b** и **c** образуют правую тройку, и отрицательно, если они образуют левую тройку. Смешанное произведение трех векторов при перестановке двух сомножителей изменяет знак; при циклической (круговой) перестановке всех трех сомножителей не изменяет знака: $\mathbf{abc} = \mathbf{bca} = \mathbf{cab} = -\mathbf{acb} = -\mathbf{bac} = -\mathbf{cba}$.

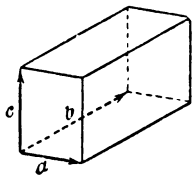


Рис. 1-180.

Выражение смешанного произведения трех векторов через координаты векторов-сомножителей:

$$\mathbf{abc} = \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}.$$

Условие компланарности трех векторов $\mathbf{abc} = 0$, или в координатах

$$\begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix} = 0.$$

Двойное векторное произведение трех векторов [обозначение: $\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c})$] есть вектор, компланарный векторам **b** и **c**; он может быть вычислен по формуле $\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = \mathbf{b}\,(\mathbf{ac}) - \mathbf{c}\,(\mathbf{ab})$.

§ 1-21. Векторный анализ

Вектор-функции. Если вектор **a** изменяется в зависимости от некоторого скалярного аргумента t, то он называется *вектор-функцией* скалярного аргумента $\mathbf{a} = \mathbf{a}(t)$.

Вектор-функция $\mathbf{a} = \mathbf{a}(t)$ может быть определена, если заданы три скалярные функции — ее проекции на координатные оси $a_x = a_x(t)$, $a_y = a_y(t)$, $a_z = a_z(t)$:

$$\mathbf{a} = a_x(t)\,\mathbf{i} + a_y(t)\,\mathbf{j} + a_z(t)\,\mathbf{k}.$$

Конец M переменного радиуса-вектора $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$ описывает кривую в пространстве (рис. 1-181), называемую *годографом* вектора **r**.

Уравнения годографа: $x = x(t)$; $y = y(t)$; $z = z(t)$ $(\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k})$.

Производная вектор-функции $\mathbf{a} = \mathbf{a}(t)$ *по скалярному аргументу* t

$$\frac{d\mathbf{a}(t)}{dt} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\mathbf{a}(t + \Delta t) - \mathbf{a}(t)}{\Delta t} =$$

$$= a'_x(t)\,\mathbf{i} + a'_y(t)\,\mathbf{j} + a'_z(t)\,\mathbf{k}.$$

Производная радиуса-вектора $\frac{d\mathbf{r}(t)}{dt} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \mathbf{r}(t)}{\Delta t}$ представляет собой вектор (рис. 1-182), касательный к годографу в соответствующей точке.

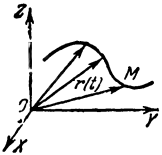


Рис. 1-181.

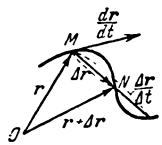


Рис. 1-182.

Длина вектора $\frac{d\mathbf{r}}{dt}$ зависит от выбора параметра t; если t есть длина дуги s годографа, отсчитываемой от некоторой начальной точки годографа до точки M, то длина вектора $\frac{d\mathbf{r}}{ds}$ равна единице.

Основные правила дифференцирования вектор-функции скалярного аргумента:

1) $\frac{d}{dt}(\mathbf{a} + \mathbf{b} - \mathbf{c}) = \frac{d\mathbf{a}}{dt} + \frac{d\mathbf{b}}{dt} - \frac{d\mathbf{c}}{dt}$;

2) $\frac{d(\varphi \mathbf{a})}{dt} = \frac{d\varphi}{dt}\mathbf{a} + \varphi \frac{d\mathbf{a}}{dt}$, где $\varphi = \varphi(t)$ — скалярная функция от t;

3) $\frac{d(\mathbf{ab})}{dt} = \frac{d\mathbf{a}}{dt}\mathbf{b} + \mathbf{a}\frac{d\mathbf{b}}{dt}$;

4) $\frac{d}{dt}(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) = \frac{d\mathbf{a}}{dt} \times \mathbf{b} + \mathbf{a} \times \frac{d\mathbf{b}}{dt}$;

5) $\frac{d}{dt}\mathbf{a}[\varphi(t)] = \frac{d\mathbf{a}}{d\varphi}\frac{d\varphi}{dt}$.

Для единичного вектора и вообще для вектора $\mathbf{r}$ постоянной длины имеет место соотношение $\mathbf{r}\frac{d\mathbf{r}}{dt} = 0$, которое показывает, что касательная к годографу перпендикулярна к радиусу-вектору; в этом случае годограф представляет собой кривую на поверхности сферы.

Скалярная функция $f(x, y, z)$, определенная во всех точках некоторой области, может рассматриваться как функция точки $P(x, y, z)$ этой области [обозначение: $f(P)$] и определяет некоторое *скалярное поле*. Поверхности $f(x, y, z) = c$ ($c = \text{const}$) называются *поверхностями уровня* данного скалярного поля [в случае функции двух переменных — функции точки на плоскости — кривые $f(x, y) = c$ — *линии уровня*].

Через всякую точку $M_0(x_0, y_0, z_0)$ проходит поверхность уровня, для которой значение c определяется равенством $c = f(M_0) = f(x_0, y_0, z_0)$.

Градиентом скалярного поля $f(P) = f(x, y, z)$ [обозначение: $\operatorname{grad} f(P)$ или $\operatorname{grad} f(x, y, z)$] в данной точке называется вектор, направленный по нормали n к поверхности уровня [для функции $f(x, y)$ к линии уровня] в этой точке в сторону возрастания функции и по длине равный производной данной функции по этому направлению (см. стр. 95):

$$|\operatorname{grad} f(x, y, z)| = \frac{\partial f(x, y, z)}{\partial n}.$$

Если l — произвольное направление, то производная $\frac{\partial f}{\partial l}$ равна проекции градиента на направление l:

$$\frac{\partial f}{\partial l} = \frac{\partial f}{\partial n} \cos(\widehat{l, n}) = |\operatorname{grad} f| \cos(\widehat{l, n}) = \operatorname{grad}_l f.$$

В частности, $\operatorname{grad}_x f = \frac{\partial t}{\partial x}$; $\operatorname{grad}_y f = \frac{\partial t}{\partial y}$; $\operatorname{grad}_z f = \frac{\partial f}{\partial z}$.

Вектор $\mathbf{A}(x, y, z)$, зависящий от координат точки $P(x, y, z)$ и определенный во всех точках некоторой области, называют *вектор-функцией* точки P или *векторным полем*.

Пример. Определить поле градиента функции $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$. Поверхности уровня этой функции $x^2 + y^2 + z^2 = C$ — сферические поверхности с центром в начале координат. Далее,

$\operatorname{grad}_x f = 2x$; $\operatorname{grad}_y f = 2y$; $\operatorname{grad}_z f = 2z$ и $|\operatorname{grad} f| = 2\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$.

Если дано векторное поле $\mathbf{A}(x, y, z)$, то в каждой точке (x, y, z) известны скалярные функции $A_x(x, y, z)$; $A_y(x, y, z)$; $A_z(x, y, z)$ — проекции вектора $\mathbf{A}$ на координатные оси (обратно: A_x, A_y, A_z определяют некоторое векторное поле).

Дивергенцией векторного поля $\mathbf{A}(P) = \mathbf{A}(x, y, z)$ (обозначение: $\operatorname{div} \mathbf{A}$) называется скаляр

$$\frac{\partial A_x(x, y, z)}{\partial x} + \frac{\partial A_y(x, y, z)}{\partial y} + \frac{\partial A_z(x, y, z)}{\partial z}.$$

Для вектор-функции $\mathbf{A}(x, y)$, зависящей от двух переменных:

$$\operatorname{div} \mathbf{A} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y}.$$

Вихрем векторного поля $\mathbf{A}(P) = \mathbf{A}(x, y, z)$ называется такой вектор $\mathbf{B}(x, y, z)$ (обозначение: $\mathbf{B} = \operatorname{rot} \mathbf{A}$ или $\mathbf{B} = \operatorname{curl} \mathbf{A}$), проекции которого на координатные оси B_x, B_y, B_z выражаются через проекции вектора $\mathbf{A}$ при помощи равенств:

$$B_x = \frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z}; \quad B_y = \frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x}; \quad B_z = \frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y}.$$

В случае вектор-функции $\mathbf{A}(x, y)$, зависящей от двух аргументов, имеем: $B_x = B_y = 0$, $B_z = \frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y}$ и вектор $\mathbf{B} = \operatorname{rot} \mathbf{A}$ направлен всегда по оси Z; в этом случае иногда удобно вихрь считать скаляром

$$B = B_z = \frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y}.$$

Циркуляция и поток. *Циркуляцией* вектора $\mathbf{A}(x, y, z)$ (циркуляцией векторного поля) по замкнутому пространственному контуру C называется криволинейный интеграл $\int_C A_s ds$, где ds — дифференциал

дуги контура C, а A_s — проекция вектора A на положительное направление касательной к контуру C.

Если $d\mathbf{s}$ — вектор, длина которого равна дифференциалу дуги и который направлен по касательной к контуру C в положительную сторону (dx, dy, dz — проекции вектора $d\mathbf{s}$ на координатные оси), то $A_s ds = \mathrm{A}d\mathbf{s}$.

Циркуляция вектора A по контуру C может быть записана в форме

$$\int_C \mathrm{A}d\mathbf{s} \text{ или } \int_C A_x dx + A_y dy + A_z dz.$$

Циркуляция для плоского векторного поля A (x, y):

$$\int_C A_s ds = \int_C \mathrm{A}d\mathbf{s} = \int_C A_x dx + A_y dy.$$

Потоком вектора A (x, y, z) (потоком векторного поля) через поверхность S называется интеграл по поверхности $\iint_S A_n dS$, где A_n — проекция вектора A на выбранное по нормали к поверхности направление n.

Если $d\mathbf{S}$ — вектор, длина которого численно равна элементарной площади dS поверхности и который направлен по нормали к поверхности в положительную сторону, то $A_n dS = \mathrm{A}d\mathbf{S}$ и поток вектора через поверхность можно записать в виде $\iint_S \mathrm{A}d\mathbf{S}$ или $\iint_S [A_x \cos(n, x) + A_y \cos(n, y) + A_z \cos(n, z)]\, dS$.

Поток плоского векторного поля A (x, y) через дугу l:

$$\int_l A_n ds = \int_l \mathrm{A}d\mathbf{n} = \int_l [A_x \cos(n, x) + A_y \cos(n, y)]\, ds = \int_l A_x dy - A_y dx,$$

где $d\mathbf{n}$ — вектор, длина которого равна ds и который направлен по нормали к контуру в положительную сторону.

Формулы Стокса (для плоского поля — *формула Грина*) и *Гаусса — Остроградского* (см. стр. 137 — 141) связывают циркуляцию и поток вектора с вихрем и дивергенцией:

1) $$\int_C A_s ds = \iint_\sigma \mathrm{rot}_n \mathrm{A}d\sigma,$$

где C — замкнутый контур, ограничивающий поверхность σ, а n — внешняя нормаль к поверхности (формула Стокса);

2) $$\int_\sigma A_n d\sigma = \iiint_V \mathrm{div}\mathrm{A}dV,$$

где σ — замкнутая поверхность, ограничивающая область V, а n — внешняя нормаль к поверхности σ (формула Гаусса — Остроградского).

Равенства, связывающие скалярную функцию f с ее градиентом и вектор $\mathbf{A}$ с его вихрем:

$$\int_\sigma f d\mathbf{S} = \iiint_V \operatorname{grad} f \, dV; \qquad \int_\sigma \mathbf{A} \times d\mathbf{S} = -\iiint_V \operatorname{rot} \mathbf{A} \, dV.$$

Здесь σ — замкнутая поверхность, а V — объем, ею ограниченный.

Поле вектора $\mathbf{A}$ называется *потенциальным*, или *безвихревым*, если вектор $\mathbf{A}$ является градиентом некоторой функции $f(x, y, z)$, называемой *потенциальной функцией*: $\mathbf{A} = \operatorname{grad} f$; в этом случае:

$A_x = \frac{\partial f}{\partial x}$; $A_y = \frac{\partial f}{\partial y}$; $A_z = \frac{\partial f}{\partial z}$, и выражение $A_x dx + A_y dy + A_z dz = df$ является полным дифференциалом; для этого необходимо и достаточно, чтобы

$$\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} = 0; \quad \frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x} = 0; \quad \frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} = 0,$$

т. е. чтобы вектор rot $\mathbf{A}$ равнялся нулю в каждой точке. В потенциальном поле циркуляция вектора по любому замкнутому контуру C равна нулю $\oint_C A_s ds = 0$.

Поле вектора $\mathbf{A}$ называется *соленоидальным*, если в каждой точке поля $\operatorname{div} \mathbf{A} = 0$, т. е. $\frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z} = 0$; в этом случае поток вектора через любую замкнутую поверхность равен нулю.

Если поле является одновременно потенциальным и соленоидальным, то $\operatorname{div} \operatorname{grad} f = 0$ (f — потенциальная функция) и потенциальная функция является *гармонической*, т. е. удовлетворяет *уравнению Лапласа*

$$\Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} = 0$$

($\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$ — *оператор Лапласа*).

Если дивергенция вектора $\mathbf{A}$ равна нулю во всех точках векторного поля, за исключением конечного числа точек $M_1, M_2, \ldots, M_n$, в которых условие соленоидальности нарушается или теряет смысл из-за обращения в бесконечность хотя бы одной из производных $\frac{\partial A_x}{\partial x}$, $\frac{\partial A_y}{\partial y}$, $\frac{\partial A_z}{\partial z}$, то поток вектора $\mathbf{A}$ через поверхность, внутри которой находятся точки M_i, может быть отличным от нуля. Если поток вектора $\mathbf{A}$ через замкнутую поверхность σ, ограничивающую область, внутри которой содержится лишь одна из этих точек M_i, отличен от нуля и равен N_σ, то точка M_i называется *источником*, если $N_\sigma > 0$, и *стоком*, если $N_\sigma < 0$. Число N_σ называется при этом *интенсивностью* (или *обильностью*) источника или стока. Аналогичным образом определяются понятия источника, стока и интенсивности в случае плоского поля (вместо потока через замкнутую поверхность рассматривается поток через замкнутый контур).

Если плоское векторное поле $\mathbf{A}(x, y)$ является потенциальным (безвихревым) во всех точках, кроме конечного числа точек $M_1, M_2, \ldots, M_n$, в которых условие потенциальности нарушается или теряет смысл из-за обращения в бесконечность хотя бы одной из частных производных, входящих в это условие, то циркуляция по замкнутому контуру, внутри которого находятся точки M_i, может быть отлична от нуля. Если циркуляция по контуру C (обходимому однократно против часовой стрелки), ограничивающему область, внутри которой находится лишь одна из этих точек M_i, равна Γ_C и отлична от нуля, то точка M_i называется *вихревой точкой*, а число Γ_C — *интенсивностью вихря* в точке M_i. В случае пространственного поля роль вихревых точек играют *вихревые линии*, а контур C обходит вихревую линию (т. е. вихревая линия пересекает область, ограниченную контуром C и лежащую на произвольной поверхности, проходящей через контур C).

Для записи формул векторного анализа удобно пользоваться *оператором Гамильтона* ∇ (*набла*), где ∇ — символический вектор: $\nabla = \frac{\partial}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial}{\partial y}\mathbf{j} + \frac{\partial}{\partial z}\mathbf{k}$. Так, например, $\operatorname{grad} f = \nabla f$; $\operatorname{div} \mathbf{A} = \nabla \mathbf{A}$; $\operatorname{rot} \mathbf{A} = \nabla \times \mathbf{A}$; $\nabla\nabla = \Delta$.

Глава 1-9

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Обыкновенным дифференциальным уравнением называется уравнение, содержащее аргумент, искомую функцию этого аргумента и ее производные различных порядков $F(x, y, y', \ldots, y^{(n)}) = 0$.

Наивысший порядок производной искомой функции в данном уравнении называется *порядком* этого уравнения.

Всякая функция, которая, будучи вместе со своими производными соответствующих порядков подставлена в дифференциальное уравнение вместо искомой функции и ее производных, обращает уравнение в тождество (удовлетворяет уравнению), называется *решением* (*интегралом*) дифференциального уравнения.

Решение дифференциального уравнения может содержать произвольные постоянные. Для определения этих произвольных постоянных требуются дополнительные условия.

§ 1-22. Уравнения первого порядка

Теорема существования (Коши). Если в некоторой области плоскости XY, содержащей точку (x_0, y_0), функция $f(x, y)$ непрерывна и удовлетворяет *условию Липшица* $|f(x, y_1) - f(x, y_2)| < A|y_1 - y_2|$ (A постоянно для данной области), то существует, и притом только одна, непрерывная в некоторой окрестности точки (x_0, y_0) функция $y = \varphi(x)$, являющаяся решением уравнения $y' = f(x, y)$ и удовлетворяющая *начальному условию* $y = y_0$ при $x = x_0$.

Всякое решение, о котором идет речь в теореме Коши (при заданных значениях x_0 и y_0), называется *частным решением* дифференциального уравнения.

Совокупность всех частных решений называется *общим решением*. Общее решение уравнения первого порядка содержит одну произвольную постоянную C. Решение уравнения, не содержащее произвольной постоянной и не являющееся частным решением (и, следовательно, не

получаемое из общего решения ни при каких значениях входящей в него произвольной постоянной), называется *особым* *).

График решения дифференциального уравнения называется *интегральной кривой* этого уравнения. Общее решение уравнения первого порядка изображается, следовательно, однопараметрическим семейством интегральных кривых.

Дифференциальное уравнение $y' = f(x, y)$ задает угловой коэффициент касательной к интегральной кривой как функцию координат точки касания. Совокупность точек, в которых определена функция $f(x, y)$, и отрезков, направленных по касательным к интегральным кривым, проходящим через эти точки, образует так называемое *поле направлений* данного дифференциального уравнения.

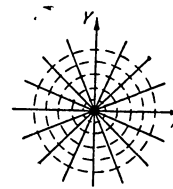


Рис. 1-183.

Кривые $f(x, y) = \text{const}$ называются *изоклинами*. Во всех точках каждой изоклины касательные к проведенным через эти точки интегральным кривым параллельны между собой. На (рис. 1-183) изображены интегральные кривые (окружности $x^2 + y^2 = C$) и изоклины (прямые $y = kx$) для уравнения $y' = -\dfrac{x}{y}$.

Уравнения в полных дифференциалах. Уравнение $M(x, y)\,dx + N(x, y)\,dy = 0$ в случае, если имеет место тождество $\dfrac{\partial M}{\partial y} = \dfrac{\partial N}{\partial x}$, называется *уравнением в полных (точных) дифференциалах*.

Общее решение такого уравнения имеет вид $u(x, y) = C$, где $\dfrac{\partial u(x, y)}{\partial x} = M(x, y)$; $\dfrac{\partial u(x, y)}{\partial y} = N(x, y)$, т. е. $du = M dx + N dy$.

Функция $u(x, y)$ определяется при этом формулой $u(x, y) = \int M(x, y)\,dx + \varphi(y)$, где $\varphi(y)$ находится из уравнения $\dfrac{\partial}{\partial y}\left[\int M(x, y)\,dx + \varphi(y)\right] = N(x, y)$.

Если условие $\dfrac{\partial M}{\partial y} = \dfrac{\partial N}{\partial x}$ не выполнено, то существует такая функция $\mu(x, y)$ (*интегрирующий множитель*), что уравнение $M dx + N dy = 0$ обратится в уравнение в полных дифференциалах после умножения на $\mu(x, y)$.

В качестве интегрирующего множителя можно выбрать любое частное решение уравнения

$$\frac{\partial(\mu M)}{\partial y} = \frac{\partial(\mu N)}{\partial x} \quad \text{или} \quad N\frac{\partial \ln\mu}{\partial x} - M\frac{\partial \ln\mu}{\partial y} = \frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}.$$

Если, в частности, выражение $\dfrac{\dfrac{\partial M}{\partial y} - \dfrac{\partial N}{\partial x}}{N}$ зависит только от x, то при отыскании интегрирующего множителя можно предположить, что он тоже зависит только от x.

Уравнения с разделяющимися переменными. Уравнение вида $y' = \varphi(x)\psi(y)$ называется уравнением с *разделяющимися переменными*.

*) Во всех точках кривой, изображающей особое решение, нарушаются условия теоремы Коши.

Преобразовав его к виду (*разделив переменные*) $\frac{dy}{\psi(y)} - \varphi(x)\,dx = 0$, мы найдем общий интеграл

$$\int \frac{dy}{\psi(y)} - \int \varphi(x)\,dx = C.$$

Следует иметь в виду, что при умножении или делении обеих частей дифференциального уравнения на выражение, содержащее искомую функцию, могут быть приобретены или утеряны решения.

Однородные уравнения. *Однородное уравнение* имеет вид $y' = f\left(\frac{y}{x}\right)$. Оно сводится к уравнению с разделяющимися переменными подстановкой $y = ux$ (тогда $y' = u'x + u$).

Уравнения вида $y' = f\left(\frac{a_1x + b_1y + c_1}{a_2x + b_2y + c_2}\right)$ приводятся к однородным в случае $\left|\begin{matrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{matrix}\right| \neq 0$ подстановкой: $x = u + \alpha$, $y = v + \beta$, где α и β определяются из системы уравнений $a_1\alpha + b_1\beta + c_1 = 0$, $a_2\alpha + b_2\beta + c_2 = 0$. Если же $\left|\begin{matrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{matrix}\right| = 0$, то, положив $a_1x + b_1y = t$, получим уравнение с разделяющимися переменными.

Линейные уравнения. *Линейным дифференциальным уравнением первого порядка* называется уравнение вида $y' = P(x)\,y + Q(x)$, линейное относительно y и y'. Его общее решение находится по формуле

$$y = e^{\int P(x)\,dx}\left[\int Q(x)\,e^{-\int P(x)\,dx}\,dx + C\right].$$

Если известно одно частное решение линейного уравнения $y = y_1(x)$, то общее решение находится при помощи одной *квадратуры* (одного интегрирования) $y = y_1(x) + Ce^{\int P(x)\,dx}$.

Если известны два линейно независимых частных решения (стр. 196) $y = y_1(x)$ и $y = y_2(x)$, то общее решение находится без квадратур $y = y_1(x) + C[y_2(x) - y_1(x)]$.

Уравнение Бернулли. Уравнение вида $y' = P(x)\,y + Q(x)\,y^n$ (*уравнение Бернулли*) приводится к линейному с помощью подстановки $y^{1-n} = t$.

Уравнение Клеро. Общее решение *уравнения Клеро* $y = xy' + \psi(y')$ имеет вид $y = Cx + \psi(C)$.

Особое решение находится из уравнений $y = Cx + \psi(C)$, $0 = x + \psi'(C)$ путем исключения из них C.

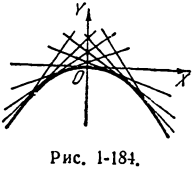


Рис. 1-184.

Интегральная кривая, соответствующая особому решению, является огибающей (стр. 146—147) семейства прямых, определяемого общим решением (рис. 1-184).

Пример. Уравнение $y = xy' + y'^2$ имеет общее решение $y = Cx + C^2$; исключая C из уравнений $y = Cx + C^2$, $0 = x + 2C$, получаем особое решение в явном виде $y = -\frac{x^2}{4}$.

Уравнение Лагранжа. Уравнение Клеро является частным видом *уравнения Лагранжа* $y = x\varphi(y') + \psi(y')$.

Произведя замену $y' = p$ и продифференцировав полученное равенство по x, приходим к уравнениям:

$$y = x\varphi(p) + \psi(p), \quad \frac{dx}{dp} = \frac{x\varphi'(p) + \psi'(p)}{p - \varphi(p)}.$$

Второе из этих уравнений $[p - \varphi'(p) \neq 0]$ является линейным (относительно функции x и производной $\frac{dx}{dp}$), и его общее решение совместно с первым уравнением определяет в параметрической форме общий интеграл уравнения Лагранжа.

Если $p - \varphi(p) = 0$ при $p = p_0$, то $y = x\varphi(p_0) + \psi(p_0)$ есть особое решение уравнения Лагранжа.

§ 1-23. Уравнения высших порядков

Теорема существования (Коши). Для того чтобы уравнение $y^{(n)} = f(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)})$ имело единственное решение $y = \varphi(x)$, непрерывное в окрестности точки x_0 и удовлетворяющее начальным условиям: $y = y_0$, $y' = y_0'$, $\ldots$, $y^{(n-1)} = y_0^{(n-1)}$ при $x = x_0$, достаточно, чтобы функция $f(x, y, y_1, \ldots, y_{n-1})$, где $x, y, y_1, \ldots, y_{n-1}$ — независимые между собой аргументы, в некоторой окрестности точки $(x_0, y_0, y_0', \ldots, y_0^{(n-1)})$, т. е. для всех значений аргументов, удовлетворяющих системе неравенств $x_0 - h < x < x_0 + h$, $y_0 - k < y < y_0 + k$, $y_0' - k_1 < y_1 < y_0' + k_1$, $\ldots$, $y_0^{(n-1)} - k_{n-1} < y_{n-1} < y_0^{(n-1)} + k_{n-1}$, где $h, k, k_1, \ldots, k_{n-1}$ — некоторые положительные постоянные, была непрерывна и удовлетворяла условию Липшица

$$|f(x, \bar{y}, \bar{y}_1, \ldots, \bar{y}_{n-1}) - f(x, y, y_1, \ldots, y_{n-1})| < A(|\bar{y} - y| + |\bar{y}_1 - y_1| + \ldots + |\bar{y}_{n-1} - y_{n-1}|).$$

Общее решение уравнения $y^{(n)} = f(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)})$ содержит n произвольных постоянных $C_1, C_2, \ldots, C_n$ и геометрически изображается n-параметрическим семейством интегральных кривых.

Любая система начальных условий вида $y = y_0$; $y' = y_0'$, $\ldots$, $y^{(n-1)} = y_0^{(n-1)}$ при $x = x_0$ в случае, если выполнены условия теоремы Коши, позволяет найти значения $C_1, C_2, \ldots, C_n$, определяющие соответствующее частное решение.

Уравнения, допускающие понижение порядка. Понижая порядок при помощи подстановки $y' = p$, можно получить общие решения для некоторых дифференциальных уравнений второго порядка.

1) Уравнение $y'' = f(y)$; общее решение $x = \pm\int \frac{dy}{\sqrt{2\int f(y)\,dy + C_1}} + C_2$.

2) Уравнение $y'' = f(y')$; общее решение $x = \int \frac{dy}{\varphi(y, C_1)} + C_2$, где для отыскания функции $p = \varphi(y, C_1)$ следует разрешить равенство $y = \int \frac{p\,dp}{f(p)} + C_1$ относительно p.

3) Уравнение $y'' = f(x, y')$: общее решение $y = \int \varphi(x, C_1)\,dx + C_2$, где $p = \varphi(x, C_1)$ — общее решение уравнения $\frac{dp}{dx} = f(x, p)$.

4) Уравнение $y'' = f(y, y')$; общее решение $x = \int \frac{dy}{\varphi(y, C_1)} + C_2$, где $p = \varphi(y, C_1)$ — общее решение уравнения $p\frac{dp}{dy} = f(y, p)$.

Общее решение уравнения $y^{(n)} = f(x)$ находится последовательным n-кратным интегрированием.

Уравнение $\frac{d^n y}{dx^n} = f\left(\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}\right)$ приводится подстановкой $\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} = p$; $\frac{d^n y}{dx^n} = \frac{dp}{dx}$ к уравнению с разделяющимися переменными $\frac{dp}{dx} = f(p)$.

Порядок уравнения, не содержащего искомой функции y: $f\left(x, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}, \ldots, \frac{d^n y}{dx^n}\right) = 0$, понижается на единицу с помощью подстановки $\frac{dy}{dx} = p$; $\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{dp}{dx}$ и т. д.

Если в уравнении отсутствуют кроме y также производные до порядка $k-1$ включительно, то следует применить подстановку $y^{(k)} = p$.

Для понижения порядка уравнения, не содержащего аргумента x, полагают $\frac{dy}{dx} = p$; $\frac{d^2y}{dx^2} = p\frac{dp}{dy}$ и т. д.

Линейные уравнения. *Линейным дифференциальным уравнением n-го порядка* называется уравнение вида

$$y^{(n)} + a_1(x)\, y^{(n-1)} + a_2(x)\, y^{(n-2)} + \ldots + a_{n-1}(x)\, y' + a_n(x)\, y = f(x),$$

линейное относительно искомой функции и ее производных.

Если *правая часть* уравнения $f(x)$ тождественно равна нулю, то уравнение называется *однородным* (или уравнением *без правой части*); в противном случае оно называется *неоднородным*.

Если функции $y_1(x)$, $y_2(x)$, ..., $y_n(x)$ являются частными решениями линейного однородного уравнения и при этом они линейно независимы (см. ниже), то общее решение однородного уравнения имеет вид $y = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x) + \ldots + C_n y_n(x)$.

Функции $y_1(x)$, $y_2(x)$, ..., $y_n(x)$ называются *линейно-независимыми*, если тождество $\alpha_1 y_1(x) + \alpha_2 y_2(x) + \ldots + \alpha_n y_n(x) = 0$, где α_i — постоянные, может иметь место только при $\alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_n = 0$. Для этого необходимо и достаточно, чтобы так называемый *определитель Вронского* (*вронскиан*)

$$W(x) = \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) & \ldots & y_n(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) & \ldots & y_n'(x) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ y_1^{(n-1)}(x) & y_2^{(n-1)}(x) & \ldots & y_n^{(n-1)}(x) \end{vmatrix}$$

был отличен от нуля. Определитель Вронского, составленный для n частных решений линейного уравнения n-го порядка [если коэффициенты $a_1(x)$, $a_2(x)$, ..., $a_n(x)$ этого уравнения непрерывны], может обращаться в нуль только тождественно.

Если $Y(x)$ — частное решение неоднородного линейного уравнения, а $u(x)$ — общее решение соответствующего однородного уравнения, то функция $u(x) + Y(x)$ есть общее решение неоднородного уравнения.

Если $Y_1(x)$ и $Y_2(x)$ — решения двух линейных уравнений с одной и той же левой частью и с правыми частями $f_1(x)$ и $f_2(x)$, то функция $Y_1(x) + Y_2(x)$ есть решение уравнения с той же левой частью и с правой частью $f_1(x) + f_2(x)$.

Линейные однородные уравнения с постоянными коэффициентами. Для отыскания общего решения линейного однородного уравнения с постоянными коэффициентами

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \ldots + a_{n-1} y' + a_n y = 0$$

($a_1, a_2, \ldots, a_n$ — действительные постоянные) следует составить так называемое *характеристическое уравнение* $k^n + a_1 k^{n-1} + \ldots + a_{n-1} k + a_n = 0$ и найти его корни, после чего n линейно-независимых частных решений $y_1(x), y_2(x), \ldots, y_n(x)$ уравнения находятся (в действительной форме) по следующим правилам:

1) каждому действительному корню k кратности p соответствует p линейно-независимых частных решений:

$$e^{kx}, xe^{kx}, x^2 e^{kx}, \ldots, x^{p-1} e^{kx};$$

2) каждой паре взаимно-сопряженных комплексных корней $\alpha \pm \beta i$ кратности q соответствует $2q$ линейно-независимых частных решений:

$$e^{\alpha x} \cos \beta x,\ e^{\alpha x} \sin \beta x,\ xe^{\alpha x} \cos \beta x,\ xe^{\alpha x} \sin \beta x, \ldots$$
$$\ldots, x^{q-1} e^{\alpha x} \cos \beta x,\ x^{q-1} e^{\alpha x} \sin \beta x.$$

Общее решение выражается равенством

$$y = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x) + \ldots + C_n y_n(x).$$

Пример 1. Решить уравнение $y''' - 4y'' + 4y' = 0$; $k^3 - 4k^2 + 4k = 0$; $k_1 = 0$, $k_{2,3} = 2$; $y = C_1 + e^{2x}(C_2 + C_3 x)$.

Пример 2. Решить уравнение $y^{VI} + y^{IV} - y'' - y = 0$; $k^6 + k^4 - k^2 - 1 = 0$; $k_1 = -1$; $k_2 = 1$; $k_{3,4} = i$; $k_{5,6} = -i$;

$$y = C_1 e^{-x} + C_2 e^{x} + (C_3 + C_4 x) \cos x + (C_5 + C_6 x) \sin x.$$

Линейные неоднородные уравнения с постоянными коэффициентами. Если найдено какое-либо частное решение $Y(x)$ неоднородного линейного уравнения с постоянными коэффициентами $y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \ldots + a_{n-1} y' + a_n y = f(x)$, и известно общее решение $u(x)$ соответствующего однородного уравнения, то (см. выше) $y = u(x) + Y(x)$ — общее решение данного неоднородного уравнения. Если, в частности, $f(x) = P(x) e^{ax} \cos bx$ или $f(x) = P(x) e^{ax} \sin bx$, где $P(x)$ — некоторый многочлен степени m, то частное решение следует искать в виде $Y(x) = x^p e^{ax} [Q_1(x) \cos bx + Q_2(x) \sin bx]$, где $Q_1(x)$ и $Q_2(x)$ — многочлены степени m с неопределенными коэффициентами; p — кратность корня характеристического уравнения, равного $a + bi$ (если число $a + bi$ не есть корень характеристического уравнения, то $p = 0$).

Пример. Найти общее решение уравнения $y'' + \frac{y}{4} = x \sin \frac{x}{2}$.

Здесь число $a + bi = \frac{i}{2}$ является однократным корнем характеристического уравнения $k^2 + \frac{1}{4} = 0$ и, следовательно, частное решение уравнения следует искать в виде

$$Y(x) = x \left[(A_1 x + B_1) \sin \frac{x}{2} + (A_2 x + B_2) \cos \frac{x}{2} \right].$$

Найдя отсюда Y'' и подставив в уравнение, получим:

$$[-2A_2x+(2A_1-B_2)]\sin\frac{x}{2}+[2A_1x+(2A_2+B_1)]\cos\frac{x}{2}=x\sin\frac{x}{2}.$$

Сравнивая коэффициенты в обеих частях равенства, будем иметь

$$-2A_2=1;\quad 2A_1-B_2=0;\quad 2A_1=0,\quad 2A_2+B_1=0,$$

откуда $A_1=0$; $B_1=1$; $A_2=-\frac{1}{2}$; $B_2=0$ и

$$Y(x)=x\sin\frac{x}{2}-\frac{1}{2}x^2\cos\frac{x}{2}.$$

Общее решение соответствующего однородного уравнения $u(x)=C_1\cos\frac{x}{2}+C_2\sin\frac{x}{2}$ и, следовательно,

$$y=C_1\cos\frac{x}{2}+C_2\sin\frac{x}{2}+x\sin\frac{x}{2}-\frac{1}{2}x^2\cos\frac{x}{2}.$$

В отдельных частных случаях можно пользоваться следующими правилами.

1) Если $f(x)$ — многочлен степени m:

$$f(x)=b_0x^m+b_1x^{m-1}+\ldots+b_{m-1}x+b_m,$$

и $a_n\neq 0$, то частное решение уравнения следует искать в виде многочлена той же степени (с неопределенными коэффициентами):

$$Y(x)=B_0x^m+B_1x^{m-1}+\ldots+B_{m-1}x+B_m;$$

если же $a_n=a_{n-1}=\ldots=a_{n-p+1}=0$, $a_{n-p}\neq 0$, то частное решение ищут в виде $Y(x)=x^p(B_0x^m+B_1x^{m-1}+\ldots+B_{m-1}x+B_m)$.

2) Если $f(x)=ke^{ax}$ и a не является корнем характеристического уравнения, то частное решение ищут в виде $Y(x)=Ae^{ax}$, где A — неопределенный коэффициент; если же a — корень характеристического уравнения кратности p, то $Y(x)=Ax^pe^{ax}$.

3) Если $f(x)=m\cos bx+n\sin bx$ и bi не является корнем характеристического уравнения, то частное решение следует искать в виде $Y(x)=M\cos bx+N\sin bx$, где M, N — неопределенные коэффициенты; если же $\pm bi$ — пара корней характеристического уравнения кратности p, то $Y(x)=x^p(M\cos bx+N\sin bx)$.

В случае правой части $f(x)$ произвольного вида общее решение неоднородного уравнения находится методом *вариации произвольных постоянных* в форме $y=C_1(x)y_1(x)+C_2(x)y_2(x)+\ldots+C_n(x)y_n(x)$, где $y_1(x)$, $y_2(x)$, ..., $y_n(x)$ — по-прежнему линейно-независимые решения соответствующего однородного уравнения, а функции $C_1(x)$, $C_2(x)$, ..., $C_n(x)$ определяются следующей системой алгебраических уравнений 1-й степени относительно их производных:

$$\begin{gathered}
C_1'(x)y_1(x)+C_2'(x)y_2(x)+\ldots+C_n'(x)y_n(x)=0,\\
C_1'(x)y_1'(x)+C_2'(x)y_2'(x)+\ldots+C_n'(x)y_n'(x)=0,\\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
C_1'(x)y_1^{(n-2)}(x)+C_2'(x)y_2^{(n-2)}(x)+\ldots+C_n'(x)y_n^{(n-2)}(x)=0,\\
C_1'(x)y_1^{(n-1)}(x)+C_2'(x)y_2^{(n-1)}(x)+\ldots+C_n'(x)y_n^{(n-1)}(x)=f(x).
\end{gathered}$$

Решив эту систему, находим $C_1'(x)$, $C_2'(x)$, ..., $C_n'(x)$; при помощи интегрирования можно определить функции $C_1(x)$, $C_2(x)$, ..., $C_n(x)$, причём каждая из этих функций будет содержать произвольное постоянное слагаемое.

Пример. Общее решение уравнения $y''+2y'+y=\frac{e^{-x}}{x}$ следует искать в форме $y=C_1(x)\,e^{-x}+C_2(x)\,xe^{-x}$ ($y=C_1e^{-x}+C_2xe^{-x}$ — общее решение однородного уравнения).

Для определения $C_1(x)$ и $C_2(x)$ составляем систему уравнений: $C_1'(x)\,e^{-x}+C_2'(x)\,xe^{-x}=0$; $-C_1'(x)\,e^{-x}+C_2'(x)\,(e^{-x}-xe^{-x})=\frac{e^{-x}}{x}$; отсюда $C_1'(x)=-1$; $C_2'(x)=\frac{1}{x}$ и $C_1(x)=-x+C_1$, $C_2(x)=\ln x+C_2$. Таким образом, $y=(C_1-x)\,e^{-x}+(C_2+\ln x)\,xe^{-x}$.

Уравнение Эйлера. Линейное уравнение с переменными коэффициентами вида $(\alpha x+\beta)^n y^{(n)}+a_1(\alpha x+\beta)^{n-1}y^{(n-1)}+\ldots+a_{n-1}(\alpha x+\beta)y'+a_n y=f(x)$ (*уравнение Эйлера*) приводится к линейному уравнению с постоянными коэффициентами подстановкой $\alpha x+\beta=e^t$.

Операционное исчисление. *Преобразование Лапласа* $\overline{f}(p)=\int\limits_0^\infty e^{-pt}f(t)\,dt$ ставит в соответствие функции $f(t)$ функцию $\overline{f}(p)$ параметра p, причем $f(t)$ называют *оригиналом*, а $\overline{f}(p)$ — *изображением*. Переход от оригинала к изображению записывают коротко: $f(t)\to\overline{f}(p)$. Предполагается, что функция $f(t)$ кусочно-непрерывна и кусочно-гладка при $t\geqslant 0$ [т. е. $f(t)$ и $f'(t)$ имеют на каждом конечном отрезке не более чем конечное число точек разрыва и притом только 1-го рода] и растет не быстрее некоторой показательной функции, т. е. $|f(t)|<Me^{st}$, где M, s — постоянные, и $f(t)\equiv 0$ при $t<0$.

Простейшие свойства преобразования Лапласа:

1) $cf(t)\to c\overline{f}(p)$ (c — постоянная);

2) $f_1(t)+f_2(t)\to\overline{f}_1(p)+\overline{f}_2(p)$;

3) $f'(t)\to p\overline{f}(p)-f(0)$;

4) $f^{(n)}(t)\to p^n\overline{f}(p)-p^{n-1}f(0)-p^{n-2}f'(0)-\ldots-f^{(n-1)}(0)$;

5) $\int\limits_0^t f(t)\,dt\to\frac{1}{p}\overline{f}(p)$;

6) $f(t-\tau_0)\to e^{-p\tau_0}\overline{f}(p)$ ($\tau_0>0$ — постоянная);

7) $f(at)\to\frac{1}{a}\overline{f}\left(\frac{p}{a}\right)$; 8) $e^{at}f(t)\to\overline{f}(p-a)$;

9) $\int\limits_0^t f_1(\tau)\,f_2(t-\tau)\,d\tau\to\overline{f}_1(p)\,\overline{f}_2(p)$.

Для того чтобы найти решение $x(t)$ линейного дифференциального уравнения с постоянными коэффициентами $x^{(n)}(t)+a_1x^{(n-1)}(t)+\ldots+a_nx(t)=f(t)$, удовлетворяющее начальным условиям $x(0)=x_0$; $x'(0)=x_0'$, ..., $x^{(n-1)}(0)=x_0^{(n-1)}$, следует применить к обеим частям уравнения преобразование Лапласа, что приводит к равенству $\overline{x}(p)=\dfrac{\overline{f}(p)+\varphi(p)}{Q(p)}$, где $Q(p)=p^n+a_1p^{n-1}+\ldots+a_n$,

$$\varphi(p)=p^{n-1}x_0+p^{n-2}x_0'+\ldots+x_0^{(n-1)}+$$
$$+a_1\left(p^{n-2}x_0+p^{n-3}x_0'+\ldots+x_0^{(n-2)}\right)+\ldots+a_{n-1}x_0.$$

(В частности, если $x_0=x_0'=\ldots=x_0^{(n-1)}=0$, то $\varphi(p)\equiv 0$. В этом случае решение дифференциального уравнения называют *нормальным частным решением*.) Для отыскания искомого решения остается от изображения $\overline{x}(p)$ перейти к оригиналу $x(t)$. При этом можно пользоваться таблицей изображений и оригиналов и свойствами преобразования Лапласа. Если функция $\dfrac{\overline{f}(p)+\varphi(p)}{Q(p)}$ — правильная рациональная дробь, то целесообразно, как правило, разложить ее на элементарные дроби.

Ниже приводится краткая таблица оригиналов и изображений.

№	$\overline{f}(p)$ — изображение	$f(t)$ — оригинал
1	$\dfrac{1}{p}$	1
2	$\dfrac{1}{p^{n+1}}$	$\dfrac{t^n}{n!}$
3	$\dfrac{1}{p+a}$	e^{-at}
4	$\dfrac{1}{(p+a)^{n+1}}$	$\dfrac{t^n}{n!}e^{-at}$
5	$\dfrac{a}{p^2+a^2}$	$\sin at$
6	$\dfrac{p}{p^2+a^2}$	$\cos at$
7	$\dfrac{a}{p^2-a^2}$	$\operatorname{sh} at$
8	$\dfrac{p}{p^2-a^2}$	$\operatorname{ch} at$
9	$\dfrac{1}{(p-a)(p-b)}$	$\dfrac{e^{at}-e^{bt}}{a-b}$

Продолжение

№	$\overline{f}(p)$ — изображение	$f(t)$ — оригинал
10	$\frac{p}{(p^2+a^2)^2}$	$\frac{t}{2a}\sin at$
11	$\frac{p^2-a^2}{(p^2+a^2)^2}$	$t\cos at$
12	$\frac{a^2}{(p^2+a^2)^2}$	$\frac{1}{2a}(\sin at - at\cos at)$
13	$\frac{p}{(p^2+a^2)(p^2+b^2)}$	$\frac{\cos at-\cos bt}{b^2-a^2}$
14	$\frac{b}{(p+a)^2+b^2}$	$e^{-at}\sin bt$
15	$\frac{p+a}{(p+a)^2+b^2}$	$e^{-at}\cos bt$
16	$\frac{p}{p^4+a^4}$	$\frac{1}{a^2}\sin\frac{at}{\sqrt{2}}\operatorname{sh}\frac{at}{\sqrt{2}}$
17	$\frac{p^3}{p^4+a^4}$	$\cos\frac{at}{\sqrt{2}}\operatorname{ch}\frac{at}{\sqrt{2}}$
18	$\frac{1}{\sqrt{p}}$	$\frac{1}{\sqrt{\pi t}}$
19	$\frac{1}{p\sqrt{p}}$	$\frac{2\sqrt{t}}{\sqrt{\pi}}$
20	$\ln\left(1+\frac{1}{p}\right)$	$\frac{1-e^{-t}}{t}$
21	$\frac{e^{-\frac{a^2}{4p}}}{\sqrt{p}}$	$\frac{2}{a\sqrt{\pi}}\sin a\sqrt{t}$
22	$\frac{e^{-\frac{a^2}{4p}}}{p\sqrt{p}}$	$\frac{4}{a^2\sqrt{\pi}}\left(\frac{1}{a}\sin a\sqrt{t}-\sqrt{t}\cos a\sqrt{t}\right)$
23	$\frac{e^{-a\sqrt{p}}}{\sqrt{p}}\ (a\geqslant 0)$	$\frac{ae^{-\frac{a^2}{4t}}}{2\sqrt{\pi}\,t\sqrt{t}}$

Пример. Найти нормальное частное и общее решения уравнения $y'''+2y''+y'+2y=\sin x$. Преобразование Лапласа приводит к алгебраическому уравнению $(p^3+2p^2+p+2)\,Y(p)=\frac{1}{p^2+1}$, откуда

$$Y(p)=\frac{1}{(p^2+1)(p^3+2p^2+p+2)}=\frac{1}{(p^2+1)^2(p+2)}.$$

Разложив на сумму простейших дробей, получим:

$$Y(p)=\frac{-\frac{1}{5}p+\frac{2}{5}}{(p^2+1)^2}+\frac{-\frac{1}{25}p+\frac{2}{25}}{p^2+1}+\frac{\frac{1}{25}}{p+2}$$

и, воспользовавшись приведенной таблицей, найдем нормальное решение $y(x)=-\frac{1}{5}\cdot\frac{x}{2}\sin x+\frac{2}{5}\cdot\frac{1}{2}(\sin x-x\cos x)-\frac{1}{25}\cos x+\frac{2}{25}\sin x+\frac{1}{25}e^{-2x}$ или $y(x)=\frac{1}{25}e^{-2x}-\frac{1}{25}\cos x+\frac{7}{25}\sin x-\frac{x}{10}(2\cos x+\sin x)$.

Общее решение соответствующего однородного уравнения имеет вид $n=C_1e^{-2x}+C_2\cos x+C_3\sin x$, и следовательно, общее решение данного уравнения

$$y=C_1e^{-2x}+C_2\cos x+C_3\sin x-\frac{x}{10}(2\cos x+\sin x).$$

Если отыскивается только общее решение уравнения, то значительно упрощаются вычисления, так как достаточно, учитывая вид общего решения однородного уравнения, иметь в виду только первую из простых дробей в выражении для $Y(p)$.

Глава 1-10

ПРИБЛИЖЕННЫЕ МЕТОДЫ АНАЛИЗА

§ 1-24. Приближенное решение алгебраических и трансцендентных уравнений

Графическое решение уравнений. Графические методы решения алгебраических и трансцендентных уравнений применяются в тех случаях, когда не требуется большая точность.

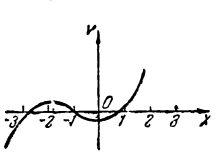


Рис. 1-185.

Для отыскания графическим методом действительных корней уравнения вида $f(x)=0$ следует построить график функции $y=f(x)$ и определить точки пересечения или, в случае кратных корней, точки касания его с осью X. Абсциссы этих точек будут искомыми корнями уравнения $f(x)=0$.

Пример. Решить графически уравнение $x^3+3x^2-2=0$.

Строим график функции $y=x^3+3x^2-2$; абсциссы пересечения этого графика с осью X являются корнями уравнения: $x_1=-2{,}73$; $x_2=-1$; $x_3=0{,}73$ (рис. 1-185; на чертеже масштаб на оси Y выбран в шесть раз меньше, чем на оси X).

Иногда бывает полезно разбить члены уравнения $f(x)=0$ на две группы, оставив в левой части один или несколько членов и перенеся остальные в правую часть. Тогда уравнение принимает вид $f_1(x)=f_2(x)$, после чего следует вычертить два графика: $y=f_1(x)$ и $y=f_2(x)$, и найти точки пересечения построенных графиков. Абсциссы этих точек и будут искомыми корнями уравнения $f(x)=0$. Преимущества этого способа особенно сказываются в тех случаях, когда одна из функций, например $f_2(x)$, — линейная и графическое решение уравнения сводится к нахождению точки пересечения кривой $y=f_1(x)$ с прямой линией $y=f_2(x)=kx+b$. При необходимости решать большое количество однотипных уравнений вида $f_1(x)=kx+b$, отличающихся только коэффициентами линейной функции в правой части, целесообразно вычертить один раз график функции $y=f_1(x)$ на отдельном листе прозрачной бумаги, после чего для решения какого-либо уравнения данного типа остается построить в том же масштабе прямую линию $y=kx+b$, наложить на нее лист с вычерченной кривой $y=f_1(x)$ и определить абсциссы точек пересечения. Для решений любого другого уравнения этого типа приходится строить только новую прямую, соответствующую правой части этого уравнения, каждый раз используя тот же лист с графиком функции $y=f_1(x)$.

На рис. 1-186 дано графическое решение двух кубических уравнений $x^3-7x-6=0$ и $x^3+2{,}8x-7=0$. Корни первого уравнения $x_1=-2$, $x_2=-1$, $x_3=3$; второе уравнение имеет один действительный корень $x_1=1{,}4$. Масштаб на оси Y выбран в двадцать раз меньше, чем на оси X.

Рис. 1-186.

Для графического решения системы двух уравнений с двумя неизвестными $f(x, y)=0$, $\varphi(x, y)=0$ строят кривые, соответствующие этим уравнениям, и определяют точки пересечения кривых. Координаты каждой из точек пересечения дают пару значений неизвестных x и y, удовлетворяющих системе.

Метод итерации. Для решения уравнения $f(x)=0$ методом итерации (повторения) перепишем уравнение в виде $x+f(x)-x=0$ или $x=\varphi(x)$, где $\varphi(x)=x-f(x)$.

Графическим или каким-либо иным способом находим начальное приближенное значение корня x_0 и подставляем его в правую часть уравнения $x=\varphi(x)$ вместо x, получим первое уточненное значение корня: $x^{(1)}=\varphi(x_0)$. Аналогично подставляя в $\varphi(x)$ вместо x вычисленное значение $x^{(1)}$, находим второе уточненное значение $x^{(2)}=\varphi(x^{(1)})$.

Повторяя этот процесс несколько раз, получим:

$$x^{(3)}=\varphi(x^{(2)});\quad x^{(4)}=\varphi(x^{(3)});\quad \ldots;\quad x^{(n)}=\varphi(x^{(n-1)}).$$

Процесс итерации прекращается, как только достигается требуемая точность, т. е. когда абсолютная величина разности между двумя последовательными значениями корня становится меньше допускаемой погрешности.

Для того, чтобы процесс итерации был сходящимся, достаточно выполнение условия $|\varphi'(x)|<1$ в некоторой окрестности искомого корня, содержащей точку x_0. Сходимость тем быстрее, чем меньше $|\varphi'(x)|$. Так как функцию $\varphi(x)$ можно выбрать по-разному, то следует иметь в виду, что при неудачном выборе $\varphi(x)$ процесс итерации может привести не к уменьшению, а к увеличению погрешности. Так, например, метод итерации нельзя применить к уравнению $x=\operatorname{tg} x$, но если это

уравнение преобразовать к виду $x = \operatorname{arctg} x$, то процесс итерации станет сходящимся.

Пример. Найти действительный корень уравнения $\lg x - 2x + 7 = 0$.

Для нахождения начального приближенного значения корня перепишем уравнение в форме $\lg x = 2x - 7$; построим кривую $y = \lg x$ и прямую $y = 2x - 7$ (рис. 1-187) и определим абсциссу точки пересечения: $x_0 = 3{,}8$.

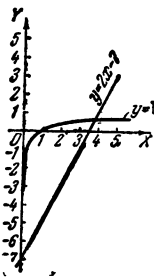


Рис. 1-187.

Преобразуем данное уравнение к виду $x = \frac{1}{2}(\lg x + 7)$ и подставим в правую часть вместо x значение $x_0 = 3{,}8$; получим уточненное значение корня: $x^{(1)} = \frac{1}{2}(\lg 3{,}8 + 7) = 3{,}79$.

Аналогичным образом вычисляем: $x^{(2)} = \frac{1}{2}(\lg 3{,}79 + 7) = 3{,}7893$; $x^{(3)} = \frac{1}{2}(\lg 3{,}7893 + 7) = 3{,}7893$.

Если ограничиться приближенным значением корня с пятью верными знаками, то на этом вычисления можно прекратить, приняв $x = 3{,}7893$.

Быстрая сходимость процесса инерации объясняется тем, что в нашем случае величина $|\varphi'(x)|$ мала: $|\varphi'(x)| = \left|\frac{1}{2x}\right| \approx \frac{1}{7{,}6}$.

Метод итерации может быть применен и тогда, когда уравнение задано в виде бесконечного ряда. Так, например, если дано уравнение $x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{10} - \frac{x^7}{42} + \frac{x^9}{216} - \ldots = 0{,}4431$, то, переписав его в виде: $x = 0{,}4431 + \frac{x^3}{3} - \frac{x^5}{10} + \frac{x^7}{42} - \frac{x^9}{216} + \ldots$, отбросив старшие члены, начиная с x^3, и округлив свободный член, положим $x^{(0)} = 0{,}44$.

Подставляя значение 0,44 в правую часть уравнения вместо x, находим $x^{(1)} = 0{,}4431 + \frac{(0{,}44)^3}{3} - \frac{(0{,}44)^5}{10} + \frac{(0{,}44)^7}{42} \approx 0{,}470$.

Аналогично получим $x^{(2)} = 0{,}4431 + \frac{(0{,}47)^3}{3} - \frac{(0{,}47)^5}{10} + \frac{(0{,}47)^7}{42} \approx 0{,}476$ и т. д.

Для применения метода итерации к решению системы двух уравнений с двумя неизвестными $f_1(x, y) = 0$; $f_2(x, y) = 0$ переписываем их в виде: $x = \varphi_1(x, y)$; $y = \varphi_2(x, y)$.

Определив графически (или иным путем) начальные приближенные значения корней x_0 и y_0 и подставив их в уравнения, получим первое приближение: $x^{(1)} = \varphi_1(x_0, y_0)$; $y^{(1)} = \varphi_2(x_0, y_0)$.

Аналогично находим следующие приближения:

$$\left.\begin{aligned} x^{(2)} &= \varphi_1(x^{(1)}, y^{(1)}), \\ y^{(2)} &= \varphi_2(x^{(1)}, y^{(1)}), \end{aligned}\right\} \qquad \left.\begin{aligned} x^{(3)} &= \varphi_1(x^{(2)}, y^{(2)}), \\ y^{(3)} &= \varphi_2(x^{(2)}, y^{(2)}) \end{aligned}\right\}$$

и т. д.

Для сходимости процессов итерации достаточно выполнение условий $\left|\frac{\partial\varphi_1}{\partial x}\right| + \left|\frac{\partial\varphi_2}{\partial x}\right| < 1$ и $\left|\frac{\partial\varphi_1}{\partial y}\right| + \left|\frac{\partial\varphi_2}{\partial y}\right| < 1$ в окрестности точки (x_0, y_0), причем сходимость будет тем более быстрой, чем меньше будет каждая из левых частей обоих неравенств.

Подобным образом применяется метод итерации и к решению систем уравнений с бо́льшим числом неизвестных.

Отделение корней уравнения. Отделение корней уравнения $f(x)=0$ состоит в определении двух чисел a и b, между которыми находится только один действительный корень уравнения. Если левая часть уравнения $f(x)$ представляет собой непрерывную функцию и уравнение $f(x)=0$ имеет действительные корни, то, придавая x различные последовательные числовые значения и вычисляя соответствующие значения функции $f(x)$, можно определить такую пару близких между собой значений a и b ($a<b$), при которых значения функции будут иметь разные знаки. В этом случае между a и b находится по крайней мере один действительный корень нашего уравнения. Продолжая вычислять значения функции для значений x, расположенных между a и b, можно интервал (a, b) заменить меньшим интервалом (a', b'), на концах которого $f(x)$ также имеет разные знаки, и так можно продолжать до тех пор, пока этот интервал не станет меньше абсолютной погрешности, с которой желательно определить корень уравнения.

Например, если дано уравнение $x \lg x - 1{,}2 = 0$, то для отделения корня составляют таблицу значений x и соответствующих им значений $f(x) = x \lg x - 1{,}2$.

x	$f(x) = x \lg x - 1{,}2$	x	$f(x) = x \lg x - 1{,}2$
0	— 1,2	1,0	— 1,2
0,2	— 1,34	2,0	— 0,6
0,4	— 1,36	3,0	+ 0,23
0,6	— 1,33	4,0	+ 1,21
0,8	— 1,28		

Эта таблица показывает, что $f(2)$ и $f(3)$ разных знаков, а потому в интервале (2, 3) находится корень уравнения $x \lg x - 1{,}2 = 0$; уменьшая указанным способом найденный интервал, можно было бы найти значение этого корня с любой точностью.

Указанный метод отделения корней непригоден для отделения кратного корня функции $f(x)$, если кратность корня четная (или в случае наличия четного числа весьма близких корней). Такой корень является простым или кратным корнем нечетной кратности производной $f'(x)$, и его отделение может быть произведено при помощи указанного выше способа, который следует применить к $f'(x)$. Следует, конечно, иметь в виду, что не всякий корень функции $f'(x)$ служит корнем функции $f(x)$, поэтому необходимо произвести проверку, подставляя найденный корень в $f(x)$.

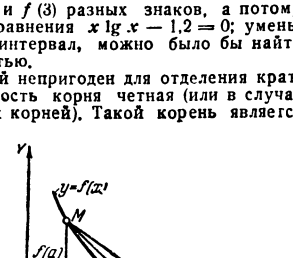


Рис. 1-188.

Линейная интерполяция (*метод хорд*). При применении этого метода следует предварительно произвести отделение искомого корня уравнения $f(x)=0$. Уточнение значения корня производится по формуле $x^{(1)} = a - \dfrac{(b-a)\,f(a)}{f(b)-f(a)}$ или $x^{(1)} = b - \dfrac{(b-a)\,f(b)}{f(b)-f(a)}$.

Найденное по этой формуле приближенное значение корня является абсциссой точки пересечения хорды MN_1 кривой $y=f(x)$ с осью X (рис. 1-188), в то время как точное значение корня — абсцисса точки пересечения дуги MN_1 с осью X.

Полученное первое приближение корня может быть опять уточнено путем повторного применения той же формулы для того из меньших интервалов $(a, x^{(1)})$ или $(x^{(1)}, b)$, на концах которого $f(x)$ имеет разные знаки:

$$x^{(2)} = a - \frac{(x^{(1)} - a)\, f(a)}{f(x^{(1)}) - f(a)}$$

или

$$x^{(2)} = b - \frac{(b - x^{(1)})\, f(b)}{f(b) - f(x^{(1)})}.$$

Повторное применение метода геометрически означает приближение к корню при помощи хорд MN_1, MN_2 и т. д.

Пример. Решить уравнение $x \lg x - 1{,}2 = 0$.

Из приведенной на стр. 205 таблицы видно, что корень этого уравнения находится между 2 и 3. Поэтому, вычисляя первое приближенное значение корня, получим: $x^{(1)} = 2 - \frac{(3-2)(-0{,}6)}{0{,}23 - (-0{,}6)} = 2{,}72$.

Так как $f(2{,}72) = -0{,}017$ и $f(3) = 0{,}23$ разных знаков, то, применяя повторно метод хорд к интервалу (2,72; 3), получим следующее приближение:

$$x^{(2)} = 2{,}72 - \frac{(3 - 2{,}72) - (-0{,}017)}{0{,}23 - (-0{,}017)} \approx 2{,}74.$$

Метод Ньютона. Для уточнения приближенного значения корня $x = a$ уравнения $f(x) = 0$ можно применить *формулу Ньютона* $x^{(1)} = a - \frac{f(a)}{f'(a)}$, которая геометрически означает, что дуга кривой $y = f(x)$ заменяется касательной MT (рис. 1-189) и вместо точного значения корня x (абсциссы точки пересечения кривой с осью X) принимается в качестве его приближенного значения $x^{(1)}$ (абсцисса точки пересечения касательной с осью X).

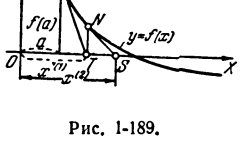


Рис. 1-189.

Повторным применением метода Ньютона можно уточнить полученное первое приближение корня:

$$x^{(2)} = x_1^{(1)} - \frac{f(x^{(1)})}{f'(x^{(1)})};$$

$$x^{(3)} = x^{(2)} - \frac{f(x^{(2)})}{f'(x^{(2)})}; \ldots$$

$$x^{(n)} = x^{(n-1)} - \frac{f(x^{(n-1)})}{f'(x^{(n-1)})}.$$

Геометрически это означает приближение к корню при помощи касательных MT, NS и т. д.

Если кривая $y = f(x)$ при пересечении с осью X почти горизонтальна, т. е. если величина $f'(x)$ близка к нулю, то рекомендуется обратиться к методу хорд или к другим методам.

Если в некотором интервале (a, b), содержащем корень уравнения $f(x) = 0$, величина $f''(x)$ знакопостоянна, то целесообразно одновременно производить вычисления как по методу Ньютона, так и по методу хорд; при этом один метод будет давать приближенные значения корня с недостатком, а другой — с избытком, что позволит судить о достигнутой точности.

Пример. Найти действительный корень уравнения $x^3 - 2x - 5 = 0$.

Начальное приближение $x = 2$ (рис. 1-190) определяем графически. Дальнейшее уточнение корня производим по формуле Ньютона, которая дает

$$x^{(1)} = 2 - \frac{f(2)}{f'(2)} = 2 + \frac{1}{10} = 2{,}1.$$

Затем находим:

$$x^{(2)} = 2{,}1 - \frac{f(2{,}1)}{f'(2{,}1)} = 2{,}0946$$

и

$$x^{(3)} = 2{,}0946 - \frac{f(2{,}0946)}{f'(2{,}0946)} = 2{,}09455148.$$

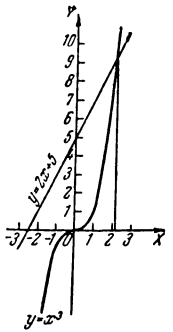


Рис. 1-190.

Рассмотренный метод применим и для получения приближенных значений корней системы уравнений. Например, если для системы $f_1(x, y) = 0$; $f_2(x, y) = 0$ числа $x^{(0)}$, $y^{(0)}$ — начальные приближенные значения корней системы, то следующие их приближения $x^{(1)} = x^{(0)} + h^{(1)}$, $y^{(1)} = y^{(0)} + k^{(1)}$ мы получим, определяя $h^{(1)}$ и $k^{(1)}$ из системы уравнений:

$$\left[\frac{\partial f_1}{\partial x}\right]_0 h^{(1)} + \left[\frac{\partial f_1}{\partial y}\right]_0 k^{(1)} + [f_1]_0 = 0,$$

$$\left[\frac{\partial f_2}{\partial x}\right]_0 h^{(1)} + \left[\frac{\partial f_2}{\partial y}\right]_0 k^{(1)} + [f_2]_0 = 0,$$

где индекс 0, поставленный у скобок, обозначает, что в функции и их производные надо поставить вместо x и y значения $x^{(0)}$ и $y^{(0)}$.

Для получения более точных значений корней следует повторить указанный прием и найти последующие поправки $h^{(2)}$, $k^{(2)}$ и т. д.

§ 1-25. Численное интегрирование (механические квадратуры)

Если в определенном интеграле $\int_a^b f(x)\,dx$ подынтегральная функция задана таблицей, то ее можно численно проинтегрировать, т. е. вычислить приближенно значение определенного интеграла (произвести *механическую квадратуру*). Ниже приводятся некоторые наиболее употребительные формулы механических квадратур.

Формула прямоугольников:

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \frac{b-a}{n}(y_0 + y_1 + y_2 + \ldots + y_{n-1})$$

или

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \frac{b-a}{n}(y_1 + y_2 + y_3 + \ldots + y_n),$$

где $y_0 = f(x_0)$; $y_1 = f(x_0 + h)$; $y_2 = f(x_0 + 2h)$; ...; $y_n = f(x_0 + nh)$, причем $x_0 = a$, $x_n = a + nh = b$, $h = \frac{b-a}{n}$.

Те же обозначения приняты и в следующих двух формулах.

Формула трапеций:

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \frac{b-a}{2n}(y_0 + 2y_1 + 2y_2 + \ldots + 2y_{n-1} + y_n).$$

Формула парабол (Симпсона):

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \frac{b-a}{3n}(y_0 + 4y_1 + 2y_2 + 4y_3 + 2y_4 + \ldots + 4y_{n-3} + 2y_{n-2} + 4y_{n-1} + y_n),$$

где n — четное.

Формула Чебышева:

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \frac{b-a}{n}[f(X_1) + f(X_2) + \ldots + f(X_n)],$$

где

$$X_i = \frac{a+b}{2} + \frac{b-a}{2}x_i,$$

а абсциссы x_i даны ниже в таблице I.

При $n = 8$ и при $n > 9$ формула Чебышева неприменима (абсциссы мнимые).

I. Абсциссы x_i для формулы Чебышева

n	x_1	x_2	x_3	x_4
2	0,577350	— 0,577350		
3	0,707107	0	— 0,707107	
4	0,794654	0,187592	— 0,187592	— 0,794654
5	0,832498	0,374541	0	— 0,374541
6	0,866247	0,422519	0,266635	— 0,266635
7	0,883862	0,529657	0,323919	0
9	0,911589	0,601019	0,528762	— 0,167906

n	x_5	x_6	x_7	x_8	x_9
2					
3					
4					
5	— 0,832498				
6	— 0,422519	— 0,866247			
7	— 0,323919	— 0,529657	— 0,883862		
9	0	— 0,167906	— 0,528762	— 0,601019	— 0,911589

Формула Гаусса:

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx (b-a)[A_1 f(X_1) + A_2 f(X_2) + \ldots + A_n f(X_n)],$$

где $X_i = a + (b-a)x_i$, а коэффициенты A_i и абсциссы x_i даны ниже в таблице II.

II. Абсциссы x_i и коэффициенты A_i формулы Гаусса

n	Абсциссы x_i							
	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8
1	0,5							
2	0,211325	0,788675						
3	0,112702	0,5	0,887298					
4	0,069432	0,330009	0,669991	0,930568				
5	0,046910	0,230765	0,5	0,769235	0,953090			
6	0,033765	0,169395	0,380690	0,619310	0,830605	0,966235		
7	0,025446	0,129234	0,297077	0,5	0,702923	0,870766	0,974554	
8	0,019855	0,101667	0,237234	0,409283	0,591717	0,762766	0,898333	0,980145

n	Коэффициенты A_i							
	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6	A_7	A_8
1	1							
2	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$						
3	$\frac{5}{18}$	$\frac{4}{9}$	$\frac{5}{18}$					
4	0,173927	0,326073	0,326073	0,173927				
5	0,118463	0,239314	0,284444	0,239314	0,118463			
6	0,085662	0,180381	0,233957	0,233957	0,180381	0,085662		
7	0,064742	0,139853	0,190915	0,208980	0,190915	0,139853	0,064742	
8	0,050614	0,111191	0,156853	0,181342	0,181342	0,156853	0,111191	0,050614

Точность каждой формулы механических квадратур, как правило, тем больше, чем больше n. При одних и тех же n вторая формула точнее первой, третья, вообще говоря, еще точнее и поэтому наиболее употребительна.

Пример. Вычислить $I=\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x\,dx$ (точное значение $I=1$).

а) По формуле трапеций. Положив $n=10$, получим:

$$\frac{b-a}{n}=\frac{\pi}{20}=0{,}1570796=9^\circ$$

и

$$I=\frac{1}{2}\cdot 0{,}1570796\,[\sin 0^\circ+2\sin 9^\circ+2\sin 18^\circ+\ldots$$
$$\ldots+2\sin 81^\circ+\sin 90^\circ]=0{,}997946.$$

б) По формуле парабол. При $n=10$ имеем:

$$I=\frac{1}{3}\cdot 0{,}1570796\,[\sin 0^\circ+4\sin 9^\circ+2\sin 18^\circ+4\sin 27^\circ+\ldots$$
$$\ldots+4\sin 72^\circ+2\sin 81^\circ+\sin 90^\circ]=1{,}000005.$$

в) По формуле Чебышева. Положим $n=5$.
Пользуясь таблицей I (стр. 208), имеем:

$$x_1=-x_5=0{,}832498;\quad x_2=-x_4=0{,}374541;\quad x_3=0.$$

Далее,

$$X_i=\frac{a+b}{2}+\frac{b-a}{2}x_i=45^\circ+45^\circ x_i$$

и

$$X_1=45^\circ+45^\circ x_1=82^\circ 27',74;\quad \sin X_1=0{,}99136;$$
$$X_2=45^\circ+45^\circ x_2=61^\circ 51',26;\quad \sin X_2=0{,}88176;$$
$$X_3=45^\circ+45^\circ x_3=45^\circ;\quad \sin X_3=0{,}70711;$$
$$X_4=45^\circ+45^\circ x_4=28^\circ 08',74;\quad \sin X_4=0{,}47171;$$
$$X_5=45^\circ+45^\circ x_5=7^\circ 32',26;\quad \sin X_5=0{,}13117;$$
$$I=\frac{1}{5}\cdot\frac{\pi}{2}(\sin X_1+\sin X_2+\sin X_3+\sin X_4+\sin X_5)=1{,}00000.$$

г) По формуле Гаусса. Взяв $n=5$, находим x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 и A_1, A_2, A_3, A_4, A_5 из таблицы II на стр. 209.
Далее,

$$X_i=a+(b-a)\,x_i=90^\circ x_i,$$

откуда

$$X_1=4^\circ 13'18'',87;\quad X_2=20^\circ 46'7'',96;\quad X_3=45^\circ;$$
$$X_4=69^\circ 13'52'',03;\quad X_5=85^\circ 46'41'',13$$

и

$$I=\frac{\pi}{2}(A_1\sin X_1+A_2\sin X_2+A_3\sin X_3+A_4\sin X_4+A_5\sin X_5)=$$
$$=1{,}000000,$$

§ 1-26. Численное решение дифференциальных уравнений

Для отыскания приближенного частного решения дифференциального уравнения $\frac{dy}{dx} = f(x, y)$, удовлетворяющего начальному условию $y = y_0$ при $x = x_0$, могут быть применены следующие методы.

Метод последовательных приближений. Используя начальное условие, находим из уравнения $y' = f(x, y)$ выражение для y в виде

$$y = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(x, y)\, dx.$$

За исходное приближенное значение y принимаем y_0, подставляем его в подынтегральную функцию вместо y, берем квадратуру (точно или приближенно) и получаем первое приближение:

$$y_1 = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(x, y_0)\, dx.$$

Второе и последующие приближения находим аналогично, последовательно подставляя в подынтегральную функцию вместо y вычисленные приближения y_1, y_2, y_3 и т. д.:

$$y_2 = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(x, y_1)\, dx;\quad y_3 = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(x, y_2)\, dx;\quad \ldots$$

$$y_n = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(x, y_{n-1})\, dx.$$

Процесс последовательного приближения обычно прекращают, как только абсолютная величина разности между двумя соседними приближениями y_{n+1} и y_n становится меньше допускаемой ошибки.

Пример. Найти решение дифференциального уравнения $\frac{dy}{dx} = x + y$, удовлетворяющее начальному условию:

$$y_0 = 1 \text{ при } x = 0.$$

Имеем:

$$y_1 = 1 + \int_0^x (x + 1)\, dx = 1 + x + \frac{x^2}{2};$$

$$y_2 = 1 + \int_0^x \left(x + 1 + x + \frac{x^2}{2}\right) dx = 1 + x + x^2 + \frac{x^3}{6};$$

$$y_3 = 1 + \int_0^x \left(x + 1 + x + x^2 + \frac{x^3}{6}\right) dx = 1 + x + x^2 + \frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{24}.$$

Это приближение дает $y = 1{,}1103$ при $x = 0{,}1$ и $y = 1{,}2127$ при $x = 0{,}2$. Если сравнить эти числа с соответствующими значениями точного решения, то окажется, что в первом из них все знаки верные, а во втором ошибка достигает одной единицы последнего знака.

Применение рядов. Частное решение дифференциального уравнения ищем в виде бесконечного ряда Тейлора:

$$y = y_0 + \frac{y_0'}{1!}(x - x_0) + \frac{y_0''}{2!}(x - x_0)^2 + \dots$$

В этом разложении x_0 и y_0 заданы начальными условиями. Подставляя в дифференциальное уравнение x_0 и y_0 вместо x и y, получим начальное значение первой производной $y_0' = f(x_0, y_0)$.

Для определения начальных значений высших производных продифференцируем наше уравнение по x: $y'' = f_x'(x, y) + f_y'(x, y)\, y'$; в полученном выражении положим $x = x_0$, $y = y_0$, $y' = y_0'$ и находим: $y_0'' = f_x'(x_0, y_0) + f_y'(x_0, y_0)\, y_0'$.

Аналогичным образом определяем начальные значения остальных производных.

Иногда для нахождения коэффициентов ряда применяется способ *неопределенных коэффициентов*. В этом случае записываем решение в виде: $y = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)^2 + \dots$

Продифференцировав по x, получим: $y' = a_1 + 2a_2(x - x_0) + \dots$

Подставляем эти разложения в уравнение, в полученном тождестве сравниваем коэффициенты при одинаковых степенях $x - x_0$ в левой и правой частях тождества и приходим к системе уравнений для определения коэффициентов $a_0, a_1, a_2, \dots$

Метод отыскания решения дифференциальных уравнений в виде бесконечного ряда применим также к уравнениям высших порядков.

Пример. Найти частное решение уравнения $y'' + \frac{1}{x}y' + y = 0$ при начальных условиях: $y = 1$, $y' = 0$ при $x = 0$.

Положив $y = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_{n-2}x^{n-2} + a_{n-1}x^{n-1} + a_nx^n + \dots$, получаем:

$$y' = a_1 + 2a_2x + \dots + (n-2)\, a_{n-2}x^{n-3} + (n-1)\, a_{n-1}x^{n-2} + na_nx^{n-1} + \dots;$$

$$y'' = 2a_2 + \dots + (n-3)(n-2)\, a_{n-2}x^{n-4} + (n-2)(n-1)\, a_{n-1}x^{n-3} + (n-1)\, na_nx^{n-2} + \dots$$

Подстановка в уравнение дает

$$\frac{a_1}{x} + (a_0 + 2a_2 + 2a_2) + \dots + [a_{n-2} + na_n + (n-1)\, na_n]\, x^{n-2} + \dots = 0,$$

или

$$\frac{a_1}{x} + (a_0 + 4a_2) + \dots + (a_{n-2} + n^2a_n)\, x^{n-2} + \dots = 0.$$

Отсюда

$$a_1 = 0;\quad a_0 + 2^2a_2 = 0;\quad a_1 + 3^2a_3 = 0;\quad \dots;\quad a_{n-2} + n^2a_n = 0;\quad \dots$$

Решая эту систему уравнений, получаем:

$$a_1 = a_3 = a_5 = \ldots = 0;$$

$$a_2 = -\frac{a_0}{2^2}; \quad a_4 = -\frac{a_2}{4^2} = \frac{a_0}{2^2 4^2}; \ldots; \quad a_n = -\frac{a_{n-2}}{n^2} = \pm\frac{a_0}{2^2 \cdot 4^2 \ldots n^2}$$

(n — четное) и $y = a_0\left(1 - \frac{x^2}{2^2} + \frac{x^4}{2^2 \cdot 4^2} - \frac{x^6}{2^2 \cdot 4^2 \cdot 6^2} + \ldots\right)$.

Для определения a_0 пользуемся начальными условиями.

Положив $x = 0$ и $y = 1$, находим $a_0 = 1$ (условие $y' = 0$ при $x = 0$ выполняется при любом a_0).

Искомое частное решение

$$y = 1 - \frac{x^2}{2^2} + \frac{x^4}{2^2 \cdot 4^2} - \frac{x^6}{2^2 \cdot 4^2 \cdot 6^2} + \ldots$$

Метод Эйлера — Коши. Переписав дифференциальное уравнение в виде $dy = f(x, y)\,dx$ и заменив дифференциалы приращениями, получим приближенные равенства: $\Delta y_0 = f(x_0, y_0)\,\Delta x_0$;

$$\Delta y_1 = f(x_1, y_1)\,\Delta x_1; \quad \Delta y_2 = f(x_2, y_2)\,\Delta x_2; \ldots$$
$$\ldots; \Delta y_{n-1} = f(x_{n-1}, y_{n-1})\,\Delta x_{n-1}.$$

Из первого равенства определим y_1 по формуле

$$y_1 = y_0 + \Delta y_0 = y_0 + f(x_0, y_0)\,\Delta x_0$$

и подставим во второе равенство. Аналогичным образом из второго равенства определим y_2:

$$y_2 = y_1 + \Delta y_1 = y_1 + f(x_1, y_1)\,\Delta x_1$$

и подставим в третье и т. д.

Способом Эйлера — Коши обычно пользуются лишь для грубого приближения, беря небольшое n.

Метод Адамса — Крылова. Этот метод основан на применении формулы $\Delta y_n = \eta_n + \frac{1}{2}\Delta\eta_{n-1} + \frac{5}{12}\Delta^2\eta_{n-2}$, где $\eta_n = y'_n h = f(x_n, y_n)\,h$.

Если, кроме начального значения функции $y = y_0$ при $x = x_0$, известны еще два значения функции y_1 и y_2, соответствующих значениям аргумента $x_1 = x_0 + h$ и $x_2 = x_0 + 2h$, то можно составить таблицу:

x	y	Δy	η	$\Delta\eta$	$\Delta^2\eta$
x_0	y_0	Δy_0	η_0	$\Delta\eta_0$	$\Delta^2\eta_0$
x_1	y_1	Δy_1	η_1	$\Delta\eta_1$	
x_2	y_2		η_2		

Эта таблица может быть продолжена при помощи основной формулы. В самом деле, положив $n = 2$, находим по формуле Δy_2, а значит и y_3 ($y_3 = y_2 + \Delta y_2$). Вычисляем η_3 по формуле $\eta_3 = f(x_3, y_3)\,h$ и разности $\Delta\eta_2$ и $\Delta^2\eta_1$ и, таким образом, дополним правую часть таблицы одной косой строчкой. Пользуясь последней, а также основной формулой,

определяем Δy_3, а значит, и y_4, вычисляем η_4, $\Delta\eta_3$ и $\Delta^2\eta_2$ и, следовательно, дополним таблицу еще одной косой строчкой. Аналогичным образом продолжим построение таблицы и дальше.

Значения y_1 и y_2, необходимые для построения начальных строк таблицы, можно определить либо с помощью разложения y в ряд, либо по способу последовательных приближений, предложенному А. Н. Крыловым и основанному на двух формулах:

$$\Delta y_0 = \eta_0 + \frac{1}{2}\Delta\eta_0 - \frac{1}{12}\Delta^2\eta_0,$$
$$\Delta y_1 = \eta_1 + \frac{1}{2}\Delta\eta_0 + \frac{5}{12}\Delta^2\eta_0. \qquad (*)$$

В первом приближении принимаем $\Delta y_0 = \eta_0$.

Зная y_0 и вычислив η_0 по формуле $\eta_0 = f(x_0, y_0)h$, находим y_1 ($y_1 = y_0 + \Delta y_0 = y_0 + \eta_0$). Теперь вычислим η_1, а с ним и $\Delta\eta_0$ ($\Delta\eta_0 = \eta_1 - \eta_0$) и исправим значение Δy_0, полагая на этот раз $\Delta y_0 = \eta_0 + \frac{1}{2}\Delta\eta_0$.

При помощи этого уточненного значения Δy_0 исправим значения y_1, η_1 и $\Delta\eta_0$ и находим Δy_1 по формуле $\Delta y_1 = \eta_1 + \frac{1}{2}\Delta\eta_0$.

Теперь можно определить y_2 ($y_2 = y_1 + \Delta y_1$), а также η_2, $\Delta\eta_1 = \eta_2 - \eta_1$ и $\Delta^2\eta_0 = \Delta\eta_1 - \Delta\eta_0$.

Остается проверить выполнение формул (*).

Часто $\Delta^2\eta_0$ оказывается настолько малым, что эти формулы верны, хотя для вычисления Δy_0 и Δy_1 величина $\Delta^2\eta_0$ не принималась в расчет. Если это не так, то перевычисляем Δy_0 и Δy_1 уже полностью по формулам (*), заново вычисляем η_1, η_2, $\Delta\eta_0$, $\Delta\eta_1$ и $\Delta^2\eta_0$ и опять проверяем выполнение формул (*) и т. д. Обычно этот процесс быстро приводит к достаточно точным значениям y_1 и y_2.

Пример. Найти приближенное решение уравнения $y' = \frac{xy}{x^2+y^2}$ при начальных условиях: $x_0 = 0$, $y_0 = 1$.

Составим таблицу значений искомой функции в промежутке от $x = 0$ до $x = 1$ через 0,1 (т. е. положив $h = 0{,}1$); определим сначала по методу Крылова значения y_1 и y_2. Имеем: $\eta_0 = \frac{x_0 y_0}{x_0^2 + y_0^2}h = 0$; в первом приближении полагаем $\Delta y_0 = \eta_0 = 0$, $y_1 = y_0 + \Delta y_0 = 1$ и

$$\eta_1 = \frac{x_1 y_1}{x_1^2 + y_1^2}h = \frac{0{,}1 \cdot 1}{0{,}1^2 + 1^2}\,0{,}1 = 0{,}0099,$$

откуда $\Delta\eta_0 = \eta_1 - \eta_0 = 0{,}0099$.

Исправляем значение Δy_0, полагая

$$\Delta y_0 = \eta_0 + \frac{1}{2}\Delta\eta_0 = 0 + \frac{1}{2} \cdot 0{,}0099 = 0{,}005,$$

откуда

$$y_1 = y_0 + \Delta y_0 = 1{,}005$$

и

$$\eta_1 = \frac{x_1 y_1}{x_1^2 + y_1^2}h = \frac{0{,}1 \cdot 1{,}005}{0{,}1^2 + 1{,}005^2} \cdot 0{,}1 = 0099;$$

тогда

$$\Delta\eta_0 = \eta_1 - \eta_0 = 0{,}0099 - 0 = 0{,}0099$$

и

$$\Delta y_1 = \eta_1 + \frac{1}{2}\Delta\eta_0 = 0{,}0099 - \frac{1}{2} \cdot 0{,}0099 = 0{,}015.$$

Следовательно,

$$y_2 = y_1 + \Delta y_1 = 1{,}005 + 0{,}015 = 1{,}020.$$

Далее,

$$\eta_2 = \frac{x_2 y_2}{x_2^2 + y_2^2} h = \frac{0{,}2 \cdot 1{,}020}{0{,}2^2 \cdot 1{,}020^2} \cdot 0{,}1 = 0{,}0189;$$

$$\Delta\eta_1 = \eta_2 - \eta_1 = 0{,}0189 - 0{,}0099 = -0{,}0090$$

и

$$\Delta^2\eta_0 = \Delta\eta_1 - \Delta\eta_0 = 0{,}0090 - 0{,}0099 = -0{,}0009.$$

Проверим выполнение формул (*) для значений $y_1 = 1{,}005$ и $y_2 = 1{,}020$:

$$\Delta y_0 = 0 + \frac{1}{2} \cdot 0{,}0099 - \frac{1}{12}(-0{,}0009) = 0{,}005;$$

$$\Delta y_1 = 0{,}0099 + \frac{1}{2} \cdot 0{,}0099 + \frac{5}{12}(-0{,}0009) = 0{,}0145.$$

Таким образом, первая формула выполнена точно, а неточность второй столь мала, что скажется только в пятой значащей цифре значения y.

Дальнейшие вычисления значений y по методу Адамса — Крылова даны в следующей таблице.

Решение уравнения $y' = \dfrac{xy}{x^2 + y^2}$

x	y	Δy	η	$\Delta\eta$	$\Delta^2\eta$
0,0	1,000		0		
		0,005		0,0099	
0,1	1,005		0,0099		—0,0009
		0,015		0,0090	
0,2	1,020		0,0189		—0,0013
		0,023		0,0077	
0,3	1,043		0,0266		—0,0016
		0,030		0,0061	
0,4	1,073		0,0327		—0,0013
		0,035		0,0048	
0,5	1,108		0,0375		—0,0012
		0,039		0,0036	
0,6	1,147		0,0411		—0,0010
		0,042		0,0026	
0,7	1,189		0,0437		—0,0007
		0,045		0,0019	
0,8	1,234		0,0456		—0,0004
		0,046		0,0015	
0,9	1,280		0,0471		
		0,048			
1,0	1,328				

§ 1-27. Графические методы

Графическое дифференцирование. Если функция $y = f(x)$ задана графиком (рис. 1-191), то ее производная $f'(x)$ может быть найдена графически следующим образом.

Отрезок $[a, b]$, на котором задана функция $y = f(x)$, делим на n частей. Части отрезка $[a, b]$ необязательно должны быть равными: их следует брать меньшими там, где функция $f(x)$ изменяется быстрее. Из середин всех частей отрезка m_1, m_2, m_3, ... проводим прямые m_1M_1, m_2M_2, m_3M_3, ..., перпендикулярные оси X, до пересечения с кривой в точках M_1, M_2, M_3, ..., в каждой из которых проводим касательные. Затем, выбрав на отрицательной части оси X полюс P на расстоянии $PO = \lambda$ от начала координат, проводим из него параллельно касательным к кривой в точках M_1, M_2, M_3, ... прямые Pn_1, Pn_2, Pn_3, ... до пересечения с осью Y в точ-

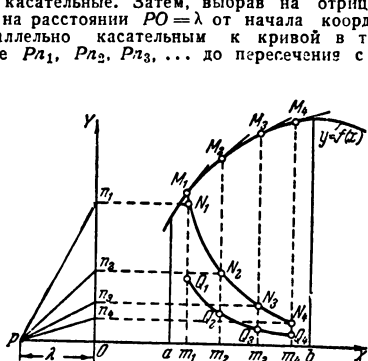


Рис. 1-191.

ках n_1, n_2, n_3, ... Из этих точек проводим параллельно оси X прямые n_1N_1, n_2N_2, n_3N_3, ... до пересечения с соответствующими ординатами (или их продолжениями) m_1M_1, m_2M_2, m_3M_3, ... в точках N_1, N_2, N_3, ...

Ломаная или кривая $N_1N_2N_3$, ... является приближенным графиком функции $y = \lambda f'(x)$; при $\lambda = 1$ получим искомый график производной $y = f'(x)$.

Если $\lambda \neq 1$, то мы строим точки Q_1, Q_2, Q_3, ... с ординатами, равными ординатам точек N_1, N_2, N_3, ..., разделенным на λ. Кривая, соединяющая точки Q_1, Q_2, Q_3, ..., является графиком производной.

Графическое интегрирование. Если дан график функции $y = f(x)$ (рис. 1-192), то значение определенного интеграла $\int_a^b f(x)\,dx$ можно найти графически следующим образом. Площадь $RMNT$, которая дает величину определенного интеграла, разбиваем на отдельные криволинейные трапеции RMM_1Q_1, $Q_1M_1M_2Q_2$, $Q_2M_2M_3Q_3$, Q_3M_3NT и строим прямоугольники RMN_1Q_1, $Q_1N_1'N_2Q_2$, $Q_2M_2N_3Q_3$, $Q_3N_3'N'T$ так, чтобы площади входящих и выходящих криволинейных треугольников (заштри-

хованных на чертеже) были приблизительно равны; тогда искомую площадь можно заменить суммой площадей этих прямоугольников.

Чтобы графически получить число, равное числу, измеряющему площадь первого прямоугольника RMN_1Q_1, отложим на оси X влево от начала координат отрезок $OP=\lambda$, а по оси Y отрезок $OA_1=Q_1N_1$ и

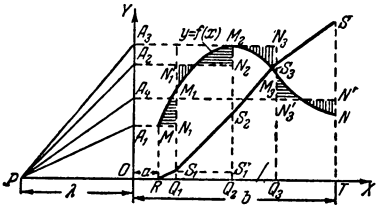


Рис. 1-192.

из точки R проведем прямую, параллельную PA_1 до пересечения с Q_1N_1 в точке S_1. Длина отрезка Q_1S_1 будет графически выражать площадь прямоугольника RMN_1Q_1, деленную на λ.

Затем таким же способом строим отрезок, длина которого численно равна площади второго прямоугольника. Для этого откладываем на оси Y от начала координат отрезок $OA_2=Q_2N_2$ и из точки S_1 проводим прямую, параллельную PA_2, до пересечения с прямой Q_2N_2

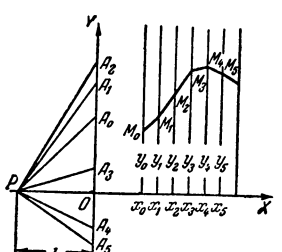


Рис. 1-193.

в точке S_2. Отрезок S'_1S_2 дает площадь второго прямоугольника, деленную на λ, а отрезок Q_2S_2 — сумму площадей первого и второго прямоугольников, деленную на λ, и т. д. При $\lambda=1$ длины отрезков Q_1S_1 и S'_1S_2 численно равны площадям прямоугольников RMN_1Q_1, $Q_1N'_1N_2Q_2$, а длина отрезка Q_2S_2 — сумме площадей этих прямоугольников. Продолжая построение, придем к отрезку TS, который при $\lambda=1$ даст графически величину интеграла $\int_a^b f(x)\,dx$.

Ломаная $RS_1S_2S_3S$ будет (при $\lambda = 1$) представлять приближенно график функции $y = \int\limits_a^x f(x)\,dx$.

Графическое решение дифференциальных уравнений. Уравнение $\frac{dy}{dx} = f(x, y)$ дает зависимость между координатами точки $M(x, y)$ и угловым коэффициентом касательной к интегральной кривой в этой точке.

Если дано начальное значение искомой функции $y = y_0$ при $x = x_0$, то из семейства кривых, представляемых общим решением данного уравнения, можно выделить определенную кривую, проходящую через точку $M_0(x_0, y_0)$.

Для приближенного построения этой кривой разбиваем координатную плоскость на полосы прямыми $x = x_0$, $x = x_1$, $x = x_2$ и т. д., параллельными оси Y, и от начала координат на оси X откладываем отрезок $OP = 1$ (рис. 1-193).

Определив из данного уравнения $f(x_0, y_0)$, откладываем на оси Y отрезок $OA_0 = f(x_0, y_0)$.

Прямая PA_0 параллельна касательной к интегральной кривой в точке M_0, так как ее угловой коэффициент равен $f(x_0, y_0)$.

Из точки M_0 проводим прямую $M_0M_1 \parallel PA_0$ до пересечения с прямой $x = x_1$ и измеряем ординату y_1 точки M_1. Затем на оси ординат откладываем отрезок $OA_1 = f(x_1, y_1)$ и из точки M_1 проводим прямую $M_1M_2 \parallel PA_1$ до пересечения с прямой $x = x_2$ в точке M_2, измеряем ординату y_2 этой точки, откладываем по оси Y отрезок $OA_2 = f(x_2, y_2)$ и т. д.

Построенная ломаная $M_0M_1M_2M_3M_4M_5$ представляет приближенно интегральную кривую.

ОТДЕЛ ВТОРОЙ

ФИЗИКА

К. П. Яковлев

ОБОЗНАЧЕНИЯ

Латинский алфавит

A — работа; атомный вес.
a — ускорение поступательного движения.
B — магнитная индукция; яркость света.
C — концентрация; теплоемкость; электростатическая емкость.
°C — градусы по стоградусной шкале (Цельсия).
c — удельная теплоемкость; скорость света в пустоте.
D — плотность твердых тел, коэффициент диффузии.
d — символ дейтона в ядерной физике.
E — энергия; модуль упругости (модуль Юнга); напряженность электрического поля; электродвижущая сила.
e — заряд электрона; символ электрона в ядерной физике.
F — сила; число Фарадея.
G — вес тела в пустоте.
g — ускорение силы тяжести.
g_0 — нормальное значение ускорения силы тяжести.
H — высота барометра; напряженность магнитного поля; горизонтальная составляющая земного магнетизма.
h — постоянная Планка.
I — сила тока.
J — момент инерции; механический эквивалент калории.
K — коэффициент диффузии.
°K — градусы по абсолютной шкале.
κ — постоянная Больцмана.
L — длина; индуктивность.
l — длина.
M — масса; молекулярный вес.
m — масса.
m_{H} — масса атома водорода.
m_n — масса нейтрона.
m_p — масса протона.
m_e — масса покоящегося электрона.
N — мощность.
N_0 — число Авогадро.
n — коэффициент преломления света; символ нейтрона в ядерной физике.
P — вес тела в воздухе.
p — давление; символ протона в ядерной физике.

Q — количество теплоты; энергия ядерных реакций.
q — электрический заряд.
R — газовая постоянная; электрическое сопротивление; постоянная Ридберга.
r — радиус; расстояние; вероятная ошибка измерений.
S — перемещение (путь) в поступательном движении; площадь.
T — время; период; абсолютная температура; период полураспада радиоактивных тел.
t — время; температура по шкале Цельсия.
U — электрический потенциал.
u — скорость молекул; подвижность ионов.
$\bar{u}$ — средняя скорость молекулярного движения.
V — объем; электрический потенциал.
v — скорость в поступательном движении; удельный объем.
Z — атомный (порядковый) номер.

Греческий алфавит

α — линейный коэффициент расширения твердых тел; коэффициент расширения газов; символ α - частицы в ядерной физике.
β — кубический (объемный) коэффициент расширения.
γ — удельный вес.
δ — относительная ошибка измерений.
ε — угловое ускорение; абсолютная ошибка измерений.
η — коэффициент внутреннего трения (вязкость).
λ — удельная теплота плавления; коэффициент теплопроводности; длина световых волн.
μ — коэффициент Пуассона; магнитная проницаемость.
ν — частота колебаний.
ρ — плотность газов; удельная теплота парообразования; удельное электрическое сопротивление.
σ — коэффициент поверхностного натяжения; средняя квадратичная ошибка измерений.
φ — угловое перемещение.
χ — магнитная восприимчивость.

Глава 2-1

ФИЗИЧЕСКИЕ ВЕЛИЧИНЫ, ИХ РАЗМЕРНОСТИ И ЕДИНИЦЫ ИЗМЕРЕНИЙ

§ 2-1. Метрическая система мер и основные системы единиц

Основными величинами в метрической системе мер, разработанной в конце XVIII столетия Комиссией французских ученых, были выбраны *длина L*, *масса M* и *время T*, а единицами измерения этих величин были приняты *метр*, *грамм* и *секунда*. Относительно этих единиц необходимо сделать следующие замечания.

1. В качестве основной единицы длины, названной *метром*, Французская комиссия решила принять длину, равную одной десятимиллионной части четверти земного меридиана. На основании результатов соответствующих геодезических измерений был изготовлен из платины первый эталон метра, получивший впоследствии название *архивный прототип метра* или *«архивный метр»*. Его длина при 0^0C предполагалась равной 10^{-7} части четверти земного меридиана, однако из

позднейших исследований выяснилось, что длина архивного метра несколько, хотя и очень незначительно, меньше этой величины.

2. В качестве основной единицы массы, названной *граммом*, Французская комиссия решила принять массу чистой (дистиллированной) воды, объем которой при 4° С (температуре наибольшей плотности воды) равняется одному кубическому сантиметру. Первый эталон единицы массы, равный 1000 граммов, изготовленный из платины, получил название *килограмма*. Его масса была принята равной массе чистой воды, имеющей при 4° С объем, равный 1000 куб. сантиметров. Этот первый эталон килограмма получил название *архивный прототип килограмма* или *«архивный килограмм»*. Впоследствии оказалось, что архивный килограмм имеет массу несколько бо́льшую, чем предполагалось; в настоящее время принимают, что архивный килограмм отвечает массе воды, имеющей при 4° С объем, равный 1000,028 *куб. см*.

3. Основная единица времени, *секунда*, была определена Французской комиссией как промежуток времени, равный $\frac{1}{24} \cdot 60 \cdot 60$, т. е. $\frac{1}{86\,400}$ средних солнечных суток.

В 1889 г. в Париже была созвана Первая международная конференция мер и весов, которая рассматривала вопросы об окончательном установлении основных единиц *длины* (L), *массы* (M) и *времени* (T). Единица времени *секунда* и ее определение были оставлены без существенных изменений; что же касается единиц для L и M, то на конференции было решено принять в качестве основных единиц длины и массы длину архивного метра и массу архивного килограмма, хотя они и не отвечают своему начальному определению. Вслед за этим были изготовлены возможно точные копии архивных образцов метра и килограмма. Материалом для копий служил сплав 90% Pt и 10% Ir, который обладает достаточной твердостью, малым температурным коэффициентом расширения и очень большой химической стойкостью. Две лучшие копии метра и килограмма, т. е. наиболее близко отвечающие архивным образцам, были переданы в Международное Бюро мер и весов, где и хранятся в качестве международных эталонов единиц длины и массы; остальные копии были распределены между государствами, которые участвовали в создании Международного Бюро, и служат в каждом государстве своими национальными эталонами метра и килограмма. Очень незначительные расхождения между отдельными эталонами-копиями, тщательно исследованные, не имеют сколько-нибудь существенного значения при современном развитии техники и методов измерений.

Для основных единиц метрической системы были введены по международному соглашению сокращенные обозначения m, g и s. Наряду с международными символами в СССР утверждены также русские сокращенные обозначения для этих единиц соответственно *м*, *г* и *сек*. Производные единицы в метрической системе мер строятся, как известно, по принципу десятичного подразделения. Названия производных единиц образуются из названий основных единиц при помощи особых приставок, которые отвечают названиям чисел, кратных десяти, взятым с греческого языка для производных единиц, бо́льших основных, и с латинского и греческого языков — для производных единиц, меньших основных. Эти приставки и их символы даны в табл. 2-I, где знак тире (—) обозначает, что вместо него ставится название основной единицы или ее символ, соответственно русский или международный.

По отношению к этой таблице необходимо заметить следующее:

1) Квадратные и кубические меры в метрической системе обозначают, как обычно, т. е. показателями степени 2 и 3 при символах соответствующих единиц, например $см^2$ (*кв. см*), $м^3$ (*куб. м*) и т. д.

2) Не все приставки находят одинаковое применение, так: а) принято говорить десять граммов, сто граммов вместо декаграмм, гектограмм; б) очень редко употребляются такие названия производных единиц, как декаметр, гектометр и т. п.

Таблица 2-1

Приставки производных единиц в метрической системе

	Приставки	10^n	Символ	
			русск.	междунар.
Греч.	Тера — (Tera —)	10^{12}	*Т*	T
	Гига — (Giga —)	10^9	*Г*	G
	Мега — (Mega —)	10^6	*М*	M
	Кило — (Kilo —)	10^3	*к*	K
	Гекто — (Hekto —)	10^2	*г*	h
	Дека — (Deka —)	10	*дк*	dk
Латин.	Деци — (Deci —)	10^{-1}	*д*	d
	Санти — (Centi —)	10^{-2}	*с*	c
	Милли — (Milli —)	10^{-3}	*м*	m
Греч.	Микро — (Mikro —)	10^{-6}	*мк*	μ
	Нано — (Nano —)	10^{-9}	*н*	n
	Пико — (Piko —)	10^{-12}	*п*	p

3) Некоторые производные единицы получили особые названия, от которых иногда образуются свои производные единицы при помощи тех же приставок, так: а) объем, приближенно равный 1000 *см*³, или 1 *дм*³ (стр. 228), называется *литром* (*л* и l); *литр* служит основной единицей емкости (вместимости) сосудов и образует свою систему производных единиц, например *декалитр* (*дкл*, dkl), *децилитр* (*дл*, dl), *миллилитр* (*мл*, ml) и т. д.; б) 100 кв. метров называются *ар* (*а* и a), отсюда общеизвестная производная единица *гектар* (*га* и ha); в) 100 *кг* и 1000 *кг* называются соответственно *центнер* и *тонна* и некоторые другие.

4) Производные от единицы времени *секунды*, меньшие ее, строятся по принципу десятичного подразделения и имеют соответствующие приставки, например *миллисекунда* (*мсек* и ms), равная 10^{-3} *сек*, *микросекунда* (*мксек* и μs), равная 10^{-6} *сек*, и т. п.; но для производных, бо́льших секунды, сохранены старинное название и старинное соотношение, кратное 12: минута (*мин* и min), *час* (*ч* и h), *сутки*.

Метрическая система мер в настоящее время принята повсеместно, но в некоторых странах, например в Англии и Америке, их старые меры продолжают применяться наряду с метрическими, главным образом в технике (см. т. II, Приложения).

Метрическая система мер послужила основой для разработки нескольких систем единиц, которые отличаются как величиной основных единиц, так иногда и их выбором. Из этих систем единиц в СССР согласно ГОСТ 7664-55 используются три системы. В двух из них основными величинами выбраны *длина* (*L*), *масса* (*M*) и *время* (*T*). В третьей системе единиц основными величинами выбраны *длина* (*L*), *сила* (*F*) и *время* (*T*).

Две первые системы отличаются между собой только размерами основных единиц; эти две системы таковы:

а) Система, в которой основными единицами выбраны *сантиметр* (*см* или cm), *грамм* (*г* или *g*) и *секунда* (*сек* или s). Эта система называется обычно СГС- или CGS-системой; ее называют также физической системой. Она считается международной системой единиц и применяется главным образом в научных исследованиях по физике (стр. 227),

б) Система, в которой основными единицами выбраны *метр* (*м* или m), *килограмм* (*кг* или kg) и *секунда* (*сек* или s); эта система, называемая МКС- или MKS-системами, недавно была принята в качестве *международной практической системы единиц*. Системы СГС и МКС иногда называют LMT-системами по буквам, которые служат для обозначения основных величин, принятых в них.

Ранее применявшаяся международная система единиц, в которой основными единицами считались метр (*м*), тонна (*т*) и секунда (*сек*) (так называемая МТС-система), в настоящее время не используется, но некоторые ее производные единицы еще встречаются (стр. 230).

В третьей системе единиц основными единицами выбраны: единицей длины *метр* (*м* и m), единицей силы — вес одного *килограмма* (обозначается согласно ГОСТ *кгс*, *кГ* или kgf, kG) и единицей времени секунда (*сек* и s). Эта система единиц называется МКГСС- или MKGFS-системой; ее называют также *технической системой*, так как она применяется главным образом в технике. Эту систему иногда называют LFT-системой по буквам, принятым для обозначения ее основных величин.

Основные величины и основные единицы этих трех систем сопоставлены в табл. 2-2.

Таблица 2-2

Основные единицы метрических систем

Система	Основные величины		Единицы	Обозначение
СГС, или CGS	*Длина*	*L*	сантиметр	*см*
	Масса	*M*	грамм	*г*
	Время	*T*	секунда	*сек*
МКС, или MKS	*Длина*	*L*	метр	*м*
	Масса	*M*	килограмм	*кг*
	Время	*T*	секунда	*сек*
МКГСС, или MKGFS	*Длина*	*L*	метр	*м*
	Сила	*F*	вес одного килограмма	*кгс* (*кГ*)
	Время	*T*	секунда	*сек*

Таким образом, только единица времени (*сек*) оказывается общей во всех трех системах. Что же касается *формул размерностей*, то в системах СГС и МКС формулы размерностей являются одинаковыми, но они отличаются от формул размерностей в системе МКГСС.

§ 2-2. Анализ размерностей

Так как физических величин чрезвычайно много и для каждой величины должна быть установлена особая единица, то система единиц в физике должна была бы быть очень сложной. Работы в этом отношении исторически были направлены на возможно полную унификацию единиц, на разработку такой системы единиц, которая охватывала бы все разделы физики.

Результаты этих работ привели к заключению, что для измерения всех физических величин можно установить систему единиц, в которой,

говоря вообще, только три разнородные величины имеют независимые друг от друга значения. Это — так называемые *основные величины* системы; так, в двух указанных выше системах *LMT* основными величинами были выбраны *длина* (*L*), *масса* (*M*) и *время* (*T*). Единицы, установленные для измерения основных величин, называются *основными* единицами системы. Единицы всех остальных физических величин, таких, например, как ускорение, работа, электрический потенциал, сопротивление и т. д., могут быть поставлены в определенную зависимость от основных единиц системы и поэтому носят название *производных*. Но в учении о тепловых явлениях оказалось необходимым ввести еще одну четвертую основную единицу для измерения *температуры*.

Зависимость между производными и основными единицами устанавливается на основании законов физических явлений и определяется так называемыми формулами размерностей. Последние представляют собой условные равенства; в их левой части ставится в квадратных скобках физическая величина, размерность которой определяется, а в правой части стоят основные величины системы в некоторых степенях. Так, если основными величинами системы служат *L*, *M* и *T*, то формулу размерности некоторой физической величины *A* в этой системе в общем виде следует написать так:

$$[A] = L^{\alpha}M^{\beta}T^{\gamma}. \qquad (2\text{-}1)$$

В этой формуле показатели степени α, β и γ могут быть целыми и дробными, положительными и отрицательными, могут иметь и нулевые значения. Случай, когда все три показателя степени α, β и γ равны нулю ($\alpha = \beta = \gamma = 0$), отвечает безразмерной величине, т. е. величине, которая имеет нулевую размерность относительно всех трех основных величин системы. В правой части формул размерности принято ставить все три основные величины системы, хотя бы они и имели нулевые показатели степени. Величины *L*, *M*, *T* ставятся в том порядке, который указан в формуле (2-1). Числовые значения показателей α, β и γ устанавливаются на основании законов физических явлений или на основании общего определения величины *A*. Рассмотрим несколько примеров определения размерностей физических величин, полагая, по-прежнему, что мы имеем СГС- или МКС-систему.

1. Скорость v при равномерном прямолинейном движении определяется как отношение пути s к времени t, т. е. $v = s/t$, а в общем случае произвольного движения — как предел, к которому стремится это отношение при бесконечном уменьшении t. Отсюда непосредственно следует, что формула размерности v имеет такой вид:

$$[v] = L^1M^0T^{-1}. \qquad (2\text{-}2)$$

При *M* мы ставим нулевой показатель, так как масса в выражение v не входит.

2. Ускорение a при произвольном прямолинейном движении определяется как предел, к которому стремится отношение $\Delta v/\Delta t$ при бесконечном убывании Δt. Отсюда, принимая во внимание формулу (2-2), для размерности ускорения находим:

$$[a] = \frac{[v]}{[t]} = L^1M^0T^{-2}. \qquad (2\text{-}3)$$

3. Сила *F* по второму закону движения определяется как произведение массы *M* тела на сообщаемое ему силой ускорение: $F = ma$. Отсюда, принимая во внимание формулу (2-3), находим размерность силы:

$$[F] = [m][a] = L^1MT^{-2}. \qquad (2\text{-}4)$$

4. Работу *A* для случая, когда направление действующей (постоянной) силы *F* совпадает с направлением перемещения *s* тела, определяют

как произведение силы F на перемещение s, т. е. $A = Fs$. Отсюда, принимая во внимание формулу (2-4), находим размерность работы:

$$[A] = [F][s] = L^2MT^{-2}. \qquad (2\text{-}5)$$

5. По электростатическому закону Кулона два точечных заряда q_1 и q_2, находящиеся в пустоте на расстоянии r, взаимодействуют с силой F, равной

$$F = \frac{q_1 q_2}{r^2}.$$

Определим размерность электрического заряда в системах СГС или МКС. Для этого в формуле Кулона полагаем $q_1 = q_2 = q$ и решаем ее относительно q; находим:

$$q\sqrt{Fr^2}.$$

Отсюда, переходя к размерностям, имеем:

$$[q] = \sqrt{[F][r^2]}.$$

Подставляя сюда размерность F и r, получаем:

$$q = \sqrt{LMT^{-2}L^2} = L^{3/2}M^{1/2}T^{-1}. \qquad (2\text{-}6)$$

Тот же результат можно получить другим способом, к которому при анализе размерностей иногда приходится прибегать, хотя он и является более сложным.

Для этого, написав закон Кулона в виде $F = \frac{q^2}{r^2}$, воспользуемся тем, что в каждом уравнении размерность правой и левой частей должна быть одинаковой. Поэтому, переходя к размерностям, можем написать:

$$|F|\,|r^2| = |q^2|. \qquad (2\text{-}6')$$

Размерности F и r известны, что же касается неизвестной нам размерности q, то напишем ее в общем виде, полагая

$$[q] = L^{\alpha}M^{\beta}T^{\gamma}.$$

Вводя в формулу (2-6′) размерности F и r, находим:

$$LMT^{-2}L^2 = L^{2\alpha}M^{2\beta}T^{2\gamma}$$

или

$$L^3MT^{-2} = L^{2\alpha}M^{2\beta}T^{2\gamma}.$$

Для того чтобы размерность правой и левой частей была одинаковой, необходимо, чтобы показатели степеней L, M и T в той и другой частях были равны. Таким образом, получаем три уравнения:

$$2\alpha = 3; \qquad 2\beta = 1; \qquad 2\gamma = -2.$$

Отсюда находим:

$$\alpha = {}^3/_2; \qquad \beta = {}^1/_2; \qquad \gamma = -1$$

и для размерности q получаем прежнее выражение (2-6):

$$[q] = L^{3/2}M^{1/2}T^{-1}.$$

Разобранные примеры показывают, что формулы размерностей остаются неизменными, если не изменяются основные величины системы, независимо от того, какие единицы мы выберем для измерения основных величин. Таким образом, формулы размерностей всех физических величин в системах единиц СГС и МКС (стр. 223) остаются одинаковыми. Вместе с тем необходимо иметь в виду, что остаются одинаковыми

только формулы размерностей, но числовые значения физических величин всецело зависят от единиц, выбранных для измерения. Это становится понятным из следующих соображений.

Результатом каждого физического измерения является число, которое показывает в пределах точности измерений, сколько раз выбранная единица измерения содержится в измеряемой величине. Обозначая измеряемую величину буквой A, единицу измерения a_1 и результат измерений n_1, можно, очевидно, написать:

$$A = n_1 a_1. \tag{2-7}$$

Если для измерения той же величины A взять другую единицу a_2, то получится иной числовой результат n_2, причем по-прежнему можно написать:

$$A = n_2 a_2. \tag{2-7'}$$

Из этих двух уравнений находим:

$$\frac{n_2}{n_1} = \frac{a_1}{a_2} \quad \text{и} \quad n_2 = n_1 \frac{a_1}{a_2}. \tag{2-8}$$

Из уравнений (2-8) мы видим, что *числовые результаты измерений одной и той же величины различными единицами обратно пропорциональны величинам этих единиц*. Так, приближенное значение скорости света в пустоте, измеренной в *см/сек*, определяется числом $3 \cdot 10^{10}$, а значение той же величины, измеренной в *км/сек*, определяется числом $3 \cdot 10^5$, т. е. числом в 10^5 раз меньшим, поскольку километр в 10^5 раз больше сантиметра.

Далее необходимо указать на то, что формулы размерностей, выраженные в некоторой системе, например в системе СГС, становятся совершенно иными, если мы приходим к системе с другими основными величинами, например к системе МКГСС (стр. 223). Можно также сказать, что одна и та же физическая величина может иметь различные размерности, если они выражены в системах с различными основными величинами. В этом нетрудно убедиться, если вычислить в системе МКГСС размерности тех величин, размерности которых выше были выражены в системах СГС и МКС; некоторые отдельные случаи совпадения размерностей в системах с равными основными величинами становятся понятными из дальнейшего. Действительно:

а) Если мы будем, так же как и раньше, определять размерности v и a в системе МКГСС, получим, очевидно, такие выражения:

$$[v] = L^1 F^0 T^{-1} \quad \text{и} \quad [a] = L^1 F^0 T^{-2}.$$

Сравнивая их с формулами (2-2) и (2-3), приходим к выводу, что размерности v в системах СГС и МКГСС оказываются одинаковыми, то же относится и к размерностям для a; это объясняется тем, что v и a имеет нулевую размерность как относительно M, так и относительно F.

б) Сила F, размерность которой в системах СГС и МКС определяется формулой (2-4), в системе МКГСС является основной величиной, и ее размерность в этой системе можно выразить такой формулой:

$$[F] = L^0 F^1 T^0.$$

в) Точно так же размерность работы A, определяемая в системах СГС и МКС формулой (2-5), в системе МКГСС выражается, очевидно, такой формулой:

$$[A] = L^1 F^1 T^0.$$

г) Размерность электрического заряда, определяемая в системах СГС и МКС формулой (2-6), в системе МКГСС, как это нетрудно найти, имеет такой вид:

$$[q] = L^1 F^{1/2} T^0.$$

Следует обратить внимание на размерность массы m в системе МКГСС.

В системах СГС и МКС масса является основной величиной, и ее размерность можно выразить такой формулой:

$$[m] = L^0 M^1 T^0.$$

В системе МКГСС масса является величиной производной, и для определения ее размерности в этой системе следует воспользоваться вторым законом движения, который нам дает:

$$m = \frac{F}{a}.$$

Переходя к размерностям, получаем:

$$[m] = \frac{[F]}{[a]} = L^{-1} F^1 T^2.$$

Эти соображения позволяют установить величину единицы массы в технической системе (МКГСС). Действительно, из предпоследней формулы видно, что единицей массы в технической системе следует считать массу тела, которое под действием силы, равной 1 *кг*, приобретает ускорение 1 $м \cdot сек^{-2}$. Применяя второй закон движения к случаю свободного падения тел под действием силы тяжести, получаем известное соотношение между весом p и массой m тела:

$$p = mg,$$

где g обозначает ускорение свободно падающего тела, приближенно равное в технической системе 9,81 $м \cdot сек^2$. Из этой формулы следует, что число, выражающее массу тела в технических единицах массы, должно быть в g раз, т. е. приближенно в 9,81 раза меньше числа, выражающего вес того же тела в килограммах, а отсюда на основании формулы (2-8) мы заключаем, что единица массы в технической системе во столько же раз должна быть больше массы одного килограмма. Техническую единицу массы одно время называли *тем*, в настоящее время ее иногда называют *инерта* (обозначение *и*), которым мы будем пользоваться в дальнейшем. Таким образом, можно написать:

$$1и = 1\ кг \cdot сек^2 \cdot м^{-1} \approx 9{,}81\ кг.$$

Теория размерностей в физике и смежных с ней науках имеет очень большое значение. Формулы размерностей необходимо применять при переходе от одной системы единиц к другой (стр. 229). Те же формулы играют важную роль при контроле математических преобразований различных физических формул. Это следует из того, что в любом физическом уравнении не только размерности обеих его частей должны быть одинаковы, но и все отдельные члены уравнения должны иметь одинаковую размерность, так как складывать и вычитать мы можем только однородные величины, т. е. величины, имеющие одинаковые размерности. Если в каком-либо физическом уравнении, выведенном при помощи математических преобразований, этого не наблюдается, то можно утверждать, что при выводе уравнения была допущена ошибка. Наконец, методом размерностей часто удается устанавливать, хотя только качественно, законы различных физических и механических явлений, не прибегая к сложным математическим операциям.

§ 2-3. Система СГС и переход от одной системы единиц к другой

В физике наиболее широкое применение находит система СГС (стр. 222), которая одно время носила название *абсолютной системы единиц*. Однако необходимо указать, что достаточных оснований для такого названия не имеется, так как, как видно из предыдущего, основ-

ные единицы системы СГС—сантиметр, грамм, секунда —являются столь же условными, как и основные единицы других систем. Поэтому систему СГС в последнее время редко называют абсолютной. Производные единицы в системе СГС обозначаются при помощи указанных выше приставок (стр. 222). В дополнение к тому, что было по этому вопросу сказано, необходимо указать еще следующее:

1. В физике очень часто приходится встречаться с весьма малыми величинами; таковы, например, длины волн световых и рентгеновских лучей, массы атомов и молекул и т. п. Это потребовало применения весьма малых производных единиц, для которых, как указано выше, были введены еще две приставки:

1. Миллимикро — (*ммк* и mμ) или нано — (*н* и n) — 10^{-9} основной единицы и

2. Микромикро — (*мкмк* и μμ) или пико — (*п* и p) — 10^{-12} основной единицы.

Но эти приставки применяются не часто и не для всех величин, так как одновременно были введены для измерения очень малых величин некоторые особые единицы с особыми названиями, получившие международное признание, а именно:

а) для измерения весьма малых длин принято пользоваться единицами, указанными в табл. 2-3, где даны: 1) названия этих единиц и их обозначения, русские и международные; 2) их величина относительно предыдущей единицы и 3) их отношение к сантиметру.

Таблица 2-3

Единицы для измерения малых длин

Название	Обозначение	Величина	Отношение к *см*
Микрон	*мк*, μ	0,001 *мм*	10^{-4}
Миллимикрон	*ммк*, mμ	0,001 μ	10^{-7}
Единица Ангстрема	Å	0,1 mμ	10^{-8}
Микромикрон	*мкмк*, μμ	0,001 mμ	10^{-10}
Единица X	X	~ 0,001 Å	10^{-11}

б) Для измерения весьма малых масс применяется микрограмм (10^{-6} *г*), который имеет второе широко распространенное название *гамма* и обозначается символом γ; отсюда образованы две производные единицы: 1) миллигамма (*мγ* и mγ, иногда γγ = 10^{-9} *г*) и 2) микрогамма (*мкγ* и μγ, иногда γγγ = 10^{-12} *г*).

Очень широко распространен еще один прием для обозначения весьма малых величин: такие величины обозначают в основных единицах системы СГС, но вводят при этом в качестве множителя десять в соответствующей отрицательной степени. Так, вместо 1Å пишут 10^{-8} *см*, массу атома водорода обозначают $1{,}673 \cdot 10^{-24}$ *г*, постоянную Планка *h* принимают равной $6{,}62 \cdot 10^{-27}$ *эрг · сек* и т. п.

2. К этому приему прибегают и в тех случаях, когда приходится характеризовать очень большие величины, с которыми в физике тоже часто приходится иметь дело, т. е. пользуются соответствующей положительной степенью десяти. Так, приближенное значение скорости света в пустоте принимают равным $3 \cdot 10^{10}$ *см/сек*, число молекул в 1 $см^3$ газа при нормальных условиях считают равным $2{,}687 \cdot 10^{19}$ и т. д.

3. Выше было указано, что масса воды, равная 1 *кг*, имеет объем, равный при 4° С 1000,028 $см^3$ (стр. 221). Отсюда следует, что масса воды, взятой при 4° С в объеме 1000 $см^3$, или 1 $дм^3$, меньше 1 *кг*, она принимается равной 0,999972 *кг*. Так как литром называется тот объем,

который занимает 1 *кг* воды, взятой при 4° С, то мы видим, что, строго говоря, 1 *л* не равен 1000 *см*³, или 1 *дм*³, как это обычно принимается, так как объем литра равняется 1000,028 *см*³, или 1,000028 *дм*³. Точно так же масса воды, взятой при 4° С в объеме 1 *см*³, строго говоря, равна не 1 *г*, а 0,999972 *г*. Разность между литром и кубическим дециметром (или между граммом и массой одного кубического сантиметра воды, взятой при 4° С), настолько незначительна, что при обычных лабораторных работах не имеет значения, но при очень точных измерениях, если, например, относительная ошибка результата (стр. 247) не должна превышать 0,01%, эту разность необходимо принимать во внимание.

Система СГС применяется во всех разделах физики, но иногда приходится обращаться и к другим системам или вводить другие единицы. При таком переходе от одной системы единиц к другой применяются особые правила, которые можно обосновать следующим образом.

Формулу размерности некоторой производной физической величины A, как уже было сказано (стр. 224), в общем виде можно написать так:

$$[A] = L^{\alpha}M^{\beta}T^{\gamma}, \tag{2-9}$$

где L, M и T (длина, масса и время) мы считаем основными единицами данной системы, а показатели α, β, γ являются некоторыми числами целыми или дробными, положительными или отрицательными.

Всякая другая величина A_1, однородная с A, имеет ту же размерность, т. е. одинаковые показатели α, β, γ в правой части выражения (2-9). Обозначая отношение A_1 к A буквой n, можно написать:

$$A_1 = nA = n(L^{\alpha}M^{\beta}T^{\gamma}).$$

В этом выражении мы можем, согласно равенству (2-7), считать величину A единицей для измерения величины A_1, а n — числовым результатом такого измерения.

Допустим, что вместо прежних основных единиц L, M и T мы вводим новые основные единицы L_1, M_1 и T_1; их отношение к прежним единицам обозначим соответственно x, y и z, т. е. положим:

$$\frac{L_1}{L} = x, \qquad \frac{M_1}{M} = y, \qquad \frac{T_1}{T} = z. \tag{2-10}$$

При этом, очевидно, прежняя единица A измерения величины A_1 заменится новой единицей A' и прежний результат измерений n — новым результатом n'.

Так как новая единица A' служит для измерения той же величины A_1 и получается в результате перехода к новым единицам L_1, M_1 и T_1, то можно написать:

$$A' = L_1^{\alpha}M_1^{\beta}T_1^{\gamma}.$$

Отсюда на основании уравнения (2-10) и (2-9) находим:

$$A' = x^{\alpha}y^{\beta}z^{\gamma}(L^{\alpha}M^{\beta}T^{\gamma}) = x^{\alpha}y^{\beta}z^{\gamma} \cdot A. \tag{2-11}$$

Итак, при переходе к новым основным единицам системы новая единица какой-либо производной величины равняется ее прежней единице, умноженной на формулу размерности данной величины, в которую вместо основных единиц системы следует подставить отношения новых основных единиц к прежним.

Точно так же на основании уравнений (2-8) и (2-11) имеем:

$$\frac{n'}{n} = \frac{A}{A'} = \frac{A}{Ax^{\alpha}y^{\beta}z^{\gamma}} = \frac{1}{x^{\alpha}y^{\beta}z^{\gamma}},$$

откуда находим:

$$n' = \frac{n}{x^{\alpha}y^{\beta}z^{\gamma}}, \qquad (2\text{-}12)$$

т. е. при переходе к новым основным единицам системы *результат измерения какой-либо производной величины новой единицей равен результату ее измерений прежней единицей, разделенному на формулу размерности данной величины, в которую вместо основных единиц системы следует подставить отношения новых основных единиц к прежним.*

Эти правила можно, очевидно, применять и при переходе от одной системы единиц к другой, так как такой переход можно рассматривать как замену в одной системе прежних основных единиц новыми единицами, взятыми из другой системы.

Рассмотрим несколько примеров.

Пример 2-1. Найти отношение единиц силы в ранее использовавшейся системе МТС (стен) и в системе СГС (дина). Рассматриваем эту задачу как замену основных единиц системы (*см, г, сек*) новыми единицами (*м, т, сек*), взятыми из системы МТС.

Вычисляем отношения основных единиц той и другой системы, т. е. находим значения x, y и z в уравнениях (2-10), причем, очевидно, z равно единице, так как единица времени в обеих системах одинакова:

$$x = \frac{1\ м}{1\ см} = 10^2, \qquad y = \frac{1\ т}{1\ г} = 10^6.$$

На основании уравнения (2-11), полагая в нем

$$A' = 1\ сн \text{ и } A = 1\ дн$$

и применяя формулу (2-4) размерности силы, находим:

$$1\ сн = 10^2 \cdot 10^6 \cdot 1^{-2}\ дн, \text{ или } 1\ сн = 10^8\ дн.$$

Этим отношением, согласно формуле (2-12), следует пользоваться в тех случаях, когда результат какого-либо измерения, данный в стенах, приходится перечислять в дины или обратно.

Пример 2-2. Найти отношение единиц работы в системе МКГСС (килограммометр) и в системе СГС (эрг). Так как единица времени в обеих системах одинакова, т. е. z равно единице, то эту задачу можно рассматривать как замену основных единиц *физической* системы *см* и *г* новыми единицами соответственно *м* и $кГ \cdot сек^2/м$ [техническая единица массы — *инерта* (*и*), равная 9,81 *кг*].

Определяем значения x и y:

$$x = \frac{1\ м}{1\ см} = 10^2, \qquad y = \frac{9{,}81\ кг}{1\ г} = 9{,}81 \cdot 10^3.$$

На основании уравнения (2-11), полагая в нем

$$A' = 1\ кГ \cdot м \text{ и } A = 1\ э$$

и применяя формулу (2-5) размерности работы, находим:

$$1\ кГ \cdot м = (10^2)^2 \cdot (9{,}81 \cdot 10^3) \cdot (1)^{-2}\ э, \text{ или } 1\ кГ \cdot м = 9{,}81 \cdot 10^7\ э.$$

Пример 2-3. Найти отношение между единицами давления в системе МКГСС и СГС. Давление определяется как сила, отнесенная к единице площади, т. е.

$$p = \frac{F}{S}.$$

Отсюда находим размерность давления в системе СГС:

$$[p] = \frac{[F]}{[S]} = L^{-1}MT^{-2}.$$

Единицей давления в этой системе служит $дн \cdot см^{-2}$; единицей давления в системе МКГСС служит давление, равное $1\ кГ \cdot м^{-2}$. Поставленную задачу можно рассматривать как замену основных единиц системы СГС (*см* и *г*) новыми единицами (*м* и *и*); отношение этих единиц только что было вычислено. Поэтому, полагая в уравнении (2-12)

$$A' = 1\ кГ \cdot м^{-2} \text{ и } A = 1\ дн \cdot см^{-2}$$

и принимая во внимание формулу (2-13) размерности давления, получаем:

$$1\ кГ \cdot м^{-2} = (10^2)^{-1} \cdot 9{,}81 \cdot 10^3 \cdot 1^{-2}\ дн \cdot см^{-2},$$

или

$$1\ кГ \cdot м^{-2} = 98{,}1\ дн \cdot см^{-2}.$$

Пример 2-4. Механический эквивалент теплоты перевести из системы СГС в систему МКГСС и в систему МКС (стр. 236). В этом случае задача сводится к тому, чтобы результат измерения некоторой физической величины в одной системе единиц выразить в единицах другой системы; поэтому следует применить уравнение (2-12). Механический эквивалент теплоты J в системе СГС имеет приближенное значение

$$J = 4{,}19 \cdot 10^7 \frac{э}{кал}.$$

При переходе к технической системе надо, кроме замены основных единиц абсолютной системы *см* и *г* единицами технической системы *м* и *и*, ввести еще вместо малой калории большую, т. е. положить:

$$1\ ккал = 1000\ кал.$$

Принимая во внимание формулу (2-5) размерности работы, на основании формулы (2-12) получаем:

$$J = \frac{4{,}19 \cdot 10^7 \cdot 1000\ кГ \cdot м}{9{,}81 \cdot 10^7\ ккал} = 427\ \frac{кГ \cdot м}{ккал},$$

т. е. общеизвестное значение механического эквивалента теплоты в единицах технической системы.

Переход от системы СГС к системе МКС несравненно проще; действительно, из соотношения между эргом и джоулем (стр. 235) непосредственно находим:

$$J = 4{,}19 \cdot 10^7\ \frac{эрг}{кал} = 4{,}19\ \frac{дж}{кал}$$

(точнее $4{,}1868\ \frac{дж}{кал}$, стр. 237).

Совершенно так же, принимая во внимание формулы размерности и соотношения (2-8), (2-11) и (2-12), решаются и другие случаи замены единиц или перехода от одной системы единиц к другой.

§ 2-4. Механические и акустические величины, их размерности и единицы измерения

В таблице 2-4 даны: 1) названия основных механических и акустических величин; 2) их обозначения и формулы, которые служат для определения величин; 3) размерности величин, механических в системах СГС, МКС и МКГСС и акустических в системах СГС и МКС; 4) единицы измерения величин в системе СГС.

Таблица 2-4

	Обозначения и формулы	Размерность		Единицы в системе СГС
		в системах СГС и МКС	в системе МКГСС	
Длина	L, l	L	L	*см*
Путь	s	L	L	*см*
Перемещение угловое	φ	Нулевая	размерность	радиан
Масса	m	M	$L^{-1}F^{1}T^{2}$	*г*
Время	T, t	T	T	*сек*
Площадь	$S = L^2$	$L^2M^0T^0$	$L^2F^0T^0$	*см*^{2}
Объем	$V = L^3$	$L^3M^0T^0$	$L^3F^0T^0$	*см*^{3}
Скорость [1]	$v = \frac{L}{T}$	$L^1M^0T^{-1}$	$L^1F^0T^{-1}$	*см·сек*$^{-1}$
» угловая	$\omega = \frac{\varphi}{T}$	$L^0M^0T^{-1}$	$L^0F^0T^{-1}$	*рад·сек*$^{-1}$
Ускорение	$a = \frac{v}{T}$	$L^1M^0T^{-2}$	$L^1F^0T^{-2}$	*см·сек*$^{-2}$
Ускорение угловое	$\varepsilon = \frac{\omega}{T}$	$L^0M^0T^{-2}$	$L^0F^0T^{-2}$	*рад·сек*$^{-2}$
Момент инерции	$J = \Sigma mL^2$	$L^2M^1T^0$	$L^1F^1T^2$	*см*^{2}*·г*
Сила [2]	$F = ma$	$L^1M^1T^{-2}$	F	*см·г·сек*$^{-2}$ (дина, *дн*)
Момент силы	$M = FL$	$L^2M^1T^{-2}$	$L^1F^1T^0$	*см*^{2}*·г·сек*$^{-2}$
Давление [3]	$p = \frac{F}{S}$	$L^{-1}M^1T^{-2}$	$L^{-2}F^1T^0$	*см*$^{-1}$*·г·сек*$^{-2}$

Продолжение табл. 2-4

	Обозначения и формулы	Размерность		Единицы в системе СГС
		в системах СГС и МКС	в системе МКГСС	
Работа [4]	$A = Fs$	$L^2M^1T^{-2}$	$L^1F^1T^0$	$см^2 \cdot г \cdot сек^{-2}$ (эрг, *э*)
Энергия	$E = \frac{mv^2}{2}$	$L^2M^1T^{-2}$	$L^1F^1T^0$	
Мощность [5]	$N = \frac{A}{T}$	$L^2M^1T^{-1}$	$L^1F^1T^{-1}$	$см^2 \cdot г \cdot сек^{-3}$
Плотность	$D,\ \rho = \frac{M}{V}$	$L^{-3}M^1T^0$	$L^{-4}F^1T^2$	$см^{-3} \cdot г$
Объем удельный	$v = \frac{V}{M}$	$L^3M^{-1}T^0$	$L^4F^{-1}T^{-2}$	$см^3 \cdot г^{-1}$
Вес (в пустоте)	$G = Mg$	$L^1M^1T^{-2}$	$L^0F^1T^0$	$см \cdot г \cdot сек^{-2}$
Вес удельный	$\gamma = \frac{G}{V}$	$L^{-2}M^1T^{-2}$	$L^{-3}F^1T^0$	$см^{-2} \cdot г \cdot сек^{-2}$
Коэффициент растяжения (удлинения)	$\alpha = \frac{1}{p}\frac{\Delta L}{L}$	$L^1M^{-1}T^2$	$L^2F^{-1}T^0$	$см \cdot г^{-1} \cdot сек^2$
Коэффициент поперечного сжатия	$\beta = \frac{1}{p}\frac{\Delta d}{d}$	$L^1M^{-1}T^2$	$L^2F^{-1}T^0$	$см^{-1} \cdot г \cdot сек^{-2}$
Коэффициент Пуассона	$\mu = \frac{\beta}{\alpha}$	Нулевая	размерность	
Модуль упругости (модуль Юнга)	$E = \frac{1}{\alpha}$	$L^{-1}M^1T^{-2}$	$L^{-2}F^1T^0$	$см^{-1} \cdot г \cdot сек^{-2}$
Модуль сдвига	$G = \frac{E}{\varphi S}$	$L^{-1}M^1T^{-2}$	$L^{-2}F^1T^0$	$см^{-1} \cdot г \cdot сек^{-2}$

Продолжение табл. 2-4

	Обозначения и формулы	Размерность		Единицы в системе СГС
		в системах СГС и МКС	в системе МКГСС	
Напряжение нормальное . . .	$\sigma = \frac{F}{S}$	$L^{-1}M^{1}T^{-2}$	$L^{-2}F^{1}T^{0}$	*см* $^{-1}$·*г*·*сек*$^{-2}$
Коэффициент сжимаемости (всестороннее сжатие) . .	—	$L^{1}M^{-1}T^{2}$	$L^{2}F^{-1}T^{0}$	*см*·*г*$^{-1}$·*сек*^{2}
Частота звуковых колебаний	$\nu, f = \frac{n}{T}$	$L^{0}M^{0}T^{-1}$		*сек*$^{-1}$ (герц — *гц*, Hz)
Плотность звуковой энергии	$D = \frac{E}{V}$	$L^{-1}M^{1}T^{-2}$		*э*·*см*$^{-3}$
Звуковое давление	$P = \frac{F}{S}$	$L^{-1}M^{1}T^{-2}$		*дн*·*см*$^{-2}$ (*мкб*, μbar)
Мощность звука [6]	$N = \frac{A}{T}$	$L^{2}M^{1}T^{-3}$		*э*·*сек*$^{-1}$.
Сила звука	$J = \frac{P}{\rho v}$	$L^{0}M^{1}T^{-3}$		*э*·*см*$^{-2}$·*сек*$^{-1}$

Примечания к табл. 2-4. 1) Скорость v на практике выражают в различных единицах, например *см/сек*, *м/сек*, *м/мин*, *км/час* и т. д. При переводе скорости из одних единиц в другие можно пользоваться следующими (приближенными) соотношениями: 1 *см/сек* = 0,01 *м/сек* = 0,6 *м/мин* = 0,036 *км/час*; 1 *м/сек* = 60 *м/мин* = = 3,6 *км/час* = 100 *см/сек*; 1 *м/мин* = 0,06 *км/час* = 1,67 *см/сек* = 0,0167 *м/сек*; 1 *км/час* = 27,78 *см/сек* = = 0,2778 *м/сек* = 16,67 *м/мин*.

Угловую скорость ω также выражают в различных единицах, например радианы в секунду, градусы в секунду, обороты в минуту и т. д.

Для перевода угловой скорости ω из одних единиц в другие служат следующие приближенные соотношения: 1 *рад/сек* = 57°,296/*сек* = 9,5493 *об/мин*; 1 °/*сек* = 0,01745 *рад/сек* = 0,1667 *об/мин*; 1 *об/мин* = 6 °/*сек* = 0,1047 *рад/сек*.

2) Единицами силы в различных системах служат: 1) в системе СГС дина (*дн*, dn); 2) в системе МГС ньютон (*н*, N) и 3) в системе МКГСС *кГ* (вес 1 килограмма). Для перехода от одних единиц силы к другим можно пользоваться следующими (приближенными) соотношениями: 1 *дн* = 10^{-5} *н* = 1,02 · 10^{-6} *кГ*; 1 *н* = 0,102 *кГ* = 10^{5} *дн*; 1 *кГ* = 9,81 · 10^{5} *дн* = 9,81 *н*.

[3]) Давление очень часто измеряется в барах, атмосферах физических (барометрических) и технических. Вместо прежнего определения бара как давления, равного 1 *дн/см²*, в 1955 г. было введено новое определение: баром в настоящее время называется давление, равное 10 *н/см²*, или 10^5 *н/м²* (ГОСТ 7664-55); это определение бара принято и в зарубежных странах. Техническая атмосфера (*ат*) отвечает давлению, равному 1 *кГ/см²*. Физическая атмосфера (*Атм*) отвечает среднему давлению атмосферного воздуха на уровне океана; оно равно давлению, которое оказывает на свое основание вертикальный столб ртути высотой 760 *мм* при плотности ртути, равной 13,5954 *г/см³*, и при нормальном значении ускорения силы тяжести 980,665 *см/сек²*; приближенно это давление равно 1,033 *кГ/см²*. Давление 1 *Атм* принято как *нормальное* давление. Наконец, давление очень часто определяют высотой столба какой-либо жидкости (ртути, воды), выражая высоту столба в миллиметрах. Давление, отвечающее 1 *мм* рт. ст., также служит единицей давления, которая называется тором (*тор*, tor); 1 *тор* приближенно равен 1333 *дн/см²*. Все эти единицы давления связаны между собой приближенными соотношениями: $1\,бар = 1{,}02 \times 10^4\ кГ/м^2 = 9{,}87 \cdot 10^{-1}\ Атм = 750{,}1\ тор$; $1\ кГ/м^2 = 9{,}68 \cdot 10^{-5}\ Атм = 7{,}36 \cdot 10^{-2}\ тор = 98{,}1 \cdot 10^{-6}\ бар$; $1\ Атм = 760\ тор = 1{,}033 \cdot 10^4\ кГ/м^2 = 1{,}013\ бар$; $1\ тор = 1{,}33 \cdot 10^{-3}\ бар = 13{,}6\ кГ/м^2 = 1{,}32 \cdot 10^{-3}\ Атм$.

Ранее принятая, как международная единица измерения давления *пьеза* связана с существующими единицами измерения давления следующими соотношениями: $1\ пз = 1\ сн/м^2 = 1000\ н/м^2 = 10^{-2}\ бар = 10^3 мпз$ (миллипьеза) $= 102\ кГ/м^2 = 9{,}87 \cdot 10^{-3}\ Атм = 1{,}02 \cdot 10^{-2}\ кГ/см^2 = 7{,}5\ тор$.

[4]) Единицами работы и энергии служат: в системе СГС *эрг* (*эрг* и erg), равный 1 *дн·см*; в системе МКС *джоуль* (*дж*, J), равный 1 *н·м*, и в системе МКГСС *килограммометр* (*кгс·м*, *кГ·м*). Так как эквивалентом работы является теплота, то работу очень часто выражают в тепловых единицах, т. е. в джоулях или калориях, причем калория по ГОСТ 8550-57 определяется по соотношению: 1 *кал*=4,1868 *дж* (см. стр. 237). Эти единицы работы связаны между собой следующими приближенными соотношениями: $1\ эрг = 10^{-7}\ дж = 1{,}02 \cdot 10^{-8}\ кГ \cdot м = 2{,}39 \cdot 10^{-8}\ кал$; $1\ дж = 0{,}102\ кГ \cdot м = 0{,}239\ кал = 10^7\ эрг$; $1\ кГ \cdot м = 2{,}34\ кал = 9{,}81 \cdot 10^7\ эрг = 9{,}81\ дж$; $1\ кал = 4{,}19 \cdot 10^7\ эрг = 4{,}19\ дж = 0{,}427\ кГ \cdot м$.

[5]) Единицами мощности служат: в системе СГС *эрг/сек*, в системе МКС *дж/сек*, или ватт (*вт*, W), и в системе МКГСС — *кГ·м/сек*, мощность, равная 75 *кГ · м/сек*, называется *лошадиной силой* (*л. с.*). Кроме того, мощность часто выражают также в тепловых единицах: *кал/сек* или *ккал/сек*. Единицы мощности связаны между собой следующими соотношениями: $1\ эрг/сек = 10^{-7}\ вт = 1{,}02 \cdot 10^{-8}\ кГ \cdot м/сек = 1{,}36 \times 10^{-10}\ л.\ с. = 2{,}39 \cdot 10^{-8}\ кал/сек$; $1\ вт = 0{,}102\ кГ \cdot м/сек = 1{,}36 \times 10^{-3}\ л.\ с. = 0{,}239\ кал/сек = 10^7\ эрг/сек$; $1\ кГ \cdot м/сек = 1{,}33 \cdot 10^{-2}\ л.\ с. = 2{,}34\ кал/сек = 9{,}81 \cdot 10^7\ эрг/сек = 9{,}81\ вт$; $1\ л.\ с. = 176\ кал/сек = 7{,}36 \cdot 10^9\ эрг/сек = 736\ вт = 75\ кГ \cdot м/сек$; $1\ кал/сек = 4{,}19 \cdot 10^7\ эрг/сек = 4{,}19\ вт = 0{,}427\ кГ \cdot м/сек = 5{,}69 \cdot 10^{-3}\ л.\ с.$

[6]) Для измерения силы звука пользуются логарифмической шкалой, а именно единица силы звука — бел (*б*, b) установлена для десятичного логарифма отношения силы I_1 и I_2 двух звуков: $\lg \frac{I_2}{I_1} = \lg_{10} I_2 - \lg_{10} I_1$. Таким образом, два звука отличаются по силе на 1, 2, 3, . . . бела, если их силы I_1 и I_2 относятся как $1:10,\ 1:10^2,\ 1:10^3, \ldots$. На практике обычно применяется единица, в 10 раз меньшая, — децибел (*дб*, db). Условным нулевым уровнем для отсчета I часто принимают силу звука, равную $10^{-9}\ эрг \cdot см^{-2} \cdot сек^{-1}$, которая при частоте 1000 *гц* лежит близко к порогу слышимости.

§ 2-5. Молекулярные и тепловые величины, их размерности и единицы измерения

В таблице 2-5а даны: 1) названия основных молекулярных и тепловых величин; 2) их обозначения и формулы, которые служат для определения величин; 3) размерности величин в системах СГС и МКС; 4) единицы измерения величин в системе СГС.

Таблица 2-5а

	Обозначения и формулы	Размерность в системах СГС и МКС	Единицы в системе СГС
Коэффициент внутреннего трения (вязкости) . . .	$\eta = \frac{F}{S}\frac{\Delta L}{\Delta v}$	$L^{-1}MT^{-1}$	$см^{-1} \cdot г \cdot сек^{-1}$ (пуаз)
Коэффициент поверхностного натяжения	$\sigma = \frac{F}{L} = \frac{A}{L^2}$	L^0M1T^{-2}	$г \cdot сек^{-2}$
Коэффициент диффузии	$D = \frac{ML}{S\frac{\Delta C}{\Delta L}T}$	$L^2M^0T^{-1}$	$см^2 \cdot сек^{-1}$
Количество теплоты	Q (эквивалент A)	L^2M1T^{-2}	$см^2 \cdot г \cdot сек^{-2}$ (малая калория—*кал*)
Коэффициент расширения линейный	$\alpha = \frac{\Delta L}{Lt}$	$град^{-1}$	$град^{-1}$
Коэффициент расширения кубический	$\beta = \frac{\Delta V}{Vt}$	$град^{-1}$	$град^{-1}$
Теплоемкость . . .	$C = \frac{Q}{t}$	$L^2M1T^{-2}град^{-1}$	$см^2 \cdot г \cdot сек^{-2} \cdot град^{-1}$
Теплоемкость удельная	$c = \frac{Q}{Mt}$	$L^2T^{-2}град^{-1}$	$см^2 \cdot сек^{-2} \cdot град^{-1}$
Теплота плавления удельная	$\rho = \frac{Q}{M}$	$L^2M^0T^{-2}$	$см^2 \cdot сек^{-2}$
Теплота кипения удельная	$\delta = \frac{Q}{M}$	$L^2M^0T^{-2}$	$см^2 \cdot сек^{-2}$
Коэффициент теплопроводности .	$\lambda = \frac{QL}{STt}$	$L^1M1T^{-3}град^{-1}$	$см \cdot г \cdot сек^{-3} \cdot град^{-1}$
Энтропия	$S = \frac{Q}{T_0}$	$L^2M1T^{-2}град^{-1}$	$см^2 \cdot г \cdot сек^{-2} \cdot град^{-1}$

Примечание к табл. 2-5а. [1]) Точное определение калории осложнялось главным образом вследствие зависимости теплоемкости воды от температуры: в температурном интервале 0° С и 100° С тепло-

емкость воды имеет заметный минимум (при температуре около 30° С). Вследствие этого величина калории и ее соотношение с джоулем исторически несколько раз изменялись, так как при определении калории применяли различные начальные температуры воды (0° С, 4° С, 15° С и др.). В последнее время широко применялись калории, определенные для температурных интервалов 15—16° С ($кал_{15}$, cal_{15}) и 19,5—20,5° С ($кал_{20}$, cal_{20}), близкие между собой. Последняя калория была введена у нас (ОСТ/ВКС 6259), в настоящее время эта калория заменена другой, получившей иное определение (см. дальше).

В таблице 2-5б приведены данные для некоторых тепловых величин, основанные на постановлениях международных конференций по мерам и весам 1948 г. и 1954 г. Согласно этим постановлениям, принятым в СССР и введенным как обязательные с 1/I 1958 г. (ГОСТ 8550-57), основной единицей при тепловых измерениях вместо прежней калории принимается джоуль и устанавливается система единиц, в которой основными единицами являются: метр, килограмм (масса), секунда и градус, т. е. система МКС (стр. 223) распространяется на тепловые измерения. Применение для тепловых измерений внесистемных единиц, основанных на калории, также допускается. Для перехода от калорий к джоулям принято соотношение: 1 международная калория равняется 4,1868 джоуля.

Таблица 2-5б

Величины	Единицы измерения и их обозначения	Размер единицы
Количество теплоты . Термодинамический потенциал	Джоуль (*дж*, J)	ГОСТ 7664-55
Теплоемкость . . . . . Энтропия	$\left(\frac{дж}{град}, \frac{\mathrm{J}}{\mathrm{grad}}\right)$	
Удельная теплоемкость Удельная энтропия . .	$\left(\frac{дж}{кг \cdot град}, \frac{\mathrm{J}}{\mathrm{kg \cdot grad}}\right)$	
Температурный градиент	$\left(\frac{град}{м}, \frac{\mathrm{grad}}{\mathrm{m}}\right)$	
Тепловой поток	Ватт (*вт*, W)	ГОСТ 7664-55
Плотность теплового потока . . . . . Поверхностная плотность излучения . .	$\left(\frac{вт}{м^2}, \frac{\mathrm{W}}{\mathrm{m^2}}\right)$	
Теплоотдача . . . . . Теплопередача	$\left(\frac{вт}{м \cdot град}, \frac{\mathrm{W}}{\mathrm{m \cdot grad}}\right)$	
Теплопроводность	$\left(\frac{вт}{м \cdot град}, \frac{\mathrm{W}}{\mathrm{m \cdot grad}}\right)$	

Продолжение табл. 2-5б

Величины	Единицы измерения и их обозначения	Размер единицы
Количество теплоты . . .	Калория (*кал*, cal)	4,1868 *дж* [1])
Термодинамический потенциал	Килокалория (*ккал*, kcal)	4,1868·10³ *дж*
Теплоемкость системы Энтропия системы . .	(*кал/град*, cal/grad) (*ккал/град*, kcal/grad)	4,1868 *дж/град* 4,1868·10³ *дж/град*
Удельная теплоемкость Удельная энтропия . .	(*кал/г·град*, cal/g·grad) *ккал/кг·град*, kcal/kg·grad	4,1868·10³ *дж/кг*
Удельный термодинамический потенциал	(*кал/г*, cal/g)	
Удельная теплота фазового превращения Удельная теплота химической реакции . .	(*ккал/кг*, kcal/kg)	4,1868·10³ *дж/кг*
Тепловой поток	(*кал/сек*, cal/s) (*ккал/ч*, kcal/h)	4,1868 *вт* 1,1630 *вт*
Плотность теплового потока	(*кал/см²·сек*, cal/sm²·s)	4,1868·10⁴ *вт/м²*
Поверхностная плотность излучения .	(*ккал/м²·ч*, kcal/m²·h)	1,1630 *вт/м²*
Теплоотдача	(*кал/см²·сек·град*, cal/sm²·s·grad)	4,1868 × ×10⁴ *вт/м²·град*
Теплопередача	(*ккал/м²·ч·град*, kcal/m²·h·grad)	1,1630 *вт/м²* × × *град*
Теплопроводность	(*кал/см·сек·град*, cal/cm·s·grad) (*кал/м·ч·град*, kal/m·h·grad)	4,1868 × × 10² *вт/м·град* 1,1630 *вт/м* × × *град*

Примечание к табл. 2-5б. [1]) Величина основной единицы тепловых измерений, калории, несколько раз изменялась. Зависимость теплоемкости воды от температуры (см. табл. 2-7б) потребовала выбора при определении калории начальной температуры. Предлагались и применялись температурные интервалы: 0° С—1° С, $3^1/_2{}^5$ С — $4^1/_2{}^0$ С (температура наибольшей плотности воды), $14^1/_2{}^0$ С — $15^1/_2{}^0$ С ($кал_{15}$), $19^1/_2{}^0$С — $20^1/_2{}^0$ С (в последнее время «международная» калория); применялась и «средняя» калория, равная 1/100 количества теплоты, необходимого для нагревания 1 *г* воды от 0° С до 100° С, весьма близкая к $кал_{15}$. Все это крайне осложняло установление точного значения механического эквивалента теплоты. В 1950 г. Международный комитет мер и весов для $кал_{15}$ принял соотношение 1 $кал_{15}$=4,1855 *дж*. Лондонская Международная конференция 1956 г. для международной калории установила соотношение 1 *кал* между—4,1868, которое служит определением калории (ГОСТ 8550-57). Таким образом, при практических расчетах необходимо предварительно выяснять, какие калории применяются в данном случае.

§ 2-6. Электрические и магнитные величины, их размерности и единицы измерения

В табл. 2-6 и 2-7 даны для некоторых электрических и магнитных величин: 1) их названия и обозначения, 2) формулы определения величин и 3) их размерности и единицы в системе СГС (см. ниже), а именно: а) для электрических величин в абсолютной электростатической системе (CGSE), основанной на законе Кулона и абсолютной электромагнитной системе (CGSM), основанной на законе Био—Савара, и б) для магнитных единиц — в системе CGSM. В последнем столбце этих таблиц дано соотношение между единицами в (прежней) международной практической системе и в системах CGSE и CGSM. Отношение между единицами в системах CGSM и CGSE устанавливаются на основании общего вывода электромагнитной теории света, согласно которому это отношение для единиц силы тока равно $3 \cdot 10^{10}$ *см/сек*.

Система CGSE Таблица 2-6

	Обозначения и формулы	Размерность в системе CGSE	Система CGSE	Система практическая	Отношение единиц
Количество электричества	$q = \sqrt{FL^2}$	$L^{3/2} M^{1/2} T^{-1}$	CGSE-ед. заряда	Кулон (*к*, C)	1 *к* = $3 \cdot 10^9$ CGSE-ед. заряда
Поверхностная плотность заряда	$\sigma = \frac{q}{S}$	$L^{-1/2} M^{1/2} T^{-1}$			
Напряженность электростатического поля	$E = \frac{F}{q}$	$L^{-1/2} M^{1/2} T^{-1}$			
Потенциал	$U_e = \frac{A}{q}$	$L^{1/2} M^{1/2} T^{-1}$	CGSE-ед. потенциала	Вольт (*в*, V)	1 *в* = $\frac{1}{300}$ CGSE-ед. потенциала
Емкость	$C_e = \frac{q}{U_e}$	L	*см*	Фарада (*ф*, F)	1 *ф* = $9 \cdot 10^{11}$ *см*
Сила тока	$J = \frac{q}{t}$	$L^{3/2} M^{1/2} T^{-2}$	CGSE-ед. силы тока	Ампер (*а*, A)	1 *а* = $3 \cdot 10^9$ ед. силы тока
Сопротивление	$R_e = \frac{U_e}{J}$	$L^{-1} T$	CGS-ед. сопротивления	Ом (*ом*, Ω)	1 *ом* = $\frac{1}{9} \cdot 10^{-11}$ CGSE-ед. сопротивл.

Система CGSM

Таблица 2-7

	Обозначения и формулы	Размерность в системе CGSM	Система CGSM	Система практическая	Отношение единиц
Количество электричества (электрический заряд)	$q = Jt$	$L^{1/2} M^{1/2}$	CGSM-ед. заряда	Кулон (*к*, C)	1 *к* = 0,1 CGSM-ед. заряда
Потенциал	$U = JR$	$L^{3/2} M^{1/2} T^{-2}$	CGSM-ед. потенциала	Вольт (*в*, V)	1 *в* = 10^8 CGSM-ед. потенциала
Емкость	$C = \frac{q}{U}$	$L^{-1} T^2$	CGSM-ед. емкости	Фарада (*ф*, F)	1 *ф* = 10^{-9} CGSM-ед. емкости
Сила тока	$J = \frac{rH}{2}$	$L^{1/2} M^{1/2} T^{-1}$	CGSM-ед. силы тока	Ампер (*а*, A)	1 *а* = 10^{-1} CGSM-ед. силы тока
Сопротивление	$R = \frac{U}{J}$	LT^{-1}	CGSM-ед. сопротивления	Ом (*ом*, Ω)	1 *ом* = 10^9 CGSM-ед. сопротивления
Индуктивность	$L = \frac{U}{J/T}$	L	CGSM-ед. индуктивности (*см*)	Генри (*гн*, H)	1 *гн* = 10^9 CGSM-ед. индуктивности
Напряженность магнитного поля	$H = \frac{2I}{r}$	$L^{-1/2} M^{1/2} T^{-1}$	CGSM-ед. напряженности поля, эрстед (*э*, Oe)	*а/м*	1 *а/м* = $4\pi\ 10^{-3}$ *э*
Магнитная индукция	$B = \mu H$	$L^{-1/2} M^{1/2} T^{-1}$	CGSM-ед. индукции гаусс (*гс*, Gs)	*вб/м*^{2}	1 *вб/м*^{2} = 10^8 *мкс*

В табл. 2-8 приведены данные для тех же электрических и магнитных величин, основанные на постановлениях IX Международной генеральной конференции по мерам и весам. Согласно этим постановлениям, принятым в СССР и введенным как обязательные с 1/I 1957 г. (ГОСТ 8033-56), для электрических и магнитных измерений устанавливается абсолютная практическая система единиц МКСА, основными единицами которой являются: метр, килограмм, секунда, ампер.

Но вместе с тем для электрических и магнитных измерений была сохранена и прежняя абсолютная система СГС (стр. 222), в которой электрическая и магнитная постоянные пустоты ε_0 и μ_0 при нерационализированной форме уравнений электромагнитного поля принимаются равными единице.

В системе МКСА при рационализированной форме уравнений электромагнитного поля ε_0 и μ_0 принимаются равными: $\varepsilon_0 = \frac{1}{4\pi \cdot c^2} \cdot 10^7$ фарады на метр и $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$ генри на метр, где c обозначает численное значение скорости света в пустоте, выраженной в метрах в секунду.

Таблица 2-8

Величины	Единицы измерения в системе МКСА [1]) и их обозначения	Соотношения между единицами СГС и МКСА
Сила тока	ампер (a, A)	1 ед. силы тока СГС $= \frac{10}{c} a$ [2])
Электрический заряд	кулон ($к$, C) ампер-секунда ($a \cdot сек$, A · s)	1 ед. электрического заряда СГС $= \frac{10}{c} к$
Разность электрических потенциалов, электродвижущая сила	вольт ($в$, V)	1 ед. разности электрических потенциалов СГС $= c \cdot 10^{-8}$ $в$
Напряженность электрического поля . .	вольт на метр ($в/м$, V/m)	1 ед. напряженности электрического поля СГС $= c \cdot 10^{-6}$ $в/м$
Электрическое сопротивление	ом ($ом$, Ω)	1 ед. электрического сопротивления СГС $= c^2 \cdot 10^{-9}$ $ом$
Электрическая емкость	фарада ($ф$, F)	1 ед. электрической емкости СГС $= \frac{1}{c^2} \cdot 10^9$ $ф$
Индуктивность	генри ($гн$, H)	1 ед. индуктивности СГС $= c^2 \cdot 10^{-9}$ $гн$
Напряженность магнитного поля	ампер на метр ($а/м$, A/m)	1 $э = \frac{1}{4\pi} \cdot 10^3$ $а/м$
Магнитный поток . .	вебер ($вб$, Wb)	1 $мкс = 10^{-8}$ $вб$
Магнитная индукция .	вебер на кв. метр ($вб/м^2$, Wb/m^2)	1 $гс = 10^{-4}$ $вб/м^2$

Примечания к табл. 2-8. [1]) Единицы систем МКСА, по предложению Международной комиссии, получили название *абсолютных* (абс и abs), но при этом в постановлении Комиссии было указано, что термин *абсолютный* здесь не следует понимать как противопоставление термину *относительный*, этот термин вводится временно на переходный период исключительно для отличия единиц системы МКСА от единиц прежней международной практической системы. Это различие настолько незначительно, что в большинстве случаев его можно не принимать во внимание (например, 1 международный ампер = 0,99985 $a_{абс}$).

[2]) В этой таблице c обозначает скорость света в пустоте, выраженную в сантиметрах в секунду ($c = 3 \cdot 10^{10}$ *см/сек*).

§ 2-7. Световые величины и их единицы измерения

Основной световой величиной служит сила света I, ее единицей — международная свеча, эталон которой впервые был установлен в 1909 г. С 1948 года была введена по международному соглашению новая международная свеча, представленная новым эталоном. Остальные световые величины стоят в определенной зависимости от силы света, как это видно из таблицы 2-9, где даны: 1) названия основных световых величин; 2) их обозначения и формулы, которые служат для определения величин; 3) единицы их измерения и 4) определения единиц, принятые в настоящее время.

Таблица 2-9

	Обозначения и формулы	Названия и обозначения единиц	Определение единицы
Сила света	I	Международная свеча (*св*, c)	Эталон, установленный впервые в 1909 г.; новый эталон введен в 1948 г.
Световой поток . .	$\psi = I\,\varphi$	Люмен (*лм*, lm)	Световой поток, испускаемый внутри единичного телесного угла точечным источником света силой в одну международную свечу
Освещенность . .	$E = \frac{\psi}{S}$	Фот (*ф*, ph), миллифот (*мф*, mph) = = 0,001 *ф*, люкс (*лк*, lx) = = 10^{-4} *ф*	Освещенность, создаваемая на поверхности сферы радиусом в один метр помещенным в ее центре равномерным источником света силой в одну международную свечу (люкс)
Яркость .	$B = \frac{I}{S\cos\varphi}$	Стильб (*сб*, sb), миллистильб (*мсб*, msb) = = 0,001 *сб*	Яркость равномерно светящейся плоской поверхности в перпендикулярном к ней направлении, которая испускает в том же направлении свет силой в одну международную свечу с одного кв. сантиметра

§ 2-8. Единицы измерения в атомной и ядерной физике

При изучении атомных и ядерных процессов были введены некоторые особые единицы, из которых необходимо указать следующие:

1. Атомная единица массы в физике равна $\frac{1}{16}$ массы атома изотопа кислорода O^{16} (стр. 257); 1 ат. ед. массы приближенно равна $1{,}66 \cdot 10^{-24}$ *г*.

2. *Барн* служит единицей площади для измерения эффективных сечений элементарных частиц при ядерных реакциях; 1 *барн* равен 10^{-24} *см*^{2}/*атом*; обозначение *б*, br.

3. *Кюри* вначале служила единицей измерения количества радона; ее определяли как то количество радона, которое находится в радиоактивном равновесии с 1 *г* радия. В настоящее время *кюри* применяется для измерения количества различных радиоактивных тел; ее определяют как такое количество радиоактивного тела, в котором ежесекундно совершается $3{,}7 \cdot 10^{10}$ радиоактивных распадов. Обозначение: *кюри*, Cu. Производные единицы, часто применяемые: милликюри (mCu) $= 10^{-3}$ Cu и микрокюри (μCu) $= 10^{-6}$ Cu; иногда применяется и еще меньшая производная — эман, равный 10^{-10} кюри на литр или 10^{-13} кюри на *куб. см*. До введения единицы *кюри* при измерениях количества (или концентрации) радона применялась так называемая единица Махе; ее определяли как то количество радона в 1 *л* жидкости или газа, при котором сила тока насыщения в ионизационной камере достигает 10^{-3} эл.-стат. единиц. Для перехода от единиц Махе к современным единицам можно пользоваться соотношением: 1 ед. Махе равна 3,64 эмана или 1 эман равен 0,2748 ед. Махе.

4. *Резерфорд*, единица, предложенная также для измерения количества радиоактивных тел, отвечает тому количеству их, в котором ежесекундно происходит 10^6 радиоактивных распадов; обозначение Rd. Очевидно, что 1 Rd $= \frac{1}{37}$ mCu. Эта единица находит меньшее применение.

5. *Рентген* служит единицей для измерения количества, или физической дозы, рентгеновских лучей. Рентген соответствует дозе излучения, при которой в одном куб. сантиметре воздуха, взятого при нормальных условиях, образуется такое количество ионов, суммарный зарид которых каждого знака в отдельности равняется одной электростатической единице. В соответствии с величиной элементарного заряда находим, что 1 рентген образует $2{,}083 \cdot 10^9$ пар ионов на 1 *см*^{3} воздуха.

Рентген обозначается символом г. Употребляют производные единицы: миллирентген (mr), равный 10^{-3} г, и микрорентген (μг), равный 10^{-6} г.

6. *Электронвольт* служит единицей энергии; она чрезвычайно часто применяется в атомной и ядерной физике. Электронвольт определяется той энергией, которую приобретает электрон, проходя разность потенциалов, равную 1 *в*. Обозначение электронвольта: *эв*, eV. Очень часто применяются производные единицы: килоэлектронвольт, равный 10^3 *эв*, и мегаэлектронвольт, равный 10^6 *эв*.

Для перехода от электронвольтов к другим единицам энергии можно пользоваться следующими приближенными соотношениями:

1 *эв* $= 1{,}60 \cdot 10^{-12}$ *эрг* $= 1{,}60 \cdot 10^{-19}$ *дж* $= 1{,}07 \cdot 10^{-9}$ ат. ед. массы [1]),

1 *эрг* $= 6{,}70 \cdot 10^2$ ат. ед. массы $= 6{,}25 \cdot 10^{11}$ *эв*,

1 ат. ед. массы $= 9{,}31 \cdot 10^8$ *эв* $= 1{,}49 \cdot 10^{-3}$ *эрг*.

Примечание к § 2-8. [1]) Более точное соотношение между *эв* и *дж*, утвержденное как международное, таково: 1 *эв* $= 1{,}60207 \cdot 10^{-19}$ *дж*.

§ 2-9. Часто встречающиеся физические величины

Таблица 2-10

	Обозначения	Численное значение
Абсолютный нуль температуры	0° K	— 273, 16° C
Атмосфера физическая	*Атм*	1,01325·10⁶ *дн/см²*
Длина волны желтой линии Na	—	5893 Å
» » красной » Cd	—	6438, 5 Å
Заряд электрона (элементарный заряд)	e	4,8025·10⁻¹⁰ ед. CGSE = = 1,6020·10⁻²⁰ ед. CGSM
Заряд электрона удельный	e/m	1,7592·10⁷ ед. CGSM·*г*⁻¹
Ионизационный потенциал водорода	—	13, 527 *эв* = 2,16·10⁻¹¹ *эрг*
Коэффициент теплового расширения газов при постоянном давлении	α_p	1/273, 2 *град*⁻¹ = = 0,00366 *град*⁻¹
Масса атома водорода	m_H	1,6734·10⁻²⁴ *г*
» нейтрона	m_n	1,675·10⁻²⁴ *г*
» протона	m_p	1,6725·10⁻²⁴ *г*
» электрона (покоящегося)	m_e	9,106·10⁻²⁸ *г*
Механический эквивалент калории	J	1 *ккал* = 4,1868·10¹⁰ *эрг* = = 4,1868 *кдж* ≈ 427 *кГ·м*
Объем грамм-молекулы идеального газа при нормальных условиях	—	22,415 *л*
Плотность воды при 4° C	—	0,999973 *г/см³* [1]
» ртути при 0° C	—	13,5951 *г/см³*
Плотность сухого воздуха при нормальных условиях		0,001293 *г/см³*
Постоянная Больцмана	k	1,380·10⁻¹⁶ *эрг/град*
» Вина		0,2897 *см·град*
» газовая (универсальная) [2]	R	8,314·10⁷ *эрг·град*⁻¹·*моль*⁻¹ = = 1,98577 *кал·град*⁻¹ × × *моль*⁻¹ = 82,06 *см³* × × *Атм·град*⁻¹·*моль*⁻¹
Постоянная гравитационная	$\varkappa$	6,67·10⁻⁸ *см³·г*⁻¹·*сек*⁻²
» Планка	h	6,625·10⁻²⁷ *эрг·сек*
» Ридберга для водорода	R_H	109 677,6 *см*⁻¹
Постоянная Стефана — Больцмана	σ	5,673·10⁻⁵ *эрг·см*⁻²·*сек*⁻¹·*град*⁻⁴
Радиус первой орбиты водородного атома		0,528·10⁻⁸ *см*
Скорость звука в воздухе при нормальных условиях		331,4 *м·сек*⁻¹
Скорость света в пустоте	c	2,99792·10¹⁰ *см·сек*⁻¹

Продолжение табл. 2-10

	Обозначения	Численное значение
Скорость электрона с энергией 1 *эв*		$5{,}945 \cdot 10^7$ *см·сек*$^{-1}$
Ускорение силы тяжести (нормальное)	g_0	980,665 *см·сек*$^{-2}$
Число Авогадро	N_0	$6{,}023 \cdot 10^{23}$ *моль*$^{-1}$
» Лошмидта	n_0	$2{,}687 \cdot 10^{19}$ *см*^{3}
» Фарадея (химическая шкала)	F	96 487 *к·г-экв*$^{-1}$
» » (физическая шкала) . .		96 514 *к·г-экв*$^{-1}$
Некоторые геофизические и астрономические величины		
Радиус земного шара экваториальный		6378, 3 *км*
» » » полярный		6356, 8 *км*
Средняя плотность Земли . .		5,517 *г·см*$^{-3}$
» » » у поверхности		2,65 *г·см*$^{-3}$
Среднее расстояние Земли от Солнца		$1{,}497 \cdot 10^8$ *км*
» » » от Луны		$3{,}844 \cdot 10^5$ *км* $\approx$ $\approx$ 60,3 земного радиуса

Примечание к табл. 2-10. [1]) См. стр. 229. [2]) Дано по соотношению 1 *кал* = 4,1868 *дж* (ГОСТ 8550-57).

Глава 2-2

ОБРАБОТКА РЕЗУЛЬТАТОВ ИЗМЕРЕНИЙ *) (ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ ОШИБОК)

§ 2-10. Ошибки систематические и случайные

Каждое измерение, как известно, можно сделать лишь с некоторым приближением, иначе говоря, точность измерений всегда ограничена, и результаты измерений, как бы точно они ни выполнялись, всегда содержат некоторые погрешности, или ошибки.

Все ошибки измерений принято делить на два вида: 1) ошибки систематические и 2) ошибки случайные.

1) *Систематические ошибки* вызываются большей частью неправильностью показаний самих приборов или ошибочностью метода измерений, или, наконец, постоянным, но односторонним внешним воздействием. Так, измерение температуры термометром, у которого нулевая точка смещена, будет систематически неправильным, пока в результаты

*) Подробнее см. К. П. Яковлев, Математическая обработка результатов измерений, М., 1953.

измерений не будет внесена соответствующая поправка; точно так же неравномерное нагревание коромысла весов, например, лучами Солнца или теплотой радиатора будет давать систематическую ошибку при взвешивании. Обнаруживать и исключать систематические ошибки при измерениях — очень сложная задача; это достигается в результате тщательного изучения приборов путем их проверки и исправлений и введения, если необходимо, соответствующих поправок в результаты измерений. Во всем дальнейшем мы будем предполагать, что систематические ошибки при измерениях совершенно исключены.

2) *Случайные ошибки* вызываются главным образом теми неточностями, которые неизбежно происходят при наблюдении показаний прибора и их отсчете; эти ошибки не следуют какой-либо постоянной закономерности, так как при каждом измерении одинаково возможны случайные ошибки как в сторону увеличения измеряемой величины, так и в сторону ее уменьшения. Вследствие этого к случайным ошибкам следует применять законы, установленные теорией вероятностей по отношению к многократному повторению так называемых *случайных явлений*. Исключить при измерениях случайные ошибки, конечно, невозможно, но теория вероятностей разработала приемы, которые позволяют уменьшить влияние этих ошибок на окончательный результат измерений. Элементы теории случайных ошибок можно изложить следующим образом.

Если, повторив измерение некоторой величины n раз, мы получим n значений для нее: $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n$, то можно допустить, что среднее арифметическое из всех полученных значений, т. е. величина A, равная

$$A = \frac{a_1 + a_2 + a_3 + \ldots a_n}{n} = \frac{\sum a}{n}, \qquad (2\text{-}13)$$

должно приближенно соответствовать точному значению измеряемой величины.

Этот «постулат среднего арифметического», выведенный Гауссом на основании теории вероятностей, представляет собой только наиболее вероятное положение, которое, однако, становится тем более достоверным, чем больше число n, т. е. чем больше измерений было сделано. Отсюда следует, во-первых, что каждое физическое измерение должно быть повторено несколько раз и, во-вторых, что при достаточно большом числе измерений наиболее вероятное значение измеряемой величины определяется средним арифметическим из всех ее значений, полученных при отдельных измерениях.

§ 2-11. Ошибки абсолютные и относительные

Разности между средним значением A измеряемой величины и значениями ее, полученными при отдельных измерениях, т. е. величины

$$A - a_1 = \varepsilon_1, \quad A - a_2 = \varepsilon_2, \quad A - a_3 = \varepsilon_3, \ldots, \quad A - a_n = \varepsilon_n,$$

обычно называют, хотя и не вполне точно, *абсолютными ошибками* отдельных измерений. Абсолютные ошибки ε отдельных измерений могут быть, очевидно, и положительными, и отрицательными.

Отношения абсолютных ошибок отдельных измерений к соответствующим значениям $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n$, т. е. отношения

$$\frac{\varepsilon_1}{a_1}, \frac{\varepsilon_2}{a_2}, \frac{\varepsilon_3}{a_3}, \ldots, \frac{\varepsilon_n}{a_n},$$

называются *относительными ошибками* δ отдельных измерений, т. е.

$$\delta_1 = \frac{\varepsilon_1}{a_1}, \qquad \delta_2 = \frac{\varepsilon_2}{a_2},$$

$$\delta_3 = \frac{\varepsilon_3}{a_3}, \ldots, \quad \delta_n = \frac{\varepsilon_n}{a_n}.$$

Точно так же отношение абсолютной ошибки ε_A окончательного результата измерений к его среднему значению A называется *относительной ошибкой результата* δ_A:

$$\delta_A = \frac{\varepsilon_A}{A}. \tag{2-14}$$

Относительные ошибки принято выражать в процентах.

Абсолютные ошибки не зависят от размеров измеряемой величины, т. е. определяются только точностью измерений, тогда как в выражение относительных ошибок, например в формулу (2-14), входит измеряемая величина A, т. е. при *одинаковой точности измерений их относительная ошибка в различных случаях может быть различной.* Так, например, при измерении толщины каких-либо пластинок винтовым микрометром, точность которого равна $\pm 0{,}01$ *мм*, абсолютная ошибка при всех измерениях будет одна и та же, а именно не больше $\pm 0{,}01$ *мм*, но относительная ошибка измерения двух пластинок с толщиной 1 *мм* и 1 *см* будет, согласно формуле (2-14), совершенно различной: в первом случае не более $\pm 1\%$, а во втором — не более $\pm 0{,}1\%$. Вычисление относительных ошибок, как мы видим, дает возможность очень наглядно оценить точность измерений, поэтому при всех измерениях принято вычислять относительную ошибку результата.

§ 2-12. Ошибки результата измерений: средняя квадратичная, вероятная и средняя

Для нахождения относительной ошибки результата измерений, т. е. величины δ_A в формуле (2-14), необходимо определить его абсолютную ошибку ε_A. Для этой величины в теории случайных ошибок выводятся три различные формулы; они дают выражения трех различных ошибок ε_A, которыми и можно пользоваться для характеристики точности результатов измерений. Эти ошибки таковы: 1) *средняя квадратичная ошибка* σ_A среднего арифметического; 2) его *вероятная ошибка* r_A и 3) его *средняя ошибка* η_A. Обыкновенно находят среднюю квадратичную ошибку σ_A результата измерений или его вероятную ошибку r_A, третья ошибка η_A применяется значительно реже.

Для средней квадратичной ошибки σ_A теория случайных ошибок приводит к такому выражению:

$$\sigma_A = \pm \sqrt{\frac{\sum(\varepsilon^2)}{n(n-1)}}, \tag{2-15}$$

т. е. для вычисления средней квадратичной ошибки результата надо извлечь квадратный корень из частного, получаемого от деления суммы квадратов абсолютных ошибок всех измерений на выражение $n(n-1)$, где n обозначает по-прежнему число измерений. Определять ошибки результата (абсолютную и относительную), пользуясь формулой (2-15), целесообразно, но это вычисление иногда оказывается кропотливым.

Все ошибки измерений, очевидно, заключаются между наибольшими по абсолютной величине положительными и отрицательными значениями ε, причем большие случайные ошибки в ту и другую сторону менее вероятны, чем малые, т. е. должны реже встречаться. Поэтому есть основание в формуле (2-15) ввести некоторый коэффициент, меньший 1; вычисленный на основании теории вероятностей он оказывается равным 0,6745, или приближенно 2/3. Отсюда для *вероятной ошибки* r_A результата получают такое выражение:

$$r_A = \pm 0{,}6745 \sqrt{\frac{\sum(\varepsilon^2)}{n(n-1)}}. \qquad (2\text{-}16)$$

В формулах (2-15) и (2-16) принято ставить два знака, так как оба знака одинаково возможны, т. е. точное значение измеряемой величины может быть и больше и меньше (одинаково вероятно) значения, определяемого формулой (2-13); оно может отличаться от этого значения на величину σ_A, но, вероятно, отличается не больше чем на величину rA. Далее из формул (2-15) и (2-16) видно, что ошибка результата при увеличении n уменьшается пропорционально корню квадратному из $n(n-1)$, т. е. при достаточно большом числе измерений ошибку результата можно сделать очень малой.

Таким образом, для окончательного значения измеряемой величины на основании формул (2-13) и (2-16) можно написать:

$$A = \frac{\sum a}{n} \pm 0{,}6745 \sqrt{\frac{\sum(\varepsilon^2)}{n(n-1)}}. \qquad (2\text{-}17)$$

Первый член правой части этого выражения определяет наиболее вероятное значение измеряемой величины, а второй член дает величину его вероятной ошибки.

Для того, чтобы познакомиться на практике с подобными вычислениями, рассмотрим следующий пример.

Измерялось электрическое сопротивление R катушки. Измерения были повторены десять раз; их результаты, выраженные в омах, оказались таковы:

6,270; 6,277; 6,271; 6,273; 6,276; 6,272; 6,278; 6,275; 6,277; 6,274.

По формуле (2-13) находим среднее значение результата измерений

$$R = \frac{\sum R}{n} = 6{,}274\,(3)\ \textit{ом}.$$

Отсюда находим абсолютные ошибки ε_R всех измерений и вычисляем их квадраты ε_R^2; результаты этих измерений приведены в табл. 2-11.

Таблица 2-11

Абсолютные ошибки измерений и их квадраты

ε_R	$+0{,}004$	$-0{,}003$	$+0{,}003$	$+0{,}001$	$-0{,}002$
ε_R^2	$16\cdot10^{-6}$	$9\cdot10^{-6}$	$9\cdot10^{-6}$	$1\cdot10^{-6}$	$4\cdot10^{-6}$
ε_R	$+0{,}002$	$-0{,}004$	$-0{,}001$	$-0{,}003$	$0{,}000$
ε_R^2	$4\cdot10^{-6}$	$16\cdot10^{-6}$	$1\cdot10^{-6}$	$9\cdot10^{-6}$	0

Из таблицы находим сумму квадратов всех ошибок:

$$\sum(\varepsilon_R^2)=0{,}000069.$$

По формулам (2-15), (2-16) вычисляем среднюю квадратичную и вероятную ошибки результата:

$$\sigma_R=\pm\sqrt{\frac{0{,}000069}{10\cdot9}}=\pm0{,}0009,\qquad r_R=\pm0{,}6745\cdot0{,}0009=\pm0{,}0006.$$

Окончательный результат измерений можно написать так:

$$R=(6{,}274\pm0{,}0006)\ \textit{ом}.$$

Первый член в правой части этого равенства дает наиболее вероятное значение сопротивления R катушки, а второй — вероятную ошибку его измерения.

Если вместо вероятной ошибки r_R мы введем среднюю квадратичную ошибку σ_R, то тот же результат можно написать в таком виде:

$$R=(6{,}274\pm0{,}001)\ \textit{ом},$$

где значение средней квадратичной ошибки округлено до третьего десятичного знака.

§ 2-13. Определение ошибок функции по ошибкам аргументов

Измерить данную величину непосредственно приходится сравнительно очень редко; такие измерения мы встречаем только в простейших случаях — при обычных измерениях длины, при определении веса тел на обыкновенных весах, при измерении промежутков времени секундомерами. В большинстве же случаев приходится непосредственно измерять не искомую величину, а некоторые другие величины, связанные с ней известными математическими соотношениями (формулами), которые определяются законами данного явления и дают возможность из результатов непосредственных измерений вычислить искомую величину, не производя ее измерений. В таких случаях оказывается, что ошибка получаемого значения искомой величины зависит не только от ошибок, допущенных при непосредственных измерениях, но и от вида той математической формулы, которая связывает искомую величину с величинами, непосредственно измеренными. При рассмотрении этих вопросов оказалось очень удобным воспользоваться приемами дифференциального исчисления, считая искомую величину функцией, а величины, непосредственно измеряемые, ее аргументами, причем вид функциональной зависимости определяется формулой, связывающей эти величины.

Вначале допустим, что измерение некоторой величины A, непосредственно недоступное, заменяют измерением другой величины, x, связан-

ной с ней некоторым соотношением, так что можно написать:

$$A = f(x). \tag{2-18}$$

Пусть при измерении величины x средняя абсолютная ошибка результата оказалась равной $\pm dx$. Эта ошибка при вычислении значения A по формуле (2-18) дает абсолютную ошибку, равную $\pm dA$. Таким образом, можно написать:

$$A + dA = f(x + dx).$$

На основании общего определения дифференциала находим:

$$dA = \frac{df(x)}{dx}\, dx. \tag{2-19}$$

Относительная ошибка E в определении A на основании формул (2-14), (2-19) составляет:

$$E = \frac{dA}{A} = \frac{\frac{df(x)}{dx}\, dx}{f(x)} = \frac{df(x)}{f(x)}.$$

Правая часть этого уравнения представляет собой дифференциал натурального логарифма $f(x)$, поэтому можно написать:

$$E = \frac{dA}{A} = d \ln f(x), \tag{2-20}$$

т. е. *относительная ошибка функции* равна дифференциалу натурального логарифма этой функции.

Если для определения некоторой величины A надо произвести измерения нескольких величин, допустим двух: x_1 и x_2, связанных с величиной A также определенным соотношением, то подобно предыдущему можно написать:

$$A = f(x_1, x_2). \tag{2-21}$$

Абсолютные ошибки, допущенные при измерении x_1 и x_2, обозначим dx_1 и dx_2. Каждая из этих ошибок вызывает свою частную абсолютную ошибку при определении A; эти частные абсолютные ошибки обозначим соответственно dA_{x_1} и dA_{x_2}. Очевидно, чтобы найти ∂A_1, надо применить формулу (2-19), считая x_2 постоянной величиной, а чтобы найти ∂A_2, надо вновь применить ту же формулу, считая x_1 постоянной величиной; иными словами, для определения dA_{x_1} и dA_{x_2} надо найти частные дифференциалы функции (2-21) по x_1 и x_2; получаем:

$$d_{x_1}A = \frac{\partial f(x_1, x_2)}{\partial x_1}\, dx_1 \text{ и } d_{x_2}A = \frac{\partial f(x_1, x_2)}{\partial x_2}\, dx_2 \ldots$$

Допустим, что имеет место наиболее неблагоприятный случай, т. е. что абсолютная ошибка dA окончательного результата оказывается равной сумме абсолютных значений частных ошибок, иначе говоря, вычислим наибольшее возможное значение абсолютной ошибки результата dA. Имеем:

$$dA = |d_{x_1}A| + |d_{x_2}A| = \left|\frac{\partial f(x_1, x_2)}{\partial x_1}\, dx_1\right| + \left|\frac{\partial f(x_1, x_2)}{\partial x_2}\, dx_2\right|. \tag{2-22}$$

Для вычисления наибольшего возможного значения относительной ошибки результата делим согласно формуле (2-14) обе части этого уравнения на A и, принимая во внимание формулу (2-21), находим:

$$\frac{dA}{A} = \left|\frac{\partial f(x_1, x_2)}{\partial x_1}\, \frac{dx_1}{f(x_1, x_2)}\right| + \left|\frac{\partial f(x_1, x_2)}{\partial x_2}\, \frac{dx_2}{f(x_1, x_2)}\right|.$$

Правая часть этого выражения, очевидно, равна полному дифференциалу натурального логарифма функции (2-21), в котором взята сумма

абсолютных значений всех членов, т. е. окончательно можно написать

$$\frac{dA}{A} = d \ln f(x_1, x_2). \qquad (2\text{-}23)$$

Те же самые рассуждения можно, очевидно, применить и к случаю, когда определение некоторой величины требует измерения не двух, а нескольких величин, т. е. когда величина A — функция нескольких независимых переменных:

$$A = f(x_1, x_2, \ldots, x_n).$$

При этом получаются формулы, аналогичные (2-22) и (2-23). Отсюда следует такой вывод: при определении какой-либо величины, требующей измерения нескольких величин, —

1) *наибольшее значение абсолютной ошибки* результата равно полному дифференциалу функции, определяющей зависимость данной величины от измеряемых величин, причем при вычислении дифференциала следует брать сумму абсолютных значений всех частных дифференциалов (все частные ошибки складываются);

2) наибольшее значение относительной ошибки результата равно полному дифференциалу натурального логарифма функции, определяющей зависимость данной величины от измеряемых величин, причем при вычислении дифференциала следует брать сумму абсолютных значений дифференциалов всех членов логарифма (все частные ошибки складываются).

§ 2-14. Примеры вычисления ошибок результатов измерения

I. Ускорение силы тяжести определяется методом оборотного маятника. Из формулы маятника для периода простого колебания

$$t = \pi \sqrt{\frac{l}{g}}$$

находим формулу для вычисления g:

$$g = \pi^2 \frac{l}{t^2}. \qquad (2\text{-}24)$$

Измерение величин, входящих в правую часть формулы (2-24), дало следующие результаты.

1. Длина l маятника, измеренная с точностью до 0,1 *мм*, оказалась равной 50,02 *см*; таким образом, ошибки измерения длины оказались равны: абсолютная (Δl) равна $\pm 0{,}1$ *мм* $= \pm 0{,}01$ *см* и относительная ($\Delta l : l$), определяемая по формуле (2-14), равна $\pm 0{,}0002 = \pm 0{,}02$ %.

2. Период простого колебания, измеренный с точностью до 10^{-4} *сек*, оказался равным 0,7098 *сек*; таким образом, ошибки измерения периода равны: абсолютная (Δt) равна $\pm 10^{-4}$ *сек* и относительная ($\Delta t : t$) равна $\pm 0{,}00014 = \pm 0{,}014$ %.

Требуется вычислить наибольшее значение: а) абсолютной и б) относительной ошибки в определении g.

а) Наибольшее значение абсолютной ошибки. Для вычисления частных ошибок в определении g, вызываемых ошибками при измерении l и t в отдельности, находим частные дифференциалы функции (2-24) по l и t:

$$d_l g = \frac{\partial \left(\pi^2 \frac{l}{t^2}\right)}{\partial l} dl = \frac{\pi^2}{t^2} dl \quad \text{и} \quad d_t g = \frac{\partial \left(\pi^2 \frac{l}{t^2}\right)}{\partial t} dt = -2 \frac{\pi^2 l}{t^3} dt.$$

Отсюда, взяв согласно формуле (2-22) сумму абсолютных величин частных дифференциалов, получаем:

$$dg = \frac{\pi^2}{t^2} dl + 2 \frac{\pi^2 l}{t^3} dt.$$

Вставляя в это выражение значения l и dl (или Δl), t и dt (или Δt), находим:

$$\Delta g = \frac{\pi^2}{0{,}71^2\ сек^2} \cdot 0{,}01\ см + 2\ \frac{\pi^2 \cdot 50{,}02\ см}{0{,}71^3\ сек^3} \cdot 10^{-4}\ сек =$$

$$= 0{,}197\ \frac{см}{сек^2} + 0{,}277\ \frac{см}{сек^2},$$

т. е. наибольшее значение абсолютной ошибки при определении g с данными приборами приближенно оказывается равным

$$\Delta g = \pm\ 0{,}47\ \frac{см}{сек^2}.$$

б) Наибольшее значение относительной ошибки. Берем натуральный логарифм выражения (2-24):

$$\ln g = 2 \ln \pi + \ln l - 2 \ln t$$

и находим его дифференциал, причем в правой части берем сумму абсолютных значений его членов:

$$d \ln g = d \ln l + 2\, d \ln t.$$

Выполняя дифференцирование, получаем:

$$\frac{dg}{g} = \frac{dl}{l} + 2\ \frac{dt}{t}.$$

Подставляя в это выражение значения относительных ошибок в определении l и t, получаем наибольшее значение относительной ошибки при определении g с данными приборами:

$$\frac{\Delta g}{g} = \pm\ 0{,}00048,$$

или приближенно

$$\frac{\Delta g}{g} = \pm\ 0{,}05\ \%.$$

Все вычисления в этом примере выполнены согласно изложенной выше теории; однако на практике их можно произвести проще, так как, определив одну из ошибок (абсолютную или относительную), другую можно найти непосредственно из формулы (2-14), если значение искомой величины уже определено, хотя бы приближенно. Так, в этом примере, разделив найденное значение абсолютной ошибки $\pm 0{,}47\ см/сек^2$ на среднее значение g (т. е. $980\ см/сек^2$), получаем непосредственно значение относительной ошибки.

Далее следует обратить внимание на то, что, хотя относительная ошибка при измерении t (0,014 %) меньше относительной ошибки при измерении l (0,02 %), но влияние первой ошибки на величину ошибки результата оказывается больше; это объясняется тем, что в формуле (2-24) t входит во второй степени, вследствии чего эта ошибка в окончательном результате удваивается.

II. Коэффициент внутреннего трения жидкости η определяется методом капиллярной трубки; для вычисления η из результатов измерения применяется формула Пуазейля:

$$\eta = \frac{\pi p r^4 t}{8 l v}, \qquad (2\text{-}25)$$

где p — давление, под которым находится жидкость; r — радиус капилляра; l — его длина и t — время, в течение которого вытекает объем v жидкости.

Значения этих величин и ошибки их измерений, как показало предварительное исследование приборов, оказались таковы (табл. 2-12):

Таблица 2-12

Абсолютные и относительные ошибки измерений

Измеряемая величина	Приближенное значение	Абсолютная ошибка измерения	Относительная ошибка
p	20 *см* рт. ст.	$\pm 0{,}1$ *мм* рт. ст.	$\pm 0{,}0005$
r	1 *мм*	$\pm 0{,}1$ *мм*	$\pm 0{,}01$
l	10 *см*	$\pm 0{,}1$ »	$\pm 0{,}001$
t	25 *сек*	$\pm 0{,}1$ *сек*	$\pm 0{,}004$
v	5 $см^3$	± 1 $мм^3$	$\pm 0{,}0002$

По этим данным требуется вычислить относительную ошибку в определении η. Логарифмируем формулу (2-25):

$$\ln \eta = \ln \pi + \ln p + 4 \ln r + \ln t - \ln 8 - \ln l - \ln v.$$

Берем дифференциал этого выражения:

$$d \ln \eta = d \ln p + 4 d \ln r + d \ln t - d \ln l - d \ln v.$$

Выполняя дифференцирование, причем в правой части берем сумму абсолютных значений всех членов (все ошибки складываются), находим:

$$\frac{d\eta}{\eta} = \frac{dp}{p} + 4 \frac{dr}{r} + \frac{dt}{t} + \frac{dl}{l} + \frac{dv}{v}.$$

Подставляя в правую часть этого выражения найденные выше относительные ошибки всех измерений, получаем:

$$\frac{\Delta \eta}{\eta} = \pm (0{,}0005 + 4 \cdot 0{,}01 + 0{,}001 + 0{,}004 + 0{,}0002),$$

т. е. относительная ошибка определения η составляет:

$$\frac{\Delta \eta}{\eta} = \pm 0{,}0457,$$

или приближенно

$$\frac{\Delta \eta}{\eta} = \pm 4{,}6\%.$$

В данном случае, как мы видим, наибольшее влияние на ошибку результата оказывает ошибка в измерении радиуса капилляра (r), во-первых, потому, что относительная ошибка при его измерении больше других ошибок, и, во-вторых, потому, что в формуле (2-25) r входит в четвертой степени, т. е. ошибка измерения r в окончательном результате возрастает в четыре раза. Отсюда следует, что, желая повысить точность определения коэффициента внутреннего трения этим методом, следует прежде всего уменьшить ошибку в измерении r, т. е. произвести измерение радиуса капилляра с возможно более высокой степенью точности.

§ 2-15. Нахождение наиболее выгодных условий измерения

Теми же приемами дифференциального исчисления удается решить, хотя и не всегда, задачу о нахождении наиболее выгодных условий измерения.

Наиболее выгодные условия измерения, очевидно, будут иметь место в том случае, когда ошибка результата оказывается наименьшей. Отсюда следует, что с математической стороны вопрос приводится к нахождению условий минимума выражений (2-20) в простейшем случае и (2-23) в более сложном случае. Для этого надо воспользоваться общими правилами, принятыми в дифференциальном исчислении для нахождения минимумов функции одного или нескольких переменных, а именно:

1) В первом случае надо найти производную выражения (2-19) по x и, приравняв ее нулю, определить отсюда соответствующее значение x; пусть оно оказалось равным a. Берем вторую производную функции (2-19) по x и в ее выражение вставляем вместо x его значение a; если при x, равном a, вторая производная оказывается положительной, то функция (2-19) при x, равном a, имеет минимум.

2) Во втором случае надо найти частные производные первого порядка выражения (2-23) по всем независимым переменным и из полученных уравнений, приравнивая их нулю, определить значения всех переменных. Дополнительными условиями минимума вновь будет определение знака частных производных второго порядка при найденных значениях переменных.

Определение наиболее выгодных условий измерения не всегда дает положительный результат, так как не все функции имеют минимум. Но в некоторых случаях определение условий минимума ошибки, т. е. определение наиболее выгодных условий измерения, может быть выполнено очень просто.

Пример. При определении сопротивления проводников методом мостика сопротивление R_x вычисляется по формуле

$$R_x = R_0 \frac{l_1}{l_2}, \tag{2-26}$$

где R_0 — эталон сопротивления, а l_1 и l_2 — части измерительной проволоки мостика, на которые ее делит подвижной контакт при его установке на нулевое отклонение гальванометра. Определим наиболее выгодное положение подвижного контакта (т. е. относительную длину l_1 и l_2), при котором ошибка измерения оказывается наименьшей.

Длину всей измерительной проволоки будем считать постоянной, обозначим ее через L. Очевидно,

$$l_1 + l_2 = L,$$

и формулу (2-26) можно написать так:

$$R_x = R_0 \frac{l_1}{L - l_1}.$$

Находим натуральный логарифм этого выражения:

$$\ln R_x = \ln R_0 + \ln l_1 - \ln (L - l_1).$$

Вычисляем дифференциал этого выражения, причем в первой части берем сумму абсолютных величин всех членов, т. е. находим, согласно формуле (2-20), значение относительной ошибки измерения:

$$\frac{dR_x}{R_x} = \left(\frac{1}{l_1} + \frac{1}{L - l_1}\right) dl.$$

Это выражение будет иметь минимум при минимуме коэффициента, стоящего при dl; обозначая его через Z, т. е. полагая

$$Z=\frac{1}{l_1}+\frac{1}{L-l_1}, \tag{2-27}$$

находим первую и вторую производные Z по l_1:

$$\frac{dZ}{dl_1}=\frac{1}{(L-l_1)^2}-\frac{1}{l_1^2} \quad \text{и} \quad \frac{d^2Z}{dl_1^2}=\frac{2}{(L-l_1)^3}+\frac{2}{l_1^3}.$$

При всех возможных значениях l_1 вторая производная положительна, так как l_1 всегда меньше L. Поэтому функция (2-27) имеет минимум при том значении l_1, которое получится, если первую производную положить равной нулю; таким образом можно написать:

$$\frac{1}{(L-l_1)^2}-\frac{1}{l_1^2}=0;$$

отсюда получаем:

$$l_1=\frac{L}{2}, \tag{2-28}$$

т. е. наиболее выгодные условия измерения будут иметь место в том случае, когда подвижной контакт находится посередине ($l_1=l_2=L/2$) измерительной проволоки. Согласно формуле (2-26), для этого необходимо, чтобы эталон R_0 и измеряемое сопротивление R_x были (приблизительно) равны по величине.

Глава 2-3

ФИЗИЧЕСКИЕ ТАБЛИЦЫ

§ 2-16. Общие свойства тел

Таблица 2-13. Атомные веса химических элементов

В таблице даны: 1) названия химических элементов в алфавитном порядке; 2) их символы, принятые в СССР; 3) порядковые номера и 4) международные атомные веса по данным 1954 г. [1]).

Квадратными скобками выделены искусственно полученные элементы; для них указан атомный вес изотопа с наибольшим периодом полураспада.

Название	Символ	Порядковый номер Z	Атомный вес A	Название	Символ	Порядковый номер Z	Атомный вес A
Азот	N	7	14,008	Астатин . . .	At	85	[210]
Актиний . . .	Ac	89	227	Барий	Ba	56	137,36
Алюминий . .	Al	13	26,98	Бериллий . . .	Be	4	9,013
Америций . .	Am	95	[243]	Беркелий . . .	Bk	97	[245]
Аргон	Ar	18	39,944	Бор	B	5	10,82

Продолжение табл. 2-13

Название	Символ	Порядковый номер Z	Атомный вес A	Название	Символ	Порядковый номер Z	Атомный вес A
Бром	Br	35	79,916	Осмий	Os	76	190,2
Ванадий	V	23	50,95	Палладий	Pd	46	106,7
Висмут	Bi	83	209,00	Платина	Pt	78	195,23
Водород	H	1	1,0080	Плутоний	Pu	94	[242]
Вольфрам	W	74	183,92	Полоний	Po	84	210
Гадолиний	Gd	64	156,9	Празеодим	Pr	59	140,92
Галлий	Ga	31	69,72	Прометий	Pm	61	[145]
Гафний	Hf	72	178,6	Протактиний	Pa	91	231
Гелий	He	2	4,003	Радий	Ra	88	226,05
Германий	Ge	32	72,60	Радон	Rn	86	222
Гольмий	Ho	67	164,94	Рений	Re	75	186,31
Диспрозий	Dy	66	162,46	Родий	Rh	45	102,91
Европий	Eu	63	152,0	Ртуть	Hg	80	200,61
Железо	Fe	26	55,85	Рубидий	Rb	37	85,48
Золото	Au	79	197,0	Рутений [2])	Ru	44	101,1
Индий	In	49	114,76	Самарий	Sm	62	150,43
Иод	J	53	126,91	Свинец	Pb	82	207,21
Иридий	Ir	77	192,2	Селен	Se	34	78,96
Иттербий	Yb	70	173,04	Сера	S	16	32,066
Иттрий	Y	39	88,92	Серебро	Ag	47	107,880
Кадмий	Cd	48	112,41	Скандий	Sc	21	44,96
Калий	K	19	39,100	Стронций	Sr	38	87,63
Калифорний	Cf	98	[248]	Сурьма	Sb	51	121,76
Кальций	Ca	20	40,08	Таллий	Tl	81	204,39
Кислород	O	8	16	Тантал	Ta	73	180,95
Кобальт	Co	27	58,94	Теллур	Te	52	127,61
Кремний	Si	14	28,09	Тербий	Tb	65	158,93
Криптон	Kr	36	83,80	Технеций	Tc	43	[99]
Ксенон	Xe	54	131,3	Титан	Ti	22	47,90
Кюрий	Cm	96	[245]	Торий	Th	90	232,05
Лантан	La	57	138,92	Туллий	Tu	69	168,94
Литий	Li	3	6,940	Углерод	C	6	12,011
Лютеций	Lu	71	174,99	Уран	U	92	238,07
Магний	Mg	12	24,32	Фермий	Fm	100	[255]
Марганец	Mn	25	54,94	Фосфор	P	15	30,975
Медь	Cu	29	63,54	Франций	Fr	87	[223]
Менделевий	Mv	101	[256]	Фтор	F	9	19,00
Молибден	Mo	42	95,95	Хлор	Cl	17	35,457
Мышьяк	As	33	74,91	Хром	Cr	24	52,01
Натрий	Na	11	22,991	Цезий	Cs	55	132,91
Неодим	Nd	60	144,27	Церий	Ce	58	140,13
Неон	Ne	10	20,183	Цинк	Zn	30	65,38
Нептуний	Np	93	[237]	Цирконий	Zr	40	91,22
Никель	Ni	28	58,69	Эйнштейний	En	99	[253]
Ниобий	Nb	41	92,91	Эрбий	Er	68	167,2
Олово	Sn	50	118,70				

Примечания к табл. 2-13. [1]) Международные атомные веса даются по так называемой *химической шкале*, в которой атомный вес

кислорода принят точно равным 16 (O=16). В физике, в особенности при исследовании ядерных явлений, применяется так называемая *физическая шкала атомных весов*, точнее, атомных масс, в которой точно равным 16 считают атомный вес изотопа кислорода O^{16} ($O^{16}=16$). Кислород имеет три стабильных изотопа (стр 388), процентное содержание которых в природных условиях остается вполне постоянным, а именно:

O^{16} (99,759%), O^{17} (0,037%) и O^{18} (0,204%).

Таким образом, единица измерения атомных масс в физической шкале получается несколько меньше той же единицы в химической шкале, и отношение этих единиц оказывается равным

$$\frac{\text{хим. ед. ат. массы}}{\text{физ. ед. ат. массы}} = 1{,}000272.$$

Вследствие этого числовые значения атомных весов, а также различных величин, зависящих от них, оказываются в химической и физической шкале несколько различными. Так, атомный вес водорода, равный по химической шкале 1,00800, в физической шкале получает значение 1,00827, атомный вес кислорода, принятый в химической шкале точно равным 16, в физической шкале оказывается равным 16,00435 и т. д.

В дальнейших таблицах применяется, как правило, химическая шкала атомных весов. Если же числовые данные приводятся по физической шкале, то это отдельно указывается.

2) Ruthenia — латинское название России. Рутений открыл профессор Казанского университета К. К. Клаус (1796—1864) в отходах после обработки уральской платины.

Таблица 2-14. Периодическая система химических элементов Д. И. Менделеева

Сущность периодического закона, установленного Дмитрием Ивановичем Менделеевым, была прекрасно определена его автором в виде следующего положения: «химические и физические свойства соединений, образуемых элементами, находятся в периодической зависимости от величины атомного веса элементов». Д. И. Менделеев весьма убедительно и обстоятельно подтвердил это положение, показав, что если химические элементы расположить в ряд по возрастающим атомным весам, то в то время, как в этом ряду на всем его протяжении атомные веса изменяются только в одном направлении, свойства элементов изменяются периодически, иначе говоря, весь ряд элементов можно разбить на определенные интервалы, в границах которых свойства элементов обнаруживают явную повторяемость. На основании этого Менделеевым была составлена первая периодическая таблица химических элементов, в которой все элементы были разделены на 8 групп, причем элементы, имеющие общие свойства, располагались друг под другом в вертикальных столбцах. Впоследствии к этим 8 группам была прибавлена еще одна группа, нулевая группа инертных газов.

Из своего периодического закона Менделеев сделал ряд весьма важных выводов; так он указывал, что этот закон позволяет ожидать открытия еще многих неизвестных элементов и что, пользуясь им, можно исправлять величину атомного веса элемента, «зная его аналоги». Эти выводы получили впоследствии блестящее подтверждение.

Наше время внесло в периодический закон Менделеева одно весьма существенное изменение, что позволило объяснить причины повторяемости свойств элементов, оставшиеся раньше неясными. В первона-

	ГРУППЫ				
	I	II	III	IV	V
1					
2	Li 3	Be 4	5 B	6 C	7 N
K, L	2, 1	—, 2	—, 3	—, 4	—, 5
3	Na 11	Mg 12	13 Al	14 Si	15 P
K, L, M	2, 8, 1	—, —, 2	—, —, 3	—, —, 4	—, —, 5
4	K 19	Ca 20	Sc 21	Ti 22	V 23
	2, 8, 8, 1	—, —, 8, 2	—, —, 9, 2	—, —, 10, 2	—, —, 11, 2
	29 Cu	30 Zn	31 Ga	32 Ge	33 As
K, L, M, N	2, 8, 18, 1	—, —, —, 2	—, —, —, 3	—, —, —, 4	—, —, —, 5
5	Rb 37	Sr 38	Y 39	Zr 40	Nb 41
	2, 8, 18, 8, 1	—, —, —, 8, 2	—, —, —, 9, 2	—, —, —, 10, 2	—, —, —, 12, 1
	47 Ag	48 Cd	49 In	50 Sn	51 Sb
K, L, M, N, O	2, 8, 18, 18, 1	—, —, —, —, 2	—, —, —, —, 3	—, —, —, —, 4	—, —, —, —, 5
6	Cs 55	Ba 56	57–71 [1]	Hf 72	Ta 73
	2, 8, 18, 18, 8, 1	—, —, —, —, 8, 2		2, 8, 18, 32, 10, 2	—, —, —, —, 11, 2
	79 Au	80 Hg	81 Tl	82 Pb	83 Bi
K, L, M, N, O, P	2, 8, 18, 32, 18, 1	—, —, —, —, —, 2	—, —, —, —, —, 3	—, —, —, —, —, 4	—, —, —, —, —, 5
7	Fr 87	Ra 88	Ac 89 [2]		
K, L, M, N, O, P, Q	2, 8, 18, 32, 18, 8, 1	—, —, —, —, —, 8, 2	—, —, —, —, —, 9, 2		

[1]) ЛАНТАНИДЫ

La 57	Ce 58	Pr 59	Nd 60	Pm 61	Sm 62	Eu 63	Gd 64
2, 8, 18, 18, 9, 2	—, —, 20, 8, 2	—, —, 21, 8, 2	—, —, 22, 8, 2	—, —, 23, 8, 2	—, —, 24, 8, 2	—, —, 25, 8, 2	—, —, 25, 8, 2

[2]) АКТИ

Th 90	Pa 91	U 92	Np 93	Pu 94	Am 95
2, 8, 18, 32, 18, 11, 2	—, —, —, 20, 9, 2	—, —, —, 21, 9, 2	—, —, —, 23, 8, 2	—, —, —, 24, 8, 2	—, —, —, 25, 8, 2

ЭЛЕМЕНТОВ

VI	VII		VIII		0
	1 H 1				He 2 2
8 O —,6	9 F —,7				Ne 10 2,8
16 S —,—,6	17 Cl —,—,7				Ar 18 2 8,8
Cr 24 —,—,13,1	Mn 25 —,—,13,2	Fe 26 —,—,14,2	Co 27 —,—,15,2	Ni 28 —,—,16,2	
34 Se —,—,—,6	35 Br —,—,—,7				Kr 36 2,8,18,8
Mo 42 —,—,—,13,1	Tc 43 —,—,—,13,2	Ru 44 —,—,—,15,1	Rh 45 —,—,—,16,1	Pd 46 —,—,18,18 0	
52 Te —,—,—,—,6	53 J —,—,—,—,7				Xe 54 2,8,18,18,8
W 74 —,—,—,—,12,2	Re 75 —,—,—,—,13,2	Os 76 —,—,—,—,14,2	Ir 77 —,—,—,—,15,2	Pt 78 —,—,—,—,17,1	
84 Po —,—,—,—,—,6	85 At —,—,—,—,—,7				Rn 86 2,8,18,32,18,8

(РЕДКИЕ ЗЕМЛИ)

Tb 65	Dy 66	Ho 67	Er 68	Tu 69	Yb 70	Lu 71
—,—,—,27,8,2	—,—,—,28,8,2	—,—,—,29,8,2	—,—,—,30,8,2	—,—,—,31,8,2	—,—,—,32,8,2	2,8,18,32,9,2

НИДЫ

Cm 96	Bk 97	Cf 98	En 99	Fm 100	Mv 101
—,—,—,25,9,2	—,—,—,27,8,2	—,—,—,28,8,2			

чальном положении повторяемость свойств была поставлена Менделеевым в зависимости от атомного веса элементов. Благодаря исследованию строения и внутренних свойств атомов мы теперь знаем, что периодичность в свойствах химических элементов зависит не от их атомных весов, а от порядкового номера элементов в таблице (см. ниже), который определяет общее число электронов в атоме. Электроны располагаются в атомах по определенным слоям, или оболочкам, число которых возрастает по мере увеличения порядкового номера элементов и для самых тяжелых атомов может достигать семи; эти оболочки принято обозначать буквами *K*, *L*, *M*, *N*, *O*, *P* и *Q* (см. табл. 2-14). Предельное число электронов, которое может находиться в каждой из оболочек, известно. Известно также, что формирование всех оболочек протекает по одной и той же схеме. В результате оказывается, что структура периферийных оболочек при их формировании периодически повторяется, как это видно из табл. 2-14, а структурой периферийных оболочек атомов определяются химические свойства элементов и некоторые их физические свойства, такие, как атомная электропроводность, ионизационные потенциалы, оптические спектры и т. п. Таким образом, периодичность в свойствах химических элементов объясняется периодичностью в строении периферийных электронных оболочек их атомов. Более подробные данные об атомных электронных оболочках приводятся в разделе «Строение атома» (стр. 377 и сл.).

В табл. 2-14 даны химические символы и порядковые номера элементов, кроме того, указаны их электронные оболочки (слои) и число электронов в них. По отношению к этим данным необходимо сделать следующие замечания:

1. Атомные веса элементов и их русские названия даны в табл. 2-13 и 2-15. Некоторые особые названия и символы элементов, принятые в других странах, указаны в табл. 2-16.

2. Порядковый номер, иначе атомный номер, атомное число, отвечает числу положительных элементарных зарядов в ядре атома, т. е. числу протонов в нем, и одновременно общему числу электронов в электронных оболочках атома. Общая номенклатура электронных оболочек атома схематически приведена в правом нижнем углу таблицы; электронные оболочки, отвечающие отдельным рядам таблицы, указаны для каждого из них в первом столбце. Число электронов в каждой из оболочек в отдельности приводится полностью только для первого и последнего представителя данного ряда, для других его членов указаны числа электронов только в одном, двух или трех периферийных слоях, где эти числа изменяются, а числа электронов во внутренних слоях, остающиеся неизменными, обозначены черточками.

Обычно из химических элементов выделяют различные группы, которые обнаруживают общие свойства или признаки. Такие группы могут быть чрезвычайно разнообразными в зависимости от тех свойств, которые положены в их основу. По этим вопросам здесь можно сказать следующее:

1. Относительно общего физического состояния элементов следует отметить, что *при обычных условиях температуры и давления*:

а) элементы азот (N), аргон (Ar), водород (H), гелий (He), кислород (O), криптон (Kr), ксенон (Xe), неон (Ne) и радон (Rn, стр. 383) находятся в газообразном состоянии;

б) элементы бром (Br) и ртуть (Hg) находятся в жидком состоянии;

в) все остальные элементы — в твердом.

2. Основными группами, на которые принято делить химические элементы, являются группа *металлов*, весьма обширная, и значительно меньшая по числу группа металлоидов, или, как их часто называют в последнее время, *неметаллов*. Такое деление основано на явном различии в некоторых физических и химических свойствах, которое обнаруживают представители той и другой группы. Однако одновременно приходится указать, что имеется небольшое число таких элементов, ко-

торые по одним свойствам относятся к металлам, а по другим — к металлоидам и образуют как бы промежуточную группу. Хотя таким образом определить точную границу между той и другой группами не представляется возможным, тем не менее деление элементов на металлы и металлоиды на практике представляется достаточно обоснованным.

Металлами считаются те элементы, которые обладают хорошей теплопроводностью (стр. 318) и хорошей электропроводностью (стр. 362), имеют низкий ионизационный потенциал (стр. 381), кристаллическую структуру простых типов и некоторые другие свойства. В химическом отношении металлы обнаруживают общие электрохимические свойства, способность замещать водород в кислотах с образованием солей и др. Металлы обладают также некоторыми общими внешними и механическими свойствами, имеют определенный цвет и блеск, обнаруживают ковкость, тягучесть.

На основании этих признаков к металлам относят элементы:

Актиний (Ac)	Кальций (Ca)	Ртуть (Hg)
Алюминий (Al)	Кобальт (Co)	Рубидий (Rb)
Барий (Ba)	Лантан (La)	Рутений (Ru)
Бериллий (Be)	Литий (Li)	Самарий (Sm)
Ванадий (V)	Лютеций (Lu)	Свинец (Pb)
Висмут (Bi)	Магний (Mg)	Серебро (Ag)
Вольфрам (W)	Медь (Cu)	Скандий (Sc)
Гадолиний (Gd)	Молибден (Mo)	Стронций (Sr)
Галлий (Ga)	Натрий (Na)	Сурьма (Sb)
Гафний (Hf)	Неодим (Nd)	Таллий (Tl)
Германий (Ge)	Никель (Ni)	Тантал (Ta)
Гольмий (Ho)	Ниобий (Nb)	Тербий (Tb)
Диспрозий (Dy)	Олово (Sn)	Титан (Ti)
Европий (Eu)	Осмий (Os)	Торий (Th)
Железо (Fe)	Палладий (Pd)	Тулий (Tu)
Золото (Au)	Платина (Pt)	Уран (U)
Индий (In)	Полоний (Po)	Хром (Cr)
Иридий (Ir)	Празеодим (Pr)	Цезий (Cs)
Иттербий (Yb)	Протактиний (Pa)	Церий (Ce)
Иттрий (Y)	Радий (Ra)	Цинк (Zn)
Кадмий (Cd)	Рений (Re)	Цирконий (Zr)
Калий (K)	Родий (Rh)	Эрбий (Er)

Кроме того, к металлам относят:

а) из недавно открытых элементов технеций (Te), прометий (Pm) и франций (Fr), а также трансурановые элементы (стр. 397) — нептуний (Np), плутоний (Pu), америций (Am), кюрий (Cm), берклий (Bk), калифорний (Cf), эйнштейний (En), фермий (Fm) и менделевий (Mv).

б) марганец (Mn) и мышьяк (As) по их физическим свойствам.

К металлоидам относят:

Азот (N)	Кислород (O)	Углерод (C)
Бор (B)	Кремний (Si)	Фосфор (P)
Бром (Br)	Селен (Se)	Фтор (F)
Иод (J)	Сера (S)	Хлор (Cl)
	Теллур (Te)	

Кроме того, к металлоидам относят недавно открытый элемент астатин (At); что же касается водорода (H), то по физическим свойствам его относят также к металлоидам.

Обособленную группу образуют *инертные* или, как иногда называют, *благородные газы*: аргон (Ar), гелий (He), криптон (Kr), ксенон (Xe), неон (Ne) и радон (Rn), которые не образуют устойчивых химических соединений.

Также отдельную группу образуют элементы, обнаруживающие естественно радиоактивные свойства (см. ниже).

Из группы металлов принято выделять более мелкие группы в зависимости от общности тех или иных свойств. Так выделяют группу *редкоземельных* элементов; к ней относят, кроме лантанидов, еще скандий и иттрий. Таким образом, в эту группу входят следующие металлы:

Гадолиний	Иттрий	Празеодим	Тербий
Гольмий	Лантан	Прометий	Туллий
Диспрозий	Лютеций	Самарий	Церий
Европий	Неодим	Скандий	Эрбий
Иттербий			

Все эти элементы обладают чрезвычайно близкими химическими свойствами, что является непосредственным следствием почти полной тождественности в строении их периферийных электронных оболочек (табл. 2-14).

Также на основании общности химических свойств выделены группы:

а) щелочных металлов, в нее входят: литий, натрий, калий, рубидий, цезий и франций;

б) щелочноземельных металлов; в нее входят: барий, кальций, радий и стронций.

Платина и ее спутники образуют группу платиновых металлов; в нее входят, кроме платины, еще иридий, осмий, палладий, родий и рутений.

Металлы, очень стойкие в химическом отношении и (почти) не подвергающиеся окислению даже при высоких температурах, образуют группу благородных металлов; в нее входят: золото, иридий, палладий, платина, родий и серебро.

По магнитным свойствам выделяют группу ферромагнитных элементов (стр. 355), в нее входят: железо, кобальт и никель, а из редких элементов гадолиний.

Металлы делят также на легкие и тяжелые, считая условной границей между ними плотность около 3,5—4,0 $г \cdot см^{-3}$. К легким металлам относятся: алюминий, барий, бериллий, калий, кальций, литий, магний, натрий, рубидий, стронций и цезий.

Также условно делят металлы на легкоплавкие и тугоплавкие, относя к последним металлы с температурой плавления выше 800—1000° С.

В технике металлы делят на *черные* и *цветные*. К черным металлам относят железо и все его сплавы, к цветным относят все остальные металлы, но обыкновенно исключают отсюда группу редкоземельных элементов и группу благородных металлов.

Особую группу среди химических элементов образуют радиоактивные элементы, их атомы обнаруживают свойства самопроизвольного распада. Такими свойствами обладают:

1. Некоторые естественные химические элементы, которые сосредоточены главным образом в конце периодической таблицы до урана включительно (табл. 2-14, группы «Актиниды», и табл. 2-116 а, б и в); среди других естественных химических элементов только пять обнаруживают слабые, но несомненные следы радиоактивности (табл. 2-117).

2. Те нестабильные химические элементы и изотопы, которые были получены уже в наше время при различных ядерных реакциях (табл. 2-121); из таких нестабильных элементов и изотопов следует отметить:

а) группу искусственных элементов с порядковым номером больше, чем номер урана, т. е. расположенных в периодической таблице дальше его, — эти элементы получили название трансурановых (или заурановых) элементов (последний трансурановый элемент — менделевий с порядковым номером 101, табл. 2-14, группа «Актиниды», и табл. 2-15 и 2-120);

б) чрезвычайно многочисленную группу (искусственных) радиоактивных изотопов, которые в настоящее время находят очень широкие применения.

Таблица 2-15. Химические элементы в порядке атомных номеров (Z)

В табл. 2-15, кроме порядкового номера элементов, их символа, названия и атомного веса, даны еще краткие исторические справки: кто и когда открыл тот или другой элемент. Указанные в таблице даты отвечают преимущественно тем годам, когда элементы были получены в чистом виде, т. е. в металлическом или свободном состоянии, а не в виде химических соединений; приводится также имя ученого, который впервые этого достиг. Дополнительные указания по этим вопросам для некоторых элементов даны в примечаниях к таблице. Введенное в таблице сокращение «Изв. с др.» означает «известны с древнего времени», остальные сокращения понятны.

Атомный номер Z	Символ	Название	Атомный вес A	Кто открыл	Год открытия
1	H	Водород	1,0080	Кавендиш	1766
2	He	Гелий [1]	4,003	Рамзай и Клив	1895
3	Li	Литий	6,94 0	Арфведсон	1817
4	Be	Бериллий	9,013	Вёлер и Бюсси	1828
5	B	Бор	10,82	Гей-Люссак и Тенар	1808
6	C	Углерод	12,011	Изв. с др.	
7	N	Азот	14,008	Д. Резерфорд	1772
8	O	Кислород	16,0000	Пристли и Шееле	1774
9	F	Фтор [2]	19,00	Муассан	1886
10	Ne	Неон	20,183	Рамзай и Траверс	1898
11	Na	Натрий	22,991	Деви	1807
12	Mg	Магний [3]	24,32	Либих и Бюсси	1831
13	Al	Алюминий	26,98	Вёлер	1827
14	Si	Кремний	28,09	Берцелиус	1823
15	P	Фосфор	30,975	Бранд	1669
16	S	Сера	32,066	Изв. с др.	
17	Cl	Хлор	35,457	Шееле	1774
18	Ar	Аргон	39,944	Рэлей и Рамзай	1894
19	K	Калий	39,100	Деви	1807
20	Ca	Кальций	40,08	Деви (Берцелиус)	1808
21	Sc	Скандий	44,96	Нильсон	1879
22	Ti	Титан [4]	47,90	Грегор	1791
23	V	Ванадий	50,95	Зефштрем	1830
24	Cr	Хром	52,01	Воклен	1797
25	Mn	Марганец	54,94	Ган	1774
26	Fe	Железо	55,85	Изв. с др.	
27	Co	Кобальт	58,94	Брандт	1735
28	Ni	Никель	58,69	Кронстедт	1751
29	Cu	Медь	63,54	Изв. с др.	1746
30	Zn	Цинк	65,38	Маркграф	
31	Ga	Галлий	69,72	Лекок де Буабодран	1875
32	Ge	Германий	72,60	Винклер	1886
33	As	Мышьяк [5]	74,91	Альберт Великий	XIII в.
34	Se	Селен	78,96	Берцелиус	1817
35	Br	Бром	79,916	Балард	1826
36	Kr	Криптон	83,80	Рамзай и Траверс	1898

Продолжение

Атомный номер Z	Символ	Название	Атомный вес A	Кто открыл	Год открытия
37	Rb	Рубидий	85,48	Бунзен и Кирхгоф	1861
38	Sr	Стронций	87,63	Дэви	1808
39	Y	Иттрий	88,92	Вёлер	1828
40	Zr	Цирконий	91,22	Берцелиус	1824
41	Nb	Ниобий [6]	92,91	Розе	1844
42	Mo	Молибден	95,95	Гьельм	1782
43	Tc	Технеций	99	Перрье и Сегре	1937
44	Ru	Рутений	101,1	Клаус	1844
45	Rh	Родий	102,91	Волластон	1803
46	Pd	Палладий	106,7	Волластон	1803
47	Ag	Серебро	107,880	Изв. с др.	
48	Cd	Кадмий	112,41	Герман и Штромберг	1817
49	In	Индий	114,76	Рейх и Рихтер	1863
50	Sn	Олово	118,70	Изв. с др.	
51	Sb	Сурьма	121,76	В. Валентин	XV в.
52	Te	Теллур	127,61	Рихенштейн	1782
53	J	Иод	126,91	Куртуа	1811
54	Xe	Ксенон	131,3	Рамзай и Траверс	1898
55	Cs	Цезий	132,91	Бунзен и Кирхгофф	1860
56	Ba	Барий	137,36	Дэви	1808
57	La	Лантан	138,92	Мозандер	1839
58	Ce	Церий [7]	140,13	Гильдербранд и Нортон	1875
59	Pr	Празеодим	140,92	Вейсбах	1885
60	Nd	Неодим [8]	144,27	Вейсбах	1885
61	Pm	Прометий	145	Маринский и Гленденен	1947
62	Sm	Самарий	150,43	Лекок де Буабодран	1879
63	Eu	Европий	152,0	Демарсей	1896
64	Gd	Гадолиний	156,9	Мариньяк и Лекок де Буабодран	1880
65	Tb	Тербий	158,93	Мозандер	1843
66	Dy	Диспрозий	162,46	Лекок де Буабодран	1886
67	Ho	Гольмий	164,94	Клеве	1880
68	Er	Эрбий	167,2	Мозандер	1843
69	Tu	Туллий	168,94	Клеве	1879
70	Yb	Иттербий	173,04	Мариньяк	1878
71	Lu	Лютеций	174,99	Урбен	1908
72	Hf	Гафний	178,6	Костер и Хевеши	1923
73	Ta	Тантал	180,95	Экеберг	1802
74	W	Вольфрам	183,92	Бр. д'Эльюар	1783
75	Re	Рений	186,31	Ноддак и Таске	1925
76	Os	Осмий	190,2	Теннант	1803
77	Ir	Иридий	192,2	Теннант	1804
78	Pt	Платина [9]	195,23	Упом. в XVI в.	
79	Au	Золото	197,0	Изв. с др.	
80	Hg	Ртуть	200,61	Упом. за III в. до н. э.	
81	Tl	Таллий	204,39	Крукс	1861
82	Pb	Свинец	207,21	Упом. Плинием	
83	Bi	Висмут	209,00	Упом. В. Валентин в XV в.	

Продолжение

Атомный номер Z	Символ	Название	Атомный вес A	Кто открыл	Год открытия
84	Po	Полоний	210	Кюри М.	1898
85	At	Астатин	210	Корзон и Мэккензи	1940
86	Rn	Радон	222	Дорн	1900
87	Fr	Франций	223	М. Перей	1939
88	Ra	Радий	226,05	Кюри М.	1898
89	Ac	Актиний	227	Дебьерн	1902
90	Th	Торий	232,05	Берцелиус	1828
91	Pa	Протактиний . . .	231	Мейтнер и Ган	1918
92	U	Уран [10]	238,07	Клапрот	1789
93	Np	Нептуний	237	Мэкмиллан и Абельсон	1940
94	Pu	Плутоний	242	Сиборг и Мэкмиллан	1940
95	Am	Америций	243	Сиборг и Джемс	1945
96	Cm	Кюрий	245	Сиборг и Джемс	1944
97	Bk	Беркелий	245	Сиборг и Томпсон	1950
98	Cf	Калифорний . . .	248	Сиборг и Томпсон	1950
99	En	Эйнштейний . . .	253		1953
100	Fm	Фермий	255		1953
101	Mv	Менделевий . . .	256		1953

Примечания к табл. 2-15. [1]) Жансен и независимо от него Локьер в 1868 г. обнаружили в спектре солнца неизвестные до того времени линии; этот новый элемент был назван *гелием*, так как предполагалось, что он находится только на солнце. Через 27 лет Рамзай и Клив обнаружили те же линии в спектре нового газа, полученного ими при анализе минерала клевеита; название гелий для этого элемента было сохранено. [2]) Еще в конце XVIII в. было известно, что при действии серной кислоты на плавиковый шпат выделяется особая кислота, которая разъедает стекло. В 1810 г. Ампер показал, что эта кислота подобна соляной и является соединением с водородом некоторого неизвестного элемента, который он назвал фтором. В чистом виде фтор удалось получить Муассану только в 1886 г. [3]) Окись магния была известна давно, ее исследовал Блэк еще в 1775 г. Деви в 1808 г. пытался получить металлический магний, но в чистом виде металл получить ему не удалось. [4]) Двуокись титана была получена лабораторным путем еще в конце XVIII в., Берцелиус получал титан, но не вполне чистый. Более чистый металлический титан был получен Грегор, затем Муассаном. [5]) Сернистые соединения мышьяка были известны в древнее время. [6]) В начале XIX в. была получена смесь ниобия и тантала, которая рассматривалась как новый элемент; ему было присвоено название колумбий. В Америке и Англии ниобий до сих пор носит наавание колумбий (стр. 267). [7]) В виде окиси церий был получен в 1803 г. [8]) Долгое время смесь празеодима и неодима считалась отдельным элементом, который назывался *дидием* (Di). [9]) Как особый металл платина была описана в 1750 г.; до 1810 г. единственным местом добычи платины была Колумбия. Затем платина была найдена в других местах, в том числе на Урале, который до настоящего времени является наиболее богатым источником ее получения. [10]) Двуокись урана, полученная впервые еще в 1789 г., была принята вначале за новый элемент. Металлический уран был получен впервые в 1842 г., его радиоактивные свойства были открыты только в 1896 г. (стр. 382).

Таблица 2-16. Латинские названия химических элементов

По древней традиции, корни которой тянутся к средним векам, все химические элементы получали свои названия на латинском языке; эта традиция не нарушается и в наше время. В начале XIX столетия для химических элементов были предложены сокращенные буквенные обозначения, которыми служили или одна начальная буква латинских названий элементов, или, значительно чаще, две буквы, начальная и одна из последующих. Так образовались современные знаки (символы) химических элементов, получившие впоследствии международное признание.

Русские названия химических элементов в большинстве представляют собой их латинские названия с измененными окончаниями в соответствии с особенностями нашего языка. Но вместе с тем можно назвать много элементов, которые имеют на русском языке особые названия, отличные от латинских. Этими названиями служат или коренные русские слова, например железо (Fe), медь (Cu), ртуть (Hg), или перевод латинского названия элемента на русский язык, например водород (H), кислород (O). Для того, чтобы в этих случаях можно было понять происхождение символов, следует сопоставить их с латинскими названиями соответствующих элементов, указанными в табл. 2-16.

Попутно в примечаниях к таблице указываются те особые названия и обозначения химических элементов, которые применяются в научной литературе ряда зарубежных стран.

Русское название	Междунар. символ	Латинское название	Русское название	Междунар. символ	Латинское название
Азот . . .	N	Nitrogenium	Железо . .	Fe	Ferrum
Актиний .	Ac	Actinium	Золото . .	Au	Aurum
Алюминий	Al	Aluminium	Индий . .	In	Indium
Америций	Am	Americium	Иод [4] . .	J	Jodum
Аргон [1] .	Ar	Argon	Иридий . .	Ir	Iridium
Астатин .	At	Astatinum	Иттербий	Yb	Ytterbium
Барий . .	Ba	Barium	Иттрий . .	Y	Yttrium
Бериллий [2]	Be	Beryllium	Кадмий . .	Cd	Cadmium
Беркелий .	Bk	Berkelium	Калий . .	K	Kalium
Бор	B	Borum	Калифорний . . .	Cf	Californium
Бром . . .	Br	Bromum	Кальций .	Ca	Calcium
Ванадий .	V	Vanadium	Кислород .	O	Oxygenium
Висмут . .	Bi	Bismutum	Кобальт .	Co	Cobaltum
Водород .	H	Hydrogenium	Кремний .	Si	Silicium
Вольфрам [3]	W	Wolframium	Криптон .	Kr	Krypton
Гадолиний	Gd	Gadolinium	Ксенон [5] .	Xe	Xenon
Галлий . .	Ga	Gallium	Кюрий . .	Cm	Curium
Гафний . .	Hf	Hafnium	Лантан . .	La	Lanthanum
Гелий . .	He	Helium	Литий . .	Li	Lithium
Германий .	Ge	Germanium	Лютеций [6]	Lu	Lutetium
Гольмий .	Ho	Holmium	Магний . .	Mg	Magnesium
Диспрозий	Dy	Dysprosium	Марганец .	Mn	Manganum
Европий .	Eu	Europium			

Продолжение

Русское название	Междунар. символ	Латинское название	Русское название	Междунар. символ	Латинское название
Медь . . .	Cu	Cuprum	Селен . .	Se	Selenium
Менделевий . . .	Mv	Mendelevium	Сера . . .	S	Sulfur
Молибден .	Mo	Molybdanum	Серебро .	Ag	Argentum
Мышьяк .	As	Arsenicum	Скандий .	Sc	Scandium
Натрий . .	Na	Natrium	Стронций .	Sr	Strontium
Неодим . .	Nd	Neodymium	Сурьма . .	Sb	Stibium
Неон . . .	Ne	Neon	Таллий . .	Tl	Thallium
Нептуний .	Np	Neptunium	Тантал . .	Ta	Tantalum
Никель . .	Ni	Niccolum	Теллур . .	Te	Tellurium
Ниобий [7]) .	Nb	Niobium	Тербий . .	Tb	Terbium
Олово . . .	Sn	Stannum	Технеций .	Tc	Technetium
Осмий . .	Os	Osmium	Титан . .	Ti	Titanium
Палладий .	Pd	Palladium	Торий . .	Th	Thorium
Платина .	Pt	Platinum	Туллий [9]) .	Tu	Thulium
Плутоний .	Pu	Plutonium	Углерод .	C	Carboneum
Полоний .	Po	Polonium	Уран . . .	U	Uranium
Празеодим	Pr	Praseodimium	Фермий .	Fm	Fermium
Прометий	Pm	Promethium	Фосфор . .	P	Phosphorus
Протактиний . . .	Pa	Protactinium	Франций [10])	Fr	Francium
Радий . . .	Ra	Radium	Фтор . . .	F	Fluorum
Радон [8]) . .	Rn	Radon	Хлор . . .	Cl	Chlorum
Рений . .	Re	Renium	Хром . . .	Cr	Chromium
Родий . .	Rh	Rhodium	Цезий . .	Cs	Cesium
Ртуть . . .	Hg	Hydrargyrum	Церий . .	Ce	Cerium
Рубидий .	Rb	Rubidium	Цинк . . .	Zn	Zincum
Рутений .	Ru	Ruthenium	Цирконий	Zr	Zirconium
Самарий .	Sm	Samarium	Эйнштейний . . .	En	Einsteinium
Свинец . .	Pb	Plumbum	Эрбий . .	Er	Erbium

Примечания к табл. 2-16. [1]) В английской и французской литературе аргон обозначается буквой A. [2]) Во французской литературе бериллий называется его прежним именем *глюциний* (Glucinum), обозначается как Gl, так и Be. [3]) В английской и французской литературе вольфрам называется *тунгстен* (tungsten и tungstène), но обозначается W. [4]) В английской и французской литературе иод обозначается I. [5]) Во французской литературе ксенон обозначается X. [6]) Лютеций назывался также *кассиопеем* (Cassiopeium) и имел обозначение Cp; это название и обозначение до настоящего времени встречается в немецкой литературе. [7]) Ниобий в английской и французской литературе называется *колумбием* (Columbium) и обозначается Cb. [8]) Радон долгое время назывался эманацией радия и обозначался Em; Rn назывался также *нитоном* (обозначение Nt), это последнее название и обозначение продолжает встречаться в английской литературе. [9]) В английской и французской литературе туллий обозначается Tm. [10]) Во французской литературе франций обозначается Fa.

Таблица 2-17. Общие свойства химических элементов и некоторых неорганических соединений

В таблице, кроме названий и химических формул неорганических соединений, даны еще их:

а) молекулярный вес (Мол. в.);

б) физическое состояние (Физ. с.) при обычных условиях температуры и давления (твердое, жидкое и газообразное — т., ж. и г.);

в) плотность (Плотн.), выраженная: для тел твердых и жидких в $г \cdot см^{-3}$ (при 20° С), а для газов в $г \cdot л^{-1}$ (при нормальных условиях, т. е. при 0° С и давлении 760 *мм* рт. ст.); если значение плотности дается при иных температурах, то последние указываются в скобках;

г) температуры плавления (Т. пл.) и кипения (Т. к.) в градусах стоградусной шкалы (° С);

д) растворимость в воде (Раств. в в.) при температуре 20° С; если растворимость дается при иных температурах, то они указываются.

Числовые данные приводятся приближенно, а именно:

1. Значения плотности — с точностью до второго или первого десятичного знака; более точные значения плотности для некоторых тел даны в табл. 2-29, 2-30 и сл.

2. Температуры плавления и кипения — с точностью до $\pm$ 1° С (иногда до $\pm$ 0,1° С); более точные значения температур плавления и кипения даны для некоторых веществ в табл. 2-64 и 2-65.

3. Растворимость в воде для многих веществ указывается числом, которое показывает: для твердых и жидких тел сколько граммов, а для газов сколько миллилитров необходимо растворить в 100 $см^3$ воды для получения насыщенного раствора при 20° С; если данные относятся к иной температуре, то она указывается в скобках. Если в литературе не имеется надежных количественных данных для растворимости, то она характеризуется только качественно: т. р. — вещество трудно растворяется, р. — растворяется, х. р. — хорошо растворяется и ∞ — неограниченно растворяется, последний знак применяется для таких тел, которые могут смешиваться с водой в любых отношениях. Тела, практически не растворимые в воде, характеризуются буквой н.

В таблице введены еще следующие сокращения: 1) вз. — возгоняется; 2) обезв. — обезвоживается; 3) рз. — разлагается (числа, которые иногда стоят при этих сокращениях, обозначают соответствующую температуру); 4) рз. в. — разлагает воду.

Неорганические соединения расположены в таблице в алфавитном порядке по названиям химических элементов. Некоторые дополнительные указания даны в примечаниях к таблице.

Название	Формула	Мол. в.	Физ. с.	Плотн.	Т. пл.	Т. к.	Раст. в в. (20° С)
Азот N	N_2	28,02	г.	1,25 *г/л*	—209,86	—195,8	1,6 *мл*
закись аз.[1])	N_2O	44,02	г.	1,98 *г/л*	—102,4	—88,5	63 *мл*
окись аз.	NO	30,01	г.	1,34 *г/л*	—163,6	—151,8	4,7 *мл*

Продолжение

Название	Формула	Мол. в.	Физ. с.	Плотн.	Т. пл.	Т. к.	Раст. в в. (20° С)
двуокись аз.[2]	NO_2	46,01	ж.(г.)	1,49 (0°)	−9,3	21,3 рз.	рз.
азотистый ангидрид	N_2O_3	76,02	г.(ж.)	1,45 (2°)	−102	3,5 рз.	р.
азотный ангидрид	N_2O_5	108,02	т.	1,64	вз. 30	рз.	рз.
аммиак	NH_3	17,03	г.	0,77 *г/л*	−77,7	−33,4	51,7 *г*
аммоний азотистокислый	NH_4NO_2	64,05	т.	1,69	рз.	—	х. р.
» азотнокислый	NH_4NO_3	80,05	т.	1,73	169,6	рз. 210	178
» бромистый	NH_4Br	97,96	т.	2,4	рз.	вз.	77,5
» двууглекислый	NH_4HCO_3	79,06	т.	1,58	рз.	вз.	21,6
» сернокислый	$(NH_4)_2SO_4$	132,15	т.	1,77	рз.	—	75,4
» углекислый	$(NH_4)_2CO_3$	96,09	т.	—	рз. 58	—	100 (15°)
» хлористый	NH_4Cl	53,50	т.	1,53	вз. 335	—	37,5
Алюминий Al	—	26,98	т.	2,7	660,1	2330	н.
окись ал.[3]	Al_2O_3	101,94	т.	3,5—4,0	2050	> 3000	н.
гидроокись ал.	$Al(OH)_3$	78,00	т.	2,4—2,5	обезв.	—	н.
бромистый ал.	$AlBr_3 \cdot 6H_2O$	374,82	т.	2,54	93	рз. > 100	р.
сернокислый ал.	$Al_2(SO_4)_3$	342,16	т.	2,71	рз. 770	—	36,2
хлористый ал.	$AlCl_3 \cdot 6H_2O$	241,45	т.	2,4	вз.	—	46
карбид ал.	Al_4C_3	143,95	т.	2,36	рз. > 1400	—	рз. в.
ал.-калиевые квасцы	$AlK(SO_4)_2 \cdot 12H_2O$	474,39	т.	1,75	обезв.	—	11,4
Аргон Ar	—	39,944	г.	1,78 *г/л*	−189,2	−185,9	3,4 *мл*
Барий Ba[4]	—	137,36	т.	3,5	704	1600	рз. в.
окись б.	BaO	153,36	т.	5,7	1923	ок. 2000	рз.
перекись б.	BaO_2	169,36	т.	5,0	450	—	т. р.
азотнокислый б.	$Ba(NO_3)_2$	261,38	т.	3,24	592	рз.	8,7
сернокислый б.	$BaSO_4$	233,43	т.	4,5	1580	—	$2{,}2 \cdot 10^{-4}$
хлористый б.	$BaCl_2$	208,27	т.	3,8	962	1560	36,0
Бериллий Be	—	9,013	т.	1,85	1300	2770	н.
окись бер.	BeO	25,01	т.	3,01	2530	ок. 3900	н.
карбид б.	Be_2C	30,04	т.	1,9	рз. > 2100	—	рз.
хлористый б.	$BeCl_2$	79,93	т.	1,9	440	520	х. р.
Бор B	—	10,82	т.	2,3	2100	2550	н.
борный ангидрид[5]	B_2O_3	69,64	т.	1,84	ок. 570	—	рз.

Продолжение

Название	Формула	Мол. в.	Физ. с.	Плотн.	Т. пл.	Т. к.	Раст. в в. (20° С)
карбид б.	B_4C	55,29	т.	2,5	2450	>3500	н.
хлористый б.	BCl_3	117,19	ж.	1,43	—107	12,5	рз.
борная кислота	H_3BO_3	61,84	т.	1,44	рз.>70	—	5
Бром Br	Br_2	159,83	ж.	3,1	—7,2	58,8	3,6
Ванадий V	—	50,95	т.	5,96	1730	ок. 3000	н.
трехокись в.	V_2O_3	149,90	т.	4,87	1970	—	т. р.
пятиокись в.	V_2O_5	181,90	т.	3,35	690	рз. 1750	0,8
карбид в.	VC	62,96	т.	5,77	2810	3900	н.
Висмут Bi	—	209,00	т.	9,8	271,3	1420	н.
окись в.	Bi_2O_3	466,0	т.	8,2—8,9	820	1890(?)	н.
бромистый в.	$BiBr_3$	448,75	т.	5,7	218	453	рз.
хлористый в.	$BiCl_3$	315,37	т.	4,75	230	447	рз.
Водород H	H_2	2,016	г.	0,09 *г/л*	—259,2	—252,8	1,8 *мл*
вода	H_2O	18,02	ж.	1,00	0	100	—
тяжелая вода [6])	D_2O	20,03	ж.	1,11	3,82	101,42	∞
перекись в.	H_2O_2	34,02	ж.	1,46	—1,7	152,1	∞
бромистый в.	HBr	80,92	г.	3,5 *г/л*	—88,5	—67,0	ок. 200 *г*
иодистый в.	HI	127,92	г.	5,65 *г/л*	—50,8	—35,4	42,5 *мл*(10°)
фтористый в.	HF	20,01	г.(ж.)	0,92 *г/л*	—92,3	19,4	∞
хлористый в.	HCl	36,47	г.	1,64 *г/л*	—112	—83,7	72,1
азотная кислота [7])	HNO_3	63,02	ж.	1,53	—41,3	рз. 86	∞
серная кислота	H_2SO_4	98,08	ж.	1,83	10,5	рз. 338	∞
сероводород	H_2S	34,08	г.	1,54 *г/л*	—82,9	—61,8	ок.250 *мл*
Вольфрам W	—	183,92	т.	19,3	3380	ок. 6000	н.
двуокись в.	WO_2	215,92	т.	12,1	ок. 1600	—	н.
трехокись в.	WO_3	231,92	т.	7,2	1473	—	н.
карбид в.	WC	195,93	т.	15,7	2770	ок. 6000	н.
карбид в. (дву-)	W_2C	379,85	т.	17,15	2860	ок. 6000	н.
хлористый в. (шести-)	WCl_6	396,66	т.	3,52	275	347	рз.

Продолжение

Название	Формула	Мол. в.	Физ. с.	Плотн.	Т. пл.	Т. к.	Раст. в в. (20° С)
Гадолиний Gd	—	156,9	т.	—	—	—	—
окись гадол.	Gd_2O_3	361,80	т.	7,41	—	—	т. р.
азотнокислый гадол.	$Gd(NO_3)_3 \cdot 5H_2O$	433,00	т.	2,4	92	—	х. р.
сернокислый гадол.	$Gd_2(SO_4)_3 \cdot 8H_2O$	746,13	т.	3,01	—	—	р.
Галлий Ga	—	69,72	т.	5,9	29,8	2100	н.
окись галл.	Ga_2O_3	187,44	т.	5,9	1900	—	н.
хлористый галл.	$GaCl_3$	176,09	т.	2,47	78	205	х. р.
Гафний Hf	—	178,6	т.	13,3	ок. 2000	>3200	н.
двуокись гаф.	HfO_2	210,60	т.	9,7	2810	—	н.
карбид гаф.	HfC	190,61	т.	—	3887	—	—
Гелий He	—	4,003	г.	0,18 *г/л*	—272,2	—268,9	ок. 1 *мл*
Германий Ge	—	72,60	т.	5,35	958,5	2700	н.
двуокись гер.	GeO_2	104,60	т.	ок. 5,0	1115	—	0,45
четыреххлористый гер.	$GeCl_4$	214,43	ж.	1,88	—49,5	83,0	рз.
Гольмий Ho	—	164,94	т.	—	—	—	—
Диспрозий Dy	—	162,46	—	—	—	—	—
окись д.	Dy_2O_3	372,92	т.	7,81	—	—	—
хлористый д.	$DyCl_3$	268,83	т.	3,67	680	—	р.
Европий Eu	—	152,00	т.	—	—	—	н.
окись ев.	Eu_2O_3	352,00	т.	ок. 7,0	—	—	—
хлористый ев.	$EuCl_3$	258,37	т.	—	623	—	—
Железо Fe	—	55,85	т.	7,9	1535	2800	н.
закись ж.	FeO	71,85	т.	5,7	1420	—	н.
окись ж.	Fe_2O_3	159,70	т.	5,24	1565	—	н.
закись-окись ж.[8])	Fe_3O_4	231,55	т.	5,1—5,4	1538 рз.	—	н.
азотнокислое ж.	$Fe(NO)_3 \cdot 9H_2O$	404,02	т.	1,68	47,2	рз.	р.
сернокислое ж.	$Fe_2(SO_4)_3 \cdot 9H_2O$	562,04	т.	2,1	обезв.	—	440
хлористое ж.	$FeCl_2$	126,76	т.	2,98	670	вз.	64,4 (10°)
хлорное ж.	$FeCl_3$	162,22	т.	2,8	282	315	92

Продолжение

Название	Формула	Мол. в.	Физ. с.	Плотн.	Т. пл.	Т. к.	Раст. в в. (20° С)
сернистое ж.	FeS	87,92	т.	4,8	1193	рз.	т. р.
двусернистое ж. (пирит)	FeS_2	119,98	т.	4,9	1171	рз.	т. р.
карбид ж.	Fe_3C	179,56	т.	7,4	1837	—	н.
Золото Au [9]	—	197,0	т.	19,3	1063	2660	н.
хлорное золото	$AuCl_3$	303,37	т.	3,9	рз. 254	—	68
Индий In	—	114,76	т.	7,3	156,4	2100	н.
бромистый ин.	InBr	194,68	т.	4,96	220	662	рз.
хлористый ин.	InCl	150,22	т.	4,19	225	550	рз.
Иод J [10]	I_2	253,82	т.	4,93	113,5	184,4	0,029
бромистый иод	IBr	206,83	т.	4,4	42	рз. 59	рз.
хлористый иод	ICl	162,37	т.	3,2	25	рз. 97	рз.
Иридий Ir	—	192,2	т.	22,4	2443	4350	н.
треххлористый ир.	$IrCl_3$	298,57	т.	5,3	рз. 763	—	н.
четырехбромистый ир.	$IrBr_4$	512,76	т.	—	рз.	—	р., рз.
Иттербий Yb	—	173,04	т.	—	824	1800	рз. в.
Иттрий Y	—	88,92	т.	5,5	1490	4100	рз.
Кадмий Cd	—	112,41	т.	8,65	320,9	766	н.
окись кадмия	CdO	128,41	т.	7,0	рз. 900	—	т. р.
азотнокислый к.	$Cd(NO_3)_2 \cdot 4H_2O$	308,49	т.	2,46	100	132	127
сернокислый к.	$CdSO_4$	208,48	т.	4,7	1000	—	75
углекислый к.	$CdCO_3$	172,42	т.	4,26	рз.	—	н.
бромистый к.	$CdBr_2$	272,24	т.	5,2	567	963	95
хлористый к.	$CdCl_2$	183,32	т.	4,05	568	960	140
Калий K	—	39,10	т.	0,86	63	760	рз. в.
гидроокись к. (едкое к.)	KOH	56,11	т.	2,04	360	1320	110
азотнокислый к.	KNO_3	101,11	т.	2,1	334	рз. 400	31,6
сернокислый к.	K_2SO_4	174,27	т.	2,7	1076	—	12(25°)
углекислый к.	K_2CO_3	138,21	т.	2,4	891	рз.	112
двууглекислый к.	$KHCO_3$	100,12	т.	2,2	рз.>100	—	32

Продолжение

Название	Формула	Мол. в.	Физ. с.	Плотн.	Т. пл.	Т. к.	Раст. в в. (20° С)
бромистый к.	KBr	119,02	т.	2,75	730	1380	65,2
хлористый к.	KCl	74,56	т.	1,98	776	вз. 1500	34,7
Кальций Ca	—	40,08	т.	1,55	850	1440	рз. в.
окись к.	CaO	56,08	т.	3,4	2572	2850	рз.
гидроокись к.	$Ca(OH)_2$	74,10	т.	2,3	обезв.	—	0,16
азотнокислый к.	$Ca(NO_3)_2$	164,10	т.	2,36	561	—	341 (29°)
сернокислый к.[11])	$CaSO_4$	136,15	т.	ок. 3,0	—	—	0,2
бромистый к.	$CaBr_2$	199,91	т.	3,35	765	806—812	125 (0°)
хлористый к.	$CaCl_2$	110,99	т.	2,3	772	>1600	74
карбид к.[12])	CaC_2	64,10	т.	2,22	ок. 2000	—	рз.
Кислород O	O_2	32	г.	1,43 *г/л*	—218,8	—182,970	3,1 *мл*
озон	O_3	48	г.	2,14 *г/л*	—251	—112	49 *мл* (0°)
Кобальт Co	—	58,94	т.	8,7	1492	3000	н.
окись коб.	Co_3O_3	165,88	т.	5,18	рз. 895	—	н.
азотнокислый коб.	$Co(NO_3)_2 \cdot 6H_2O$	291,05	т.	1,87	обезв. 55	—	134 (0°)
сернокислый коб.	$CoSO_4$	155,01	т.	3,71	989	—	36,2
хлористый коб.	$CoCl_2$	129,85	т.	3,36	вз.	—	х. р.
Кремний Si	—	28,09	т.	2,4	1440	2600	н.
двуокись кр.[13])	SiO_2	60,09	т.	2,65	1728	2230	н.
четыреххлористый кр.	$SiCl_4$	169,92	ж.	1,48	—70	59,6	рз.
карбид кр.	SiC	40,10	т.	3,2	—	рз. >2000	н.
Криптон Kr	—	83,80	г.	3,71 *г/л*	—157	—153,2	6,3 *мл*
Ксенон Xe	—	131,3	г.	5,85 *г/л*	—112	—108,1	12,3 *мл*
Лантан La	—	138,92	т.	6,15	920	1800	рз. в.
окись л.	La_2O_3	325,84	т.	6,5	>2000	4200	т. р.
азотнокислый л.	$La(NO_3)_3 \cdot 6H_2O$	433,04	т.	—	40	рз. 126	151 (25°)
сернокислый л.	$La_2(SO_4)_3$	566,04	т.	3,6	рз.	—	3
хлористый л.	$LaCl_3$	245,29	т.	3,84	872	—	х. р.
Литий Li	—	6,94	т.	0,53	186	1380	рз. в.
гидроокись л.	LiOH	23,95	т.	1,43	450	рз.	12,7 (0°)
азотнокислый л.	$LiNO_3$	68,95	т.	2,38	261	—	х. р.

Продолжение

Название	Формула	Мол. в.	Физ. с.	Плотн.	Т. пл.	Т. к.	Раст. в в. (20° С)
сернокислый л.	Li_2SO_4	109,95	т.	2,22	860	—	26 (0°)
хлористый л.	LiCl	42,40	т.	2,07	613	1353	х. р.
Лютеций Lu	—	174,99	т.	—	—	—	—
хлористый лют.	$LuCl_3$	281,36	—	3,98	892	—	—
Магний Mg	—	24,32	т.	1,7	650	1100	рз. в.
окись м.	MgO	140,32	т.	3,65	2800	—	т. р.
сернокислый м.	$MgSO_4$	20,39	т.	2,66	рз. 1124	—	26 (0°)
углекислый м. [14]	$MgCO_3$	84,33	т.	3,04	рз. 350	—	т. р.
хлористый м.	$MgCl_2$	95,23	т.	2,33	708	1412	54,3
Марганец Mn	—	54,94	т.	7,4	1260	2150	рз.
закись м.	MnO	70,94	т.	5,2	1650	—	н.
двуокись м.	MnO_2	186,94	т.	5,03	рз. >535	—	н.
сернокислый м.	$MnSO_4$	151,01	т.	3,25	700	рз. 850	64
углекислый м.	$MnCO_3$	114,95	т.	3,1	рз.	—	т. р.
хлористый м.	$MnCl_2$	25,85	т.	2,98	650	1190	62 (10°)
Медь Cu	—	163,54	т.	8,9	1083	2582	н.
закись м.	Cu_2O	43,08	т.	6,0	1235	рз. 1800	н.
окись м.	CuO	279,54	т.	6,4	рз. 1026	—	н.
азотнокислая м. (гидр.)	$Cu(NO_3)_2 \cdot 3H_2O$	141,60	т.	2,05	114,5	рз.	х. р.
сернокислая м.	$CuSO_4$	259,61	т.	3,6	200	рз. 650	14,3 (0°)
сернокислая м. (гидр.)	$CuSO_4 \cdot 5H_2O$	49,69	т.	2,28	обезв.	—	20,7 (обезв.)
хлористая м.	CuCl	199,00	т.	3,53	422	1366	тр. р.
хлорная м.	$CuCl_2$	34,45	т.	3,05	498	рз. 993	70,6 (0°)
Молибден Mo	—	195,95	т.	10,2	2625	4800	н.
ангидрид м.	MoO_3	143,95	т.	4,6	795	вз.	0,1
карбид м.	MoC	207,96	т.	8,8	2692	—	н.
пятихлористый м.	$MoCl_5$	73,24	т.	2,93	194	268	рз.
Мышьяк As [15]	—	174,91	т.	5,7	814 (36 атм.)	вз. 610	н.
ангидрид мышьяк.	As_2O_3	97,82	т.	3,9	вз.	—	2,0 (25°)
водород мышьяк (арсин)	AsH_3	177,93	г.	3,48 *г/л*	—113,5	—55	20 *мл*
хлористый м.	$AsCl_3$	81,28	ж.	2,16	—18	130,2	рз.
Натрий Na	—	22,99	т.	0,97	97,7	883	рз. в.
гидроокись н. (едкий н.)	NaOH	40,00	т.	2,13	318,4	1390	42 (0°)

Продолжение

Название	Формула	Мол. в.	Физ. с.	Плотн.	Т. пл.	Т. к.	Раст. в в. (20° С)
перекись н.	Na_2O_3	77,98	т.	2,81	460 рз.	рз.	рз.
азотнокислый н.	$NaNO_3$	85,00	т.	2,26	308	рз. 380	73 (0°)
сернокислый н.	Na_2SO_4	142,05	т.	2,70	884	рз. 1430	4,8 (0°)
» » (гидр.)	$Na_2SO_4 \cdot 10H_2O$	322,21	т.	1,46	обезв. 32,4	—	19,4
серноватистокислый н.	$Na_2S_2O_3 \cdot 5H_2O$	248,19	т.	1,69	48	рз. 220	74,7 (0°)
углекислый н.	Na_2CO_3	105,99	т.	2,53	851	рз.	21,5
двууглекислый н.	$NaHCO_3$	84,01	т.	2,20	рз. 270	—	6,9 (0°)
бромистый н.	NaBr	102,90	т.	3,21	751	1390	90,5
хлористый н.	NaCl	58,44	т.	2,16	804	1413	36
тетраборнокислый н. (бура)	$Na_2B_4O_7 \cdot 10H_2O$	381,42	т.	1,73	75, рз.	обезв. 200	1,3 (0°)
Неодим Nd	—	141,27	т.	7,05	1024	—	рз.
окись н.	Nd_2O_3	336,54	т.	7,24	—	—	т. р.
хлористый н.	$NdCl_3$	250,643	т.	4,13	784	—	ок. 100
Неон Ne	—	20,18	г.	0,90 *г/л*	—248,7	—246,1	ок. 1,0 *мл*
Никель Ni	—	58,69	т.	8,9	1453	2800	н.
закись н.	NiO	74,69	т.	7,45	1990	—	н.
окись н.	Ni_2O_3	165,38	т.	4,83	рз. 600	—	н.
азотнокислый н. (гидр.)	$Ni(NO_3)_2 \cdot 6H_2O$	290,80	т.	2,05	56,7	—	238,5 (0°)
сернокислый н.	$NiSO_4$	154,76	т.	3,68	рз. 840	—	29,3 (0°)
» » (гидр.)	$NiSO_4 \cdot 7H_2O$	280,87	т.	1,9	обезв.	—	75,6 (15°)
хлористый н.	$NiCl_2$	129,60	т.	3,55	вз.	—	64,2
тетракарбонил н.	$Ni(CO)_4$	170,73	ж	1,32	—25	43	т. р.
Ниобий Nb	—	92,91	т.	8,6	2415	3300	н.
пятиокись н.	Nb_2O_5	265,82	т.	4,47	1520	—	н.
пятихлористый н.	$NbCl_5$	270,20	т.	2,75	194	240,5	рз.
карбид н.	NbC	104,91	т.	7,82	ок. 3900	—	н.
Олово Sn [16]	—	118,70	т.	7,3	231,9	2337	н.
двуокись ол.	SnO_2	150,70	т.	6,95	рз. 1127	—	н.
сернокислое ол.	$SnSO_4$	214,77	т.	—	рз. 360	—	19
двухлористое ол.	$SnCl_2$	189,61	т.	3,39	246	623	270 (15°) рз.
четыреххлористое ол.	$SnCl_4$	260,53	ж.	2,23	—33	114,1	р., рз.

Продолжение

Название	Формула	Мол. в.	Физ. с.	Плотн.	Т. пл.	Т. к.	Раст. в в. (20° С)
Осмий Os	—	190,2	т.	22,5	2700	4400	н.
четырехокись ос.	OsO_4	254,20	т.	4,9	39,5	130	ок. 6
Палладий Pd	—	106,7	т.	11,9	1552	3560	н.
Платина Pt	—	195,23	т.	21,45	1769	4000	н.
хлорная п.	$PtCl_4$	337,06	т.	—	рз. 370	—	х. р., рз.
Полоний Po	—	210	т.	—	1785	—	—
Празеодим Pr	—	140,92	т.	6,6	932	—	рз.
Радий Ra	—	226,05	т.	5	700	1140	рз. в.
бромистый р.	$RaBr_2$	385,88	т.	5,79	728	—	р.
хлористый р.	$RaCl_2$	296,96	т.	4,91	1000	—	р.
Радон Rn	—	222	г.	9,73 *г/л*	—71	—62	23,8 *мл*
Рений Re	—	186,31	т.	20,5	3167	—	—
ангидрид р.	Re_2O_7	484,62	т.	8,2	ок. 220	вз. 450	х. р.
Родий Rh	—	102,91	т.	12,4	1960	3960	н.
окись р.	Rh_2O_3	253,82	т.	—	рз. ок. 1100	—	н.
Ртуть Hg	—	200,61	ж.	13,55	—38,87	356,58	н.
окись р.	HgO	216,61	т.	11,14	рз. 500	—	т. р.
азотнокислая р. (ок., гидр.)	$Hg(NO_3)_2 \cdot 1/_2H_2O$	333,63	т.	4,39	79	рз.	х. р.
сернокислая р. (зак.)	Hg_2SO_4	497,29	т.	7,56	рз.	—	0,06 (25°)
хлористая р. (каломель)	Hg_2Cl_2	472,14	т.	7,15	вз. 400	—	т. р.
хлорная р. (сулема)	$HgCl_2$	271,52	т.	5,42	275	301	6,5
сернистая р. (киноварь)	HgS	232,68	т.	8,10	вз. 583,5	—	т. р.
Рубидий Rb	—	85,48	т.	1,53	38,8	679	рз. в.
перекись р.	RbO_2	117,48	т.	3,05	280	—	рз.
азотнокислый р.	$RbNO_3$	147,49	т.	3,11	313	—	34,8
сернокислый р.	Rb_2SO_4	267,03	т.	3,61	1060	—	42,4 (10°)
углекислый р.	Rb_2CO_3	230,97	т.	—	837	рз. 740	450
хлористый р.	RbCl	120,94	т.	2,76	715	1390	91,2

Продолжение

Название	Формула	Мол. в.	Физ. с.	Плотн.	Т. пл.	Т. к.	Раст. в в. (20° С)
Рутений Ru	—	101,1	т.	12,2	2450	4110	н.
четырехокись р.	RuO_4	165,70	т.	3,29	25,5	рз. 100	2,0
треххлористый р.	$RuCl_3$	208,07	т.	3,11	рз. >500	—	н.
Самарий Sm	—	150,43	т.	7,7	1052	—	—
треххлористый с.	$SmCl_3$	256,80	т.	4,46	678	—	92,4 (10°)
Свинец Pb	—	207,21	т.	11,3	327,3	1750	н.
окись с. (глет)	PbO	223,21	т.	9,53	888	—	т. р.
закись-окись с. (сурик)	Pb_3O_4	685,63	т.	9,1	рз. 500	—	н.
двуокись с.	PbO_2	239,21	т.	9,38	рз. 290	—	н.
азотнокислый с.	$Pb(NO_3)_2$	331,23	т.	4,53	рз. 357	—	56,5
сернокислый с.	$PbSO_4$	303,28	т.	6,2	рз. 1000	—	т. р.
хлористый с.	$PbCl_2$	278,12	т.	5,85	501	950	0,99
углекислый с.	$PbCO_3$	267,22	т.	6,6	рз. 315	—	т. р.
Селен Se	—	78,96	т.	4,8	220	685	н.
двуокись с.	SeO_2	110,96	т.	3,95	340 (давл.)	вз.	38,4 (14°)
четыреххлористый с.	$SeCl_4$	220,79	т.	3,78	рз. 288	—	р.
Сера S [17]	—	32,066	т.	2,1	112,8	444,600	п.
двуокись с. (сернистый газ)	SO_2	64,07	г.	2,93 *г/л*	—72,7	—10,1	3937 *мл*
трехокись с. (серный ангидрид)	SO_3	80,07	т. (ж.)	2,75 (1,9)	16,83	44,8	рз.
хлористая с.	S_2Cl_2	135,05	ж.	1,68	—80	135,6	рз.
хлористый тионил	$SOCl_2$	118,98	ж.	1,65	—105	78,8	рз.
Серебро Ag	—	107,88	т.	10,5	960,8	2193	н.
окись с.	Ag_2O	231,76	т.	7,14	рз. 300	—	т. р.
азотнокислое с.	$AgNO_3$	169,89	т.	4,35	212	444 рз.	222
сернокислое с.	Ag_2SO_4	311,83	т.	5,45	652	рз. 1085	0,57 (0°)
хлористое с.	AgCl	143,34	т.	5,56	455	1550	т. р.
бромистое с.	AgBr	187,80	т.	6,47	434	рз. 700	т. р.
Скандий Sc	—	44,96	т.	2,5	1400	3900	рз.
хлористый с.	$ScCl_3$	151,33	т.	—	939	—	х. р.

Продолжение

Название	Формула	Мол. в.	Физ. с.	Плотн.	Т. пл.	Т. к.	Раст. в в. (20° С)
Стронций Sr	—	87,63	т.	2,6	770	1360	рз. в.
окись с.	SrO	103,63	т.	4,7	2430	—	рз.
гидроокись с.	$Sr(OH)_2$	121,65	т.	3,63	375	—	0,41 (0°)
азотнокислый с.	$Sr(NO_3)_2$	211,65	т.	2,99	570	—	40 (0°)
сернокислый с.	$SrSO_4$	183,70	т.	3,96	рз. 1580	—	т. р.
углекислый с.	$SrCO_3$	147,64	т.	3,70	рз. 1340	—	т. р.
хлористый с. (гидр.)	$SrCl_2 \cdot 6H_2O$	266,64	т.	1,93	обезв.	—	52,9
Сурьма Sb	—	121,76	т.	6,6	630,5	1440	н.
трехокись с.[18])	Sb_2O_3	291,52	т.	5,2	656	вз. 1550	т. р.
пятиокись с.	Sb_2O_5	323,52	т.	3,78	рз.	—	н.
трехбромистая с.	$SbBr_3$	361,51	т.	4,15	96,6	280	рз.
трехххлористая с.	$SbCl_3$	228,13	т.	3,14	73	223	602 (0°)
пятихлористая с.	$SbCl_5$	299,05	ж.	2,34	2,8	140 рз.	рз.
трехсернистая с.	Sb_2S_3	339,72	т.	4,64	550	—	т. р.
сурмянистый водород	SbH_3	124,78	г.	5,3 *г/л*	—88	рз. —17	20 *мл* (0°)
Таллий Tl	—	204,39	т.	11,85	304	1457	н.
окись т.	Tl_2O_3	456,78	т.	10,19	717	рз. 875	н.
азотнокислый т.	$TlNO_3$	266,40	т.	5,56	206	430	9,6
сернокислый т.	Tl_2SO_4	504,85	т.	6,77	632	рз.	4,9
углекислый т.	Tl_2CO_3	468,79	т.	7,11	273	—	4 (15°)
хлористый т.	TlCl	239,85	т.	7,00	430	720	0,32
Тантал Ta	—	180,95	т.	16,6	3000	>4100	н.
пятиокись т.	Ta_2O_5	441,90	т.	8,73	1470 рз.	—	н.
пятихлористый т.	$TaCl_5$	358,24	т.	3,68	221	242	рз.
карбид т.	TaC	192,96	т.	14,65	3880	5500	н.
Теллур Te	—	127,61	т.	6,24	452	1007	н.
двуокись т.	TeO_2	159,61	т.	5,7—5,9	вз. 450	—	т. р.
двухлористый т.	$TeCl_2$	198,52	т.	7,05	209	327	рз.
Тербий Tb	—	158,93	т.	—	1450	—	—
хлористый т.	$TbCl_3$	265,30	т.	4,35	588	—	р.

Продолжение

Название	Формула	Мол. в.	Физ. с.	Плотн.	Т. пл.	Т. к.	Раст. в в. (20° С)
Титан Ti	—	47,90	т.	4,5	1660	>3000	н.
двуокись т.	TiO_2	79,90	т.	3,8—4,2	рз. 1640	—	н.
четырехбромистый т.	$TiBr_4$	367,56	т.	2,6	39	230	рз.
четыреххлористый т.	$TiCl_4$	189,73	ж.	1,73	—30	136,4	рз.
карбид т.	TiC	59,91	т.	4,93	3140	4300	н.
Торий Th	—	232,05	т.	11,5	1840	3500	н.
двуокись т.	ThO_2	264,05	т.	9,69	>2800	4400	н.
хлористый т.	$ThCl_4$	373,88	т.	4,59	вз. 820	рз. 1100	х. р.
карбид т.	ThC_2	256,07	т.	8,96	2773	5000	рз.
Туллий Tu	—	168,94	т.	—	—	3500	н.
Углерод C	—	12,011	т.	2,3	вз. ок. 4000	—	н.
окись угл.	CO	28,01	г.	1,25 *г/л*	—207	—192	2,3 *мл*
двуокись угл. (углекислый газ)	CO_2	44,01	г.	1,97 *г/л*	—	вз. —78,5	87,8 *мл*
сероуглерод	CS_2	76,14	ж.	1,29	—111	46,3	0,22 (22°)
четыреххлористый угл.	CCl_4	153,84	ж.	1,59	—23	76,8	т. р.
хлорокись угл. (фосген)	$COCl_2$	98,92	г.	1,39 (ж.)	—104	8,3	рз.
Уран U	—	238,07	т.	18,7	1132	—	н.
двуокись ур.	UO_2	270,07	т.	10,5	2176	—	н.
трехокись ур.	UO_3	286,07	т.	5,92	рз.	—	н.
четыреххлористый ур.	UCl_4	379,90	т.	4,73	вз.	—	х. р.
карбид ур.	UC_2	262,09	т.	11,3	2260	4100	рз.
азотнокислый уранил	$UO_2(NO_3)_2 \cdot 6H_2O$	502,18	т.	2,8	59	118	170 (0°)
хлористый уранил	UO_2Cl_2	340,98	т.	—	рз.	—	320 (18°)
Фосфор P (белый)	—	30,975	т.	1,82	44,1	282	т. р.
фосфорный ангидрид	P_2O_5	141,96	т.	2,39	563	—	рз.
трехбромистый ф.	PBr_3	270,73	ж.	2,85	—40	172,9	рз.
треххлористый ф.	PCl_3	137,35	ж.	1,57	—111,8	73,5	рз.
пятихлористый ф.	PCl_5	208,27	т.	2,1	—	вз. 162	рз.
фосфористый водород	PH_3	34,00	г.	1,53 *г/л*	—135.5	—87,4	26 *мл* (17°)

Продолжение

Название	Формула	Мол. в.	Физ. с.	Плотн.	Т. пл.	Т. к.	Раст. в в. (20° С)
Фтор F	—	19,00	г.	1,70 *г/л*	—223	—187,9	рз. в.
окись ф.	F_2O	54,00	г.неуст.	1,9 (—224)	—223,8	—144,8	рз.
Хлор Cl	—	35,457	г.	3,21 *г/л*	—101	—34,1	226
окись хл.	Cl_2O	86,91	г.	3,89 *г/л*	—20	взр. 3,8	200 *мл*
двуокись хл.	ClO_2	67,46	г.	3,09 *г/л*	—59	взр. ок. 100	2000 *мл* (4°)
Хром Cr	—	52,01	т.	7,1	1800	2300	н.
окись хр.	Cr_2O_3	152,02	т.	5,21	1990	—	н.
трехокись хр.	CrO_3	100,01	т.	2,70	196	рз.	166 (15°)
азотнокислый хр. (гидр.)	$Cr(NO_3)_3 \cdot 9H_2O$	400,18	т.	—	37	рз. 125,5	р.
хлорокись хр.	CrO_2Cl_2	154,92	ж.	1,91	—96,5	117	рз.
Цезий Cs	—	132,91	т.	1,9	29,7	690	рз. в.
гидроокись ц.	CsOH	149,92	т.	3,68	272	—	396 (15°)
азотнокислый ц.	$CsNO_3$	194,92	т.	3,69	414	рз.	14,9 (10°)
сернокислый ц.	Cs_2SO_4	361,89	т.	4,24	1010	—	167 (0°)
хлористый ц.	CsCl	168,37	т.	3,97	646	вз. 1290	185,7
углекислый ц.	Cs_2CO_3	325,83	т.	—	рз. 610	—	260,5 (15°)
Церий Ce	—	140,13	т.	6,9	804	1400	н.
окись ц.	Ce_2O_3	328,26	т.	6,9—7,0	1692 (?)	—	н.
двуокись ц.	CeO_2	172,13	т.	7,3	1950	—	н.
сернокислый ц.	$Ce_2(SO_4)_3$	568,46	т.	3,91	—	—	10 (0°)
хлористый ц.	$CeCl_3$	246,50	т.	3,92	848	рз.	х. р.
Цинк Zn	—	65,38	т.	7,1	419,5	907	н.
окись ц.	ZnO	81,38	т.	5,6	вз. 1800	—	т. р.
гидроокись ц.	$Zn(OH)_2$	99,40	т.	3,05	рз. 125	—	т. р.
азотнокислый ц. (гидр.)	$Zn(NO_3)_2 \cdot 6H_2O$	297,49	т.	2,07	36,4	обезв.	184,3
сернокислый ц. (гидр.)	$ZnSO_4 \cdot 7H_2O$	287,56	т.	1,97	обезв. 280	—	96,5
углекислый ц.	$ZnCO_3$	125,39	т.	4,4	рз. 300	—	т. р.
хлористый ц.	$ZnCl_2$	136,29	т.	2,9	262	732	432 (25°)

Продолжение

Название	Формула	Мол. в.	Физ. с.	Плотн.	Т. пл.	Т. к.	Раст. в в. (20° С)
Цирконий Zr	—	91,22	т.	6,4	1860	>2900	н.
двуокись ц.	ZrO_2	123,22	т.	5,7	ок. 3000	—	н.
азотнокислый ц. (гидр.)	$Zr(NO_3)_4 \cdot 5H_2O$	429,33	т.	—	рз. 100	—	р.
сернокислый ц. (гидр.)	$Zr(SO_4)_2 \cdot 4H_2O$	355,41	т.	—	обезв.	—	х. р.
четыреххлористый ц.	$ZrCl_4$	233,05	т.	2,8	вз. 300	—	рз.
карбид ц.	ZrC	103,23	т.	6,73	3540	5100	н.
Эрбий Er	—	167,2	т.	4,8	—	—	—
окись эр.	Er_2O_3	382,40	т.	8,64	—	—	т. р.
сернокислый эр. (гидр.)	$Er_2(SO_4)_3 \cdot 8H_2O$	766,73	т.	3,2	обезв. 400	—	16
Некоторые металлоорганические соединения							
Алюминийтриметил	$Al(CH_3)_3$	72,07	ж.	—	0	130	рз. в.
Борнометиловый эфир	$B(OCH_3)_3$	103,92	ж.	0,915	—29	68,7	рз.
Борноэтиловый эфир	$B(OC_2H_5)_3$	146,01	ж.	0,8746	—	117,4	рз.
Бортриметил	$B(CH_3)_3$	55,92	г.	1,9108 *г/л*	—161,5	—20,2	т. р.
Бортриэтил	$B(C_2H_5)_3$	98,01	ж.	0,6961	—92,9	—	н.
Висмуттриметил	$Bi(CH_3)_3$	254,10	ж.	2,300	—	110	н.
Висмуттриэтил	$Bi(C_2H_5)_3$	296,18	ж.	1,82	—	107	н.
Галлийтриэтил	$Ga(C_2H_5)_3$	156,90	ж.	1,0576	—82,3	142,6	рз.
Германийтетраметил	$Ge(CH_3)_4$	132,74	ж.	1,006	—3	138—40	—
Германийтетраэтил	$Ge(C_2H_5)_4$	188,84	ж.	1,198	—90	162,5	рз.
Германийтриметил бромистый	$Ge(CH_3)_3Br$	197,62	ж.	1,544	—25	113,7	рз.
Индийтриметил	$In(CH_3)_3$	159,86	т.	1,568	89,0—8	вз.	рз.
Кадмийдиамил (изо-)	$Cd(C_5H_{11})_2$	254,69	ж.	1,2210	—115	121,5	—
Кадмийдибутил	$Cd(C_4H_9)_2$	226,64	ж.	1,3056	—48	103,5	рз.
Кадмийдиметил	$Cd(CH_3)_2$	142,46	ж.	1,9846	—4,5	105,5	рз.
Кадмийдиэтил	$Cd(C_2H_5)_2$	170,53	ж.	1,6564	—21	64	рз.
Кремнийтетраметил	$Si(CH_3)_4$	88,20	ж.	0,651	—	26,5	—
Сурьматриметил	$Sb(CH_3)_3$	166,86	ж.	1,526	—	80,6	т. р.

Продолжение

Название	Формула	Мол. в.	Физ. с.	Плотн.	Т. пл.	Т. к.	Раст. в в. (20° С)
Сурьматрифенил	$Sb(C_6H_5)_3$	353,06	т.	1,4343	46—53	>220	н.
Сурьматриэтил	$Sb(C_2H_5)_3$	208,94	ж.	1,324	<—20	159,5	н.
Цинкдиметил	$Zn(CH_3)_2$	95,45	ж.	1,386	—42,2	46	рз.
Цинкдиэтил	$Zn(C_2H_5)_2$	123,50	ж.	1,182	—	118	рз.

Примечания к табл. 2-17. [1]) В медицине известна под названием *веселящего газа* вследствие анестезирующего действия при вдыхании. [2]) Или N_2O_4 с молекулярным весом 92,02. [3]) В естественном состоянии — минерал корунд (табл. 2-19). [4]) Барий разлагает воду с выделением водорода. То же свойство, кроме бария, обнаруживают еще следующие элементы: калий, кальций, лантан, литий, натрий, радий, рубидий, стронций, фтор и цезий; магний и уран также разлагают воду, но очень медленно. [5]) Приведена температура плавления обычного (стекловидного) ангидрида бора, температура плавления кристаллического Ba_3O_3 равна 294° С. [6]) Тяжелый изотоп водорода *дейтерий,* кроме обычного обозначения ^2_1H, обозначается также символом D; атомный вес дейтерия равен 2,01473. [7]) Плотность азотной кислоты и ее зависимость от концентрации см. табл. 2-34. [8]) В природных условиях закись-окись железа Fe_3O_4 (точнее, $FeO \cdot Fe_2O_3$) встречается в виде минерала магнетита (табл. 2-19). [9]) Температуры плавления серебра и золота, равные соответственно 960,8° и 1063,0° С, приняты за основные точки международной температурной шкалы (табл. 2-58). [10]) Иод заметно летуч при комнатной температуре, при нагревании возгоняется, образуя фиолетовые пары. [11]) Минерал гипс (табл. 2-19) состоит в основном из гидрата сернокислого кальция состава $CaSO_4 \cdot 2H_2O$. [12]) Карбид кальция CaC_2 разлагается водой с выделением ацетилена C_2H_2, на этой реакции основано получение последнего газа. [13]) Двуокись кремния SiO_2, или кремнезем, встречается в природе как минерал кварц (табл. 2-19). [14]) В природе углекислый магний $MgCO_3$ встречается в виде минерала магнезита (табл. 2-19). [15]) Мышьяк известен в трех аллотропических состояниях: 1) желтый, или α-мышьяк; 2) черный, или β-мышьяк; 3) серый, или γ-мышьяк. Наиболее устойчивой формой является γ-мышьяк, кристаллическое тело с металлическим блеском, который при 610° С и нормальном давлении возгоняется, не образуя жидкой фазы. [16]) Обычное металлическое олово называется белым или β-оловом. Оно легко поддается ковке, вальцеванию и плющению (оловянная фольга, или станиоль). Но при температуре около 13° С и при условии предварительного сильного охлаждения (до —20 или —30° С) белое олово переходит в серое, или α-олово, порошкообразное по строению; его плотность равна $\sim 6{,}75\ г \cdot см^{-3}$. [17]) Сера известна в трех аллотропических состояниях: 1) ромбическая сера плотностью $2{,}07\ г \cdot см^{-3}$; 2) моноклинная сера плотностью $1{,}96\ г \cdot см^{-3}$; 3) аморфная (пластическая) сера, которая состоит из двух модификаций. [18]) Трехокись сурьмы встречается в природе в виде двух минералов одного состава, но различной кристаллической структуры: сенармонтит и валентинит.

Таблица 2-18. **Общие свойства некоторых органических соединений**

В табл. 2-18, кроме названия соединений и их химических формул, показаны: 1) физическое состояние соединений при нормальных условиях (твердое, жидкое, газообразное); 2) молекулярный вес; 3) плотность, выраженная для тел твердых и жидких в $г \cdot см^{-3}$, а для газов в $г/л$; 4) температуры плавления и кипения в °С; 5) растворимость в воде.

По отношению к этим данным необходимо отметить следующее:

а) Плотность для твердых и жидких соединений отвечает температуре около 20° С, плотность газообразных соединений дается при нормальных условиях, т. е. при температуре 0° С и давлении 760 *мм* рт. ст. Значения плотности даются приближенно с точностью до второго десятитысячного знака; если температура значительно отличается от 20° С, то она указывается в скобках.

б) Температуры плавления и кипения даются также приближенно с точностью не выше 0,1° С. Если при нагревании соединение разлагается или возгоняется или взрывается, то это обозначено соответствующими сокращениями: рз., вз., взр. Если точка кипения дается при давлении, отличном от нормального, то оно указывается в миллиметрах рт. ст.

в) Растворимость в воде дается при средней комнатной температуре и определяется: для твердых и жидких соединений числом граммов, которое растворяется в 100 $см^3$ воды, а для газообразных соединений — числом миллилитров также на 100 $см^3$ воды. Для соединений, весьма мало растворимых в воде при указанной температуре, введены обозначения: нерастворимо (н.) и труднорастворимо (т. р.). Если соединение, растворяясь в воде, химически ее разлагает, этот процесс сокращенно обозначается рз.

Некоторые дополнительные указания для отдельных соединений даны в примечаниях к таблице.

Соединения расположены в таблице в алфавитном порядке по их названиям.

Название	Формула	Мол. в.	Физ. с.	Плотн.	Т. пл.	Т. к.	Раст. в в.
Азобензол	$C_6H_5N{=}NC_6H_5$	182,23	т.	1,20	68	293	н.
Акролеин	$CH_2{=}CHCHO$	56,06	ж.	0,84	—87,7	52,5	40
Ализарин	$C_6H_4(CO)_2\,C_6H_2{=}(OH)_2$	240,21	т.	—	290	430	т. р.
Аллиловый спирт	$CH_2{=}CHCH_2OH$	58,08	ж.	0,855	—129	96	∞
Амиловый спирт (изо-) . .	$(CH_3)_2\,CH\,(CH_2)_2\,OH$	88,16	ж.	0,812	—117,2	130,5	2,6
Анизол	$C_6H_5OCH_3$	108,14	ж.	0,993	—37,5	155	н.
Анилин	$C_6H_5NH_2$	93,13	ж.	1,02	—6,2	184	3,4

Продолжение

Название	Формула	Мол. в.	Физ. с.	Плотн.	Т. пл.	Т. к.	Раст. в в.
Антрацен	$C_{14}H_{10}$	178,23	т.	1,24	217	350	н.
Ацетальдегид	CH_3CHO	44,05	ж.	0,78	—121	20,8	∞
Ацетилен	$CH{\equiv}CH$	26,04	г.	1,17 *г/л*	—81,5	—	100 *мл* (18°)
Ацетон	CH_3COCH_3	58,08	ж.	0,79	—95	56,5	∞
Бензальдегид	C_6H_5COH	106,13	ж.	1,05	—26	179,5	0,33
Бензол	C_6H_6	78,12	ж.	0,88	5,5	80,1	0,08
Бромоформ	$CHBr_3$	252,77	ж.	2,89	8	149,5	0,3
Бутан (*n*)	$CH_3(CH_2)_2CH_3$	58,12	г.	0,6 (ж.)	—138,4	—0,5	ок. 10 *мл* (17°)
Бутиловый спирт (изо-)	$(CH_3)_2CHCH_2OH$	74,12	ж.	0,80	—108	108,4	9,5
Винил хлористый	$CH_2{=}CHCl$	62,50	г.	0,92 (ж.)	—159,7	—13,9	т. р.
Галловая кислота	$(HO)_3C_6H_2COOH$	170,13	т.	1,69	220	рз.	1,16
Гексахлорбензол	C_6Cl_6	284,81	т.	2,04	ок. 230	326	н.
Гидрохинон	$C_6H_4(OH)_2$	110,12	т.	1,36	170,5	286,2	6,0
Гликоль (этилен — глик.)	$CH_2OH{-}CH_2OH$	62,07	ж.	1,12	—15,6	197,3	∞
Глицерин [1]	$CHOH(CH_2OH)_2$	92,09	ж.	1,26	20,0	290 рз.	∞
Глюкоза (*d* — глюк.) [2]	$CH_2OH(CHOH)_4CHO$	180,17	т.	1,54	142	рз.	83 (17,5°)
Декстрин	$(C_6H_{10}O_5)_x$	(162,15)*x*	т.	1,04	рз.	—	р.
Диацетил	$CH_3COCOCH_3$	86,09	ж.	0,99	—	88	25 (15°)
Дивинил [3]	$CH_2{=}CH{-}CH{=}CH_2$	54,09	г.	0,65 (ж.)	—108,9	—3,5	н.
Динитробензол (орто-)	$C_6H_4(NO_2)_2$	168,12	т.	1,56	118	ок. 317	т. р.
Дифенил	$(C_6H_5)_2$	154,21	т.	1,18 (0°)	69—71	255	н.
Изопрен	$CH_2{=}CHC(CH_3){=}CH_2$	68,12	ж.	0,68	—120	32,6	н.
Иодоформ	CHJ_3	393,78	т.	4,01	119 рз.	210 взр.	т. р.
Камфора (*d*-камф)	$C_{10}H_{16}O$	152,24	т.	0,99	176	204 вз.	0,1

Продолжение

Название	Формула	Мол. в.	Физ. с.	Плотн.	Т. пл.	Т. к.	Раст. в в.
Крахмал	$(C_6H_{10}O_5)_x$	$(162{,}15)_x$	т.	1,50	рз.	—	т. р.
Ксилол (орто-)	$C_6H_4(CH_3)_2$	106,17	ж.	0,88	—25,2	144,4	н.
Лактоза [4]	$C_{12}H_{22}O_{11}\cdot H_2O$	360,33	т.	1,52	обезв. 130°	рз.	х. р.
Лимонная кислота	$C_3H_4(OH)(CO_2H)_3$	192,13	т.	1,54	153	рз.	х. р.
Мальтоза [5]	$C_{12}H_{22}O_{11}\cdot H_2O$	360,33	т.	1,54	обезв. 100	рз.	108 (25°)
Метан	CH_4	16,04	г.	0,72 *г/л*	—182,5	—161,5	9 *мл*
Метил хлористый	CH_3Cl	50,49	г.	2,31 *г/л*	—93	—24,1	400 *мл*
Метилен хлористый	CH_2Cl_2	84,94	ж.	1,33	—96,8	40	р.
Метиловый спирт	CH_3OH	32,04	ж.	0,79	—93,9	64,6	∞
Метиловый эфир	CH_3OCH_3	46,07	г.	2,1 *г/л*	—138,5	—23,6	3700 *мл*
Метол	$(HOC_6H_4NHCH_3)_2\cdot H_2SO_4$	344,39	т.	—	рз. 260	—	р.
Муравьиная кислота	HCO_2H	46,03	ж.	1,22	8,4	100,5	∞
Нафталин	$C_{10}H_8$	128,17	т.	1,14	80,2	218	т. р.
Нафтол (α-)	$C_{10}H_7OH$	144,17	т.	1,224 (4°)	95	280	т. р.
» (β-)	$C_{10}H_7OH$	144,17	т.	1,217 (4°)	122	286	т. р.
Нитробензол	$C_6H_5NO_2$	123,12	ж.	1,20	5,9	210,9	0,19
Нитроглицерин	$C_3H_5(ONO_2)_3$	227,09	ж.	1,60	(2,9); 13,2	взр. 260	0,18
Нитротолуол (орто-)	$C_6H_4CH_3NO_2$	137,14	ж.	1,16	ок. —4	222,3	т. р.
Нитрофенол (орто-)	$O_2NC_6H_4OH$	139,12	т.	1,66	45	214,5	0,21
Олеиновая кислота	$C_{17}H_{33}CO_2H$	282,48	ж.	0,898	16	286 (100 *мм*)	н.
Паральдегид	$(CH_3CHO)_3$	132,17	ж.	0,99	12,6	128	12 (13°)

Продолжение

Название	Формула	Мол. в.	Физ. с.	Плотн.	Т. пл.	Т. к.	Раст. в в.
Пентан (норм.)	$CH_3(CH_2)_3CH_3$	72,15	ж.	0,63	—130	36,1	0,04
Пикриновая кислота	$C_6H_2OH(NO_2)_3$	299,12	т.	1,76	122,5	взр. 300	1,8
Пиридин	C_5H_5N	79,10	ж.	0,98	—42	115,3	∞
Пирогаллол	$C_6H_3(OH)_3$	126,12	т.	1,45	ок. 133	309	ок. 62
Пропан	$CH_3CH_2CH_3$	44,09	г.	2,01 *г/л*	—187,7	—42,1	6,5 *м.*[3] (18°)
Пропилен	$CH_3CH{=}CH_2$	42,08	г.	1,94 *г/л*	—185,3	—47,7	44,6 *мл*
Пропиловый спирт (норм.)	$CH_3CH_2CH_2 \cdot OH$	60,09	ж.	0,80	—127	97,4	∞
Резорцин	$C_6H_4(OH)_2$	110,12	т.	1,28	111	276,5	ок. 220
Салициловая кислота	$HOC_6H_4CO_2H$	138,13	т.	1,44	159	вз.	0,18
Сахароза [6])	$C_{12}H_{22}O_{11}$	342,31	т.	1,59 (15°)	184 рз.	—	179 (0°)
Сероуглерод	CS_2	76,14	ж.	1,29 (0°)	— 111	46,3	0,22 (22°)
Стирол [7])	$C_6H_5CH{=}CH_2$	104,15	ж.	0,91	—30,6	145,2 рз.	т. р.
Толуол	$C_6H_5CH_3$	92,14	ж.	0,87	—95,0	110,6	0,05
Трихлорбензол	$C_6H_3Cl_3$	181,47	т. (ж)	1,57 (10°)	17	213	н.
Уксусная кислота	CH_3COOH	60,05	т. (ж)	1,05	16,7	118,0	∞
Уксусный ангидрид	$(CH_3CO)_2O$	102,09	ж.	1,08	—73,0	139,5	рз.
Фенантрен	$C_{14}H_{10}$	178,23	т.	1,17	100	340,2	н.
Фенол [8])	C_6H_5OH	94,12	т.	1,07	41,0	181,7	6,7 (16°)
Фенолфталеин	$C_{20}H_{14}O_4$	318,33	т.	1,30	261	—	0,018
Флуоресцеин	$C_{20}H_{12}O_5$	332,32	т.	—	ок. 315	рз.	т. р.
Формальдегид	$HCHO$	30,03	г.	0,81 (—20°)	—92	—21	р.
Фруктоза [9])	$C_6H_{12}O_6$	180,17	т.	1,60	ок. 103	рз.	х. р.
Фталевый ангидрид	$C_6H_4(CO)_2O$	148,12	т.	1,53	131,6	вз.	т. р.
Фурфурол	C_4H_3OCHO	96,08	ж.	1,16	—36,5	161,7	8,3

Продолжение

Название	Формула	Мол. в.	Физ. с.	Плотн.	Т. пл.	Т. к.	Раст. в в.
Хинолин	$C_6H_4N{=}CHCH{=}CH$	129,16	ж	1,09	—15,0	238,0	6
Хлоральгидрат	$CCl_3CH(HO)_2$	165,42	т.	1,91	51,7	96,2 рз.	470 (17°)
Хлорбензол	C_6H_5Cl	112,56	ж.	1,11	—45	132	0,05
Хлороформ	$CHCl_3$	119,39	ж.	1,50 (15°)	—63,5	61,0	1,0 (15°)
Хлорпикрин	CCl_3NO_2	164,39	ж.	1,65	—64	112	н.
Четыреххлористый углерод	CCl_4	153,84	ж.	1,59 (5)	—22,8	76,8	0,08
Щавелевая кислота	$COOH{-}COOH$	90,04	ж.	1,65	189,5	вз.	9,5 (15°)
Этан	CH_3CH_3	30,07	г.	1,36 *г/л*	—183,3	—88,6	4,7 *мл*
Этил хлористый	CH_3CH_2Cl	64,52	ж. (г.)	0,92 (0°)	—142,5	12,5	0,57 (20°)
Этилен	$CH_2{=}CH_2$	28,05	г.	1,25 *г/л*	—169,2	—103,7	25,6 *мл* (0°)
Этил бромистый	CH_3CH_2Br	108,99	ж.	1,455	—125,5	38,4	0,91
Этил иодистый	CH_3CH_2J	155,98	ж.	1,913	ок. —110	72,2	0,4
Этилен хлористый	$ClCH_2CH_2Cl$	98,97	ж.	1,26	—42,0	83,7	0,87
Этиламин	$CH_3CH_2NH_2$	45,08	ж.	0,706 (0°)	—80,6	16,6	∞
Этилацетат	$CH_3CO_2C_2H_5$	88,10	ж.	0,907 (15°)	—83,6	77,15	8,6
Этилбензол	$C_6H_5CH_2CH_3$	106,17	ж.	0,867	—93,9	136,1	т. р.
Этилен бромистый	$BrCH_2CH_2Br$	187,88	ж.	2,1785	9,97 (10)	131,6	0,43 (30°)
Этилена окись	$(CH_2)_2O$	44,05	ж. (г.)	0,88 (7°)	—111,3	10,7	∞
Этиловый спирт	C_2H_5OH	46,07	ж.	0,79	—117	78,5	∞
Этиловый эфир	$(C_2H_5)_2O$	74,12	ж.	0,71	—116,3	34,6	7,5
Янтарная кислота	$CO_2H(CH_2)_2CO_2H$	118,09	т.	1,56	185	235 рз.	6,8

Примечания к табл. 2-18. 1) Чистый глицерин выдерживает кратковременное охлаждение до —40° С и не отвердевает. При меньшем, но более продолжительном охлаждении (например, до температуры 0° С) глицерин кристаллизуется; эти кристаллы плавятся при температуре 20° С. 2) Глюкозы представлены большим числом различных сахаристых веществ; *d*-глюкоза иначе называется *декстроза* или *виноградный сахар*. 3) Дивинил служит основным исходным продуктом при производстве синтетического каучука. 4) Лактоза называется также *молочный сахар* [прим. 2)]. 5) Иначе называется *солодовый сахар*, обычно получается в виде патоки. 6) Или сахар свекловичный, тростниковый. 7) Широко применяется в производстве пластмасс. 8) Раствор фенола в воде носит название *карболовой кислоты*. 9) Иначе *левулёза* или *фруктовый сахар*.

Таблица 2-19. Общие свойства некоторых минералов

В табл. 2-19 перечислены некоторые из минералов, для которых, кроме названия и химической формулы основной составной части, приводятся: 1) кристаллическая система согласно принятой терминологии; 2) приближенные значения твердости по десятибалльной шкале (стр. 321) и 3) значения плотности в $г/см^3$. Кроме того, даются принятые в минералогии общие указания на внешний вид кристалла, его цвет и блеск; ввиду часто наблюдаемого разнообразия в цвете различных образцов одного и того же кристалла цвет указывается только приближенно, главным образом для наиболее распространенных разновидностей.

В табл. 2-19 введены сокращения:

Для кристаллических систем:

трк. — триклинная
мнк. — моноклинная
ромб. — ромбическая (или ортотриметрическая)
тргг. — тригональная
тетр. — тетрагональная
гекс. — гексагональная
куб. — кубическая (или изометрическая)

Для блеска:

ал. — алмазный
мт. — металлический
пмт. — полуметаллический
см. — смолистый
ст. — стеклянный
тс. — тусклый
нб. — не блестит

Для цвета:

бл. — белый
бр. — бурый
бц. — бесцветный
гб. — голубой
гбв. — голубоватый
жл. — желтый
жлв. — желтоватый
зл. — зеленый
злв. — зеленоватый
кр. — красный
кч. — коричневый
пр. — прозрачный
св. — светлый
сер. — серый
сн. — синий
снв. — синеватый
тм. — темный
чр. — черный

Название	Формула	Крист. система	Твердость	Плотность	Цвет; блеск
Азурит	$2CuCO_3 \cdot Cu(OH)_2$	мнк.	3,6—4,0	3,7—3,9	сн., тм.-сн.; ст.
Алмаз	C	куб.	10	3,4—3,5	бц., жл., бр.; ал.
Ангидрит	$CaSO_4$	ромб.	3,0—3,5	2,8—3,0	сер., гбв.; ст.
Антимонит	Sb_2S_3	ромб.	2,0—2,5	4,5—4,6	свн.-сер.; мт.
Арагонит	$CaCO_3$	ромб.	3,5—4,0	2,9—3,0	бл., св.-зл.; ст.
Арсенопирит	FeAsS	мнк.	5,5—6,0	5,9—6,2	бл., сер.; мт.
Аурипигмент	As_2S_3	мнк.	1,5—2,0	3,4—3,5	жл.; ст.
Барит [1]	$BaSO_4$	ромб.	2,5—3,0	4,3—4,7	бл., бр., кр.; ст.

Продолжение

Название	Формула	Крист. система	Твердость	Плотность	Цвет; блеск
Берилл	$Be_3Al_2(SiO_3)_6$	гекс.	7,5—8,0	2,6—2,9	зл., жл., сн.; ст.
Бишофит	$MgCl_2 6H_2O$	мнк.	1,5—2,0	1,5—1,6	бл., бц.; ст.
Браунит	Mn_2O_3	тетр.	6,0—6,5	4,7—5,0	бр.-чр., сер.; пмт.
Брукит	TiO_2	ромб.	5,5—6,0	3,9—4,1	бр., жл., кр.; ст.
Ванадинит	$Pb_5(VO_4)_3Cl$	гекс.	2,5—3,0	6,7—7,2	кр., жл., бр.; см.
Висмутин	Bi_2S_3	ромб.	2,0—2,5	6,4—6,6	бл., сер.; мт.
Витерит	$BaCO_3$	гекс.	3,0—3,7	4,2—4,3	сер.; жлв.; ст.
Вольфрамит	$(Mn,Fe)WO_4$	мнк.	4,5—5,5	6,7—7,5	тм.-сер., бр.-чр.; мт.
Вульфенит	$PbMoO_4$	тетр.	2,5—3,0	6,7—7,0	жл., бр.; ал., ст.
Гадолинит	$Y_2FeBe_2Si_2O_{10}$	мнк.	6,6—7,0	4,0—4,3	злв.-чр., бр.; ст.
Галенит	PbS	куб.	2,5—3,0	7,4—7,6	сер.; мт.
Галит [2]	$NaCl$	куб.	2,0—2,5	2,1—2,2	бл., пр.; ст.
Гематит	Fe_2O_3	трг.	5,5—6,5	4,9—5,3	чр.; кр., мт.
Гипс	$CaSO_3 \cdot 2H_2O$	мнк.	1,5—2,0	2,2—2,4	бл. сер. жлв.; нб.
Глауберит	$Na_2SO_4CaSO_4$	мнк.	2,5—3,0	2,7—2,9	пр., бл., жлв.; ст.
Графит	C	гекс.	1,0—2,0	2,0—2,3	чр.; пмт.
Гюбнерит	$MnWO_4$	мнк.	4,5—5,5	7,2—7,5	чр., кр.-кч.; мт.
Диаспор [3]	$Al_2O_3 \cdot H_2O$	ромб.	6,5—7,0	3,3—3,5	бр., жлв.; ст.
Диопсид	$CaMg(Si_2O_6)$	мнк.	5,5—6,0	3,3—3,4	бл., зл., сер.; ст.
Доломит	$CaCO_3 \cdot MgCO_3$	трг.	3,5—4,0	2,8—3,0	бр.-бл.; ст.
Ильменит	$FeTiO_3$	трг.	5,0—6,0	4,5—5,0	чр.; мт.
Кальцит [4]	$CaCo_3$	трг.	3,0	2,6—2,8	бл. пр.; ст.
Касситерит	SnO_2	тетр.	6,0—7,0	6,8—7,1	бр., чр., кр.-сер.; ал.
Кварц [5]	SiO_2	трг.	7,0	2,59—2,66	пр., жл., бр. злв.; ст.
Кианит (дистен)	Al_2SiO_5	трк.	4,5—7,0	3,56—3,67	сн., злв., бл.; ст.
Киноварь	HgS	трг.	2,0—2,5	8,0—8,2	кр., сер., чр.; ал.
Кобальтин	$CoAsS$	куб.	5,5—6,0	6,1—6,3	бл., крв.; мт.
Корунд [6]	Al_2O_3	трг.	9,0	3,95—4,10	сер., жл., сн., кр.; ал.
Ксенотим	YPO_4	тетр.	4,0—5,0	4,45—4,56	жл., бр., кр.; ст. ал.
Лимонит [7]	$2Fe_2O_3 \cdot 3H_2O$	—	5,0—5,5	3,3—4,0	тм.-бр.; жл., кч.
Магнезит	$MgCO_3$	трг.	3,5—4,5	2,9—3,1	бл., жлв.; ст.

Продолжение

Название	Формула	Крист. система	Твердость	Плотность	Цвет; блеск
Магнетит	$FeO \cdot Fe_2O_3$	куб.	5,5—6,5	5,0—5,2	чр.; мт.
Малахит	$CuCO_3 \cdot Cu(OH_2)$	мнк.	3,4—4,0	3,9—4,1	зл.; ал., ст.
Молибденит	MoS_2	гекс.	1,0—1,5	4,7—4,8	сер.; мт.
Монацит [8])	$(Ce, \ldots)PO_4$	мнк.	5,0—5,5	4,9—5,3	кр.-бр.; жл.; ст.
Оливин	$(Mg,Fe)_2SiO_4$	ромб.	6,5—7,0	3,0—3,3	зл.; жл.; ст.
Опал	$SiO_2 \cdot nH_2O$	амф.	5,5—6,5	1,9—2,5	бл., жлв., гбв.; ст.
Петцит	$(Ag\ Au)_2Te$	куб.	2,5—3,0	8,7—9,2	сер.; мт.
Пирит	FeS_2	куб.	6,0—6,5	4,9—5,2	жл.; мт.
Пирротин	FeS	гекс.	3,5—4,5	4,5—4,7	жл.; мт.
Реальгар	AsS	мнк.	1,5—2,0	3,4—3,6	кр.; ст.
Рутил [9])	TiO_2	тетр.	6,0—6,5	4,2—4,3	кр., жл., чр.; мт.
Сера	S, (As, Se, Fe. . .)	ромб.	2,0—2,5	2,0—2,1	жл.; см.
Сидерит	$FeCO_3$	трг.	3,5—4,5	3,0—3,9	сер., бр.; ст.
Сильвин [10])	KCl	куб.	2,0—2,5	1,9—2,0	пр., ст.
Слюда	$KAl_2(OH,F)_2[AlSi_3O_{10}]$	мнк.	2,0—3,0	2,7—2,9	пр. жл., тм.; ст.
Сперрилит	$PtAs_2$	куб.	6,0—7,0	10,5—10,7	бл.; мт.
Сподумен	$LiAl(Si_2O_6)$	мнк.	6,5—7,0	3,1—3,2	зл., жл.; кр., бц.; ст.
Сфалерит	ZnS	куб.	3,5—4,0	3,9—4,2	бр., чр., кч.; ал.
Сфен (титанит)	$CaO \cdot TiO_2 \cdot SiO_2$	мнк.	5,0—5,5	3,3—3,56	бр.,жл., кч., зл.; ст., ал.
Торианит [12])	$(Th,U)O_2$	куб.	6,5	9,32—9,33	чр., непр.; тс., мт.
Торит [11])	$Th \cdot SiO_4$	тетр.	4,5—5,0	4,4—5,4	чр., бр., жлв.-кр.; ст.
Торолит	$SnTa_2O_7$	мнк.	5,5—6,0	7,6—7,9	бр.; ал.
Тремолит	$Ca_2Mg_5(OH)_2[Si_4O_{11}]_2$	мнк.	5,5—6,0	2,9—3,1	злв., жлв. бц.; ст.
Турмалин	—	трг.	7,0—8,0	2,9—3,2	чр., бр., зл., сн.; ст.
Уранинит [11])	UO_2	куб.	5,0—6,0	6,6—10,0	чр.; см.
Фенактит	Be_2SiO_4	трг.	7,5—8,0	2,96—3,0	бц., бр.-кр., кч.; ст.
Флюорит [13])	CaF_2	куб.	4,0	3,1—3,2	пр., зл., гбв., ст.
Халькозин	Cu_2S	ромб.	2,5—3,0	5,5—5,8	сер.; мт.
Халькопирит	$CuFeS_2$	тетр.	3,5—4,0	4,1—4,3	жл.; мт.
Хризоберилл	$BeAl_2O_4$	ромб.	8,5	3,5—3,84	зл., жл.; ст.
Хромит	$FeO \cdot Cr_2O_3$	куб.	5,5—7,5	4,0—4,8	чр., кр.; мт.

Продолжение

Название	Формула	Крист. система	Твердость	Плотность	Цвет; блеск
Церуссит	$PbCO_3$	ромб.	3,0—3,5	6,46—6,57	бц., бл., сер.; ал.
Циркон	$ZrSiO_4$	тетр.	7,5—8,0	4,68—4,70	пр., бр., жл., кч.; ал.
Шеелит	$CaWO_4$	тетр.	4,5—5,0	5,88—6,14	бл., жлв., злв.; сер., см.
Штольцит	$PbWO_4$	тетр.	2,75—3,0	7,87—8,13	зл., сер., кр., кч.; ал.
Шпинель [13]	$MgAl_2O_4$	куб.	8,0	3,5—4,1	кр., бр., зл., сн.; ст.
Энстатит	$Mg_2(Si_2O_6)$	ромб.	5,0—6,0	3,1—3,2	бл., сер., жлв.; ст.

Примечания к табл. 2-19. [1]) Барит, иначе тяжелый шпат. [2]) Галит, иначе каменная соль, находится в природе не только в твердом состоянии, но и в виде раствора — в воде соляных источников и озер, морей, океанов. Галит в оптически чистых кристаллах оказывается прозрачным для инфракрасных лучей (до 16—17 μ), поэтому при исследованиях в этой части спектра часто пользуются оптикой (призмы, линзы) из каменной соли, вполне прозрачные кристаллы которой больших размеров не являются редкостью (см. примечание 10). [3]) Диаспор входит в состав боксита, который служит основным сырьем для получения металлического алюминия. [4]) Кальцит, иначе *известковый шпат*, известен также в виде прозрачной разновидности, называемой *исландским шпатом*; из него изготовляются поляризационные призмы. [5]) Кварц имеет некоторые весьма ценные свойства, из которых можно указать: 1) в расплавленном состоянии кварц способен вытягиваться в виде тончайших нитей, — они применяются для изготовления технических огнеупорных тканей; в физических лабораториях те же нити применяют для подвесов в самых чувствительных измерительных приборах; 2) кварц обнаруживает пьезоэлектрические свойства, которые широко применяются: в радиотехнике для стабилизации частоты (пьезокварцевый эталон частоты), в механике для измерения мгновенных давлений; 3) двойное преломление лучей в кварце и его оптическая активность; 4) кварц является особенно прозрачным для ультрафиолетовых лучей (приближенно до 1850 Å), благодаря чему при исследовании в этой области спектра кварцевая оптика (линзы, призмы) является наилучшей. [6]) Корунд благодаря большой твердости широко применяется как абразивный материал. Для той же цели применяется разновидность корунда — *наждак*, который является естественной смесью корунда с магнетитом, гематитом, кварцем. Некоторые прозрачные разновидности корунда являются драгоценными камнями (рубин, сапфир). [7]) Лимонит, или *бурый железняк*, является весьма распространенной железной рудой. [8]) Монацит часто содержит небольшие количества тория, вследствие чего является радиоактивным. [9]) Двуокись титана (минерал рутил) привлекает к себе в настоящее время большое внимание вследствие своих особых электрических свойств. [10]) В области инфракрасного спектра сильвин еще более прозрачен, чем галит (до 20 μ), см. примечание 2), но оптически прозрачные кристаллы сильвина большего размера встречаются редко. [11]) Минералы торианит, торит и уранинит обнаруживают сильные радиоактивные свойства. [12]) Флюорит, иначе плавиковый шпат, служит для изготовления плавиковой кислоты и фтористых препаратов. [13]) В шпинеле магний часто замещается железом или марганцем, а алюминий — железом или хромом.

Таблицы 2-20 а, б и в. Состав и температуры замерзания морской воды

Содержание солей в морской воде принято определять ее соленостью S. Количественно S выражают общим числом граммов всех солей, которые содержатся в 1000 *г* морской воды, иначе говоря, соленость морской воды можно рассматривать как суммарную концентрацию всех солей, отнесенную к 1000 *г* раствора; в силу этого S выражается обыкновенно в $^0/_{00}$.

Среднее значение солености морской воды принимают равным $35^0/_{00}$ ($S_{ср} = 35^0/_{00}$); это значит, что 1 *кг* морской воды в среднем содержит 35 *г* растворенных солей. Соли, которые содержатся в морской воде в значительных количествах, приведены в табл. 2-20а, где даны: 1) названия и формулы солей; 2) их концентрация (в $^0/_{00}$) в морской воде средней солености; 3) процентное число каждой соли по отношению к их общему количеству. Следует отметить, что, в то время как числа второго столбца таблицы и их сумма S в природных условиях обнаруживают значительные изменения, числа третьего столбца, т. е. процентное содержание солей, остаются почти постоянными.

Кроме солей, указанных в табл. 2-20а, в морской воде было обнаружено большое количество еще других химических элементов, которые содержатся в ней в крайне незначительных количествах [1]), приближенно от 10^{-4} до 10^{-14} $^0/_{00}$. Так, было обнаружено несомненное присутствие фтора, кремния, рубидия, алюминия, лития, иода и многих других элементов. Далее, в морской воде содержатся растворенные газы, поступающие главным образом из атмосферы, и различные органические соединения, которые вырабатываются растительным и животным миром моря. Концентрация органических соединений, очень незначительная, подвержена сильным колебаниям приближенно в пределах от 2 до 15 *мг* на 1 *л* воды. Что же касается растворенных в морской воде газов, то их содержание также может значительно изменяться, как это видно из табл. 2-20б, где дана концентрация различных газов в морской воде, выраженная в $см^3/л$.

Соленость морской воды влияет на ее другие свойства, например на плотность, температуру замерзания, коэффициент преломления света, электропроводность и т. п. Так, плотность морской воды при солености $35^0/_{00}$ и температуре 0°С равна 1,02812. Точно так же коэффициент преломления D — линии натрия при 18° С с увеличением солености от $0^0/_{00}$ до $40^0/_{00}$ изменяется соответственно от 1,33308 до 1,34077; на этом основан рефрактометрический метод измерения солености. Зависимость между соленостью морской воды и ее температурой замерзания θ (в градусах С) дана в табл. 2-20в.

Таблица 2-20а

Содержание главных солей в морской воде

Название и химическая формула	Содержание в 1 *кг*	%
Хлористый натрий NaCl	27,213	77,758
Хлористый магний $MgCl_2$	3,807	10,878
Сернокислый магний $MgSO_4$	1,658	4,737
Сернокислый кальций $CaSO_4$	1,260	3,600
Сернокислый калий K_2SO_4	0,863	2,465
Бромистый магний $MgBr_2$	0,076	0,217
Углекислый кальций и следы других солей . .	0,123	0,345
Всего	$S = 35^0/_{00}$	$100^0/_0$

Таблица 2-20б

Содержание газов в морской воде

Вещество	Конц. ($см^3/л$)	Вещество	Конц. ($см^3/л$)
Кислород [2]	0 — 8,5	Аргон	0,2—0,4
Азот	8,4—14,5	Гелий и неон . .	ок. 0,00017
Углекислота [3] . .	34—56	Сероводород [4] . .	0—22

Таблица 2-20в

Температура замерзания морской воды при различных значениях S

$S^0/_{00}$	θ	$S^0/_{00}$	θ	$S^0/_{00}$	θ	$S^0/_{00}$	θ	$S^0/_{00}$	θ
2	—0,108	10	—0,534	18	—0,965	26	—1,405	34	—1,853
4	—0,214	12	—0,640	20	—1,074	28	—1,516	36	—1,967
6	—0,320	14	—0,748	22	—1,184	30	—1,627	38	—2,081
8	—0,427	16	—0,856	24	—1,294	32	—1,740	40	—2,196

Примечания к табл. 2-20. [1]) При очень малых концентрациях солей, растворенных в морской воде, они все, не исключая и приведенных в табл. 2-20а, должны быть вполне диссоциированы; вследствие этого, определяя состав морской воды, часто ограничиваются перечислением содержащихся в ней элементов и указывают концентрацию каждого из них. [2]) Следует обратить внимание на то, что процент кислорода по отношению к азоту в морской воде может быть значительно выше, чем в воздухе. [3]) Здесь дано все количество углекислоты, как свободной (CO_2), так и в виде кислотных радикалов. [4]) Концентрация сероводорода, который хорошо растворяется в воде, иногда может превышать указанный в таблице верхний предел (22 $см^3/л$); примером служит глубоководная зона Черного моря, где концентрация сероводорода достигает 42 $см^3/л$.

Таблица 2-21. Составные части воздуха

Воздух тропосферы, т. е. нижнего слоя земной атмосферы с толщиной в среднем около 14 *км*, представляет собой сложную механическую смесь, в которую входят, кроме газообразных тел, вода во всех трех агрегатных состояниях и мельчайшие твердые тела во взвешенном состоянии. Эта твердая составная часть воздуха представлена весьма разнообразными частичками: частичками пыли земного и космического происхождения, дыма, некоторых химических солей, а также микрочастичками биологической природы. Количество всех этих частичек, взвешенных в воздухе, подвержено большим колебаниям, которые во многом зависят от местных условий. Также весьма большие колебания обнаруживает и содержание в воздухе воды (жидкой, пара и ледяных кристаллов); эти колебания объясняются многими причинами: временем года, состоянием погоды, общими климатическими условиями местности и т. п.

Что же касается газообразных составных частей воздуха, то их обнаружено более десяти: азот, кислород, аргон, углекислота, неон, гелий, криптон, ксенон, водород, озон и др. Приходится указать при этом, что три газа — азот, кислород и аргон, явно преобладают над остальными: эти три газа, взятых вместе, образуют более 99,95% воздуха (по объему) и на долю других газов остается менее 0,05%. Состав сухого воздуха (в процентах по объему) был утвержден в качестве международного стандарта в 1947 г.; эти числа даются в четвертом столбце таблицы, а в пятом столбце указывается теоретически вычисленное парциальное давление газов в миллиметрах ртутного столба. По отношению к этим данным необходимо отметить, что состав воздуха остается постоянным практически для всех высот в пределах тропосферы. Небольшие замечания по этому вопросу для некоторых газов даны в примечаниях.

Кроме указанных газов, в воздухе содержится еще аммиак в количестве около $2 \cdot 10^{-6}$% и радиоактивные эманации в количестве около $6 \cdot 10^{-18}$%.

За пределами стратосферы (до высот около 30 *км*) наблюдается незначительное уменьшение более тяжелых газов с высотой. Так, содержание кислорода на высоте до 18 *км* еще сохраняется нормальным (20,95%), а на высоте 28—29 *км* оно оказалось равным 20,39%; то же наблюдается, по-видимому, и для углекислоты. Однако эти изменения значительно меньше тех, которые можно было бы ожидать на основании теории естественного разделения смеси газов в поле тяготения, предполагая, что этот процесс протекает вполне спокойно без механического перемешивания (ветер, вертикальные токи) смеси. Такие результаты позволяют сделать вывод о наличии на высотах до 30 *км* аэродинамических процессов, которые ослабляют разделение газов, хотя и не исключают его совершенно.

Таблица 2-21

Газ	Символ	Мол. в.	% (по объему)	Парциальное давление (*мм* рт. ст.)
Азот	N_2	28,016	78,09	593,4
Кислород	O_2	32,000	20,95	159,2
Аргон	Ar	39,944	0,93	7,07
Углекислота [1]	CO_2	44,010	0,03	0,23
Неон	Ne	20,183	$1{,}8 \cdot 10^{-3}$	0,014
Гелий	He	4,003	$5{,}24 \cdot 10^{-4}$	$3{,}8 \cdot 10^{-3}$
Криптон	Kr	83,80	$1{,}0 \cdot 10^{-4}$	$8{,}4 \cdot 10^{-4}$
Водород [2]	H_2	2,016	$5{,}0 \cdot 10^{-5}$	$3{,}8 \cdot 10^{-4}$
Ксенон	Xe	131,3	$8{,}0 \cdot 10^{-6}$	$6{,}1 \cdot 10^{-5}$
Озон [3]	O_3	48,000	$\approx 1{,}0 \cdot 10^{-6}$	$1{,}5 \cdot 10^{-5}$

Средний молекулярный вес сухого воздуха составляет 28,966

Примечания к табл. 2-21. [1]) Содержание в воздухе углекислоты обнаруживает заметный суточный ход, увеличиваясь ночью, что объясняется свойством растений поглощать углекислоту только на свету. [2]) Содержание водорода в нижних слоях воздуха определено недостаточно точно, но оно не может превышать числа, указанного в таблице. [3]) Содержание в воздухе озона обнаруживает заметный годовой ход, его максимум наблюдается весной.

Таблица 2-22. Некоторые параметры международной стандартной атмосферы

Изменение давления воздуха с высотой теоретически определяется *барометрической формулой*. Предполагая, что температура воздуха во всех точках остается постоянной, т. е. для случая так называемой *изотермической атмосферы*, барометрическую формулу обычно пишут в таком виде:

$$p_h = p_0 e^{-\frac{gh}{RT}}. \qquad (2\text{-}29)$$

Здесь p_h и p_0 обозначают давления воздуха на высоте h и на уровне моря, где h принимается равным нулю; g обозначает значение ускорения силы тяжести на высоте h (стр. 297), R и T — соответственно газовая постоянная воздуха и его абсолютная температура для изотермической атмосферы.

Барометрическая формула позволяет вычислять: 1) разность высот двух точек на земной поверхности, измеряя в них одновременно давление и температуру (*барометрическое нивелирование*), и 2) давление на некоторой высоте h по данному давлению на высоте h_1; обычной операцией этого рода является вычисление давления на уровне моря p_0 по давлению p_h, т. е. на высоте h (*приведение барометра к уровню моря*, в частности на синоптических картах даются показания барометра, приведенные к уровню моря).

В действительности изотермические условия не имеют места в атмосфере, и ее температура, вообще говоря, уменьшается с высотой, вследствие этого при расчетах было бы необходимо принимать во внимание вертикальный градиент температуры. Так как его величина обнаруживает большие колебания, в особенности в нижних слоях воздуха, то по международному соглашению введена условная стандартная атмосфера, ее температура на уровне моря принимается постоянной и равной 15° С, температура на всех высотах более 11 *км* принимается также постоянной и равной — 56,5° С, а для промежуточных высот между уровнем моря и 11 *км* принят постоянный вертикальный градиент температуры, равный — 6,5° С на 1 *км* высоты. Для стандартной атмосферы можно теоретически рассчитать на любой высоте значения всех основных параметров: давления, температуры, плотности, кинематического коэффициента вязкости и т. п. Некоторые результаты таких расчетов приведены в табл. 2-22, где даны: 1) высота h от уровня моря, выраженная в метрах; 2) барометрическое давление p_h в *мм* рт. ст. и в килобариях [1]); 3) отношение давлений p_h/p_0; 4) температура атмосферы по стоградусной шкале; 5) ее плотность ρ_h, выраженная в $кГ \cdot сек^2/м^4$. Эти данные приведены:

1) для высот от 0 до 2000 *м* с интервалами 100 *м*;
2) для высот от 2000 до 5000 *м* с интервалами 200 *м*;
3) для высот от 5000 до 8000 *м* с интервалами 500 *м*.

При вычислении числовых значений параметров стандартной атмосферы принято:

1) Барометрическое давление воздуха на уровне моря ($h = 0$) $p_0 = 760$ *мм* рт. ст. = 1013,25 килобарий (1,01325 *бар*) (при температуре ртути, равной 0° С, и объемном весе, равном 0,0135951 $кГ/см^3$).

2) Температура воздуха на уровне моря $t_0 = 15°$ С.

3) Температурный градиент воздуха $\alpha = 0{,}0065$ °/*м*.

4) Плотность воздуха на уровне моря $\rho_0 = 0{,}124966$ $кГ \cdot сек^2/м^4$.

5) Нормальное ускорение силы тяжести $g_0 = 9{,}80665$ $м/сек^2$.

Предполагается, что объемный вес воздуха на уровне моря $\gamma = 1{,}2255$ $кГ/м^3$ (при $t = 15°$); относительная влажность воздуха равна 0%.

Таблица 2-22

h (м)	p_h (мм рт. ст.)	p_h (кб)	p_h/p_0	t (°C)	ρ_h (кГ·сек²/м⁴)
0	760,00	1013,25	1,00000	15,00	0,12497
100	751,03	1001,29	0,98820	14,35	0,12377
200	742,14	989,44	0,97650	13,70	0,12258
300	733,34	977,71	0,96492	13,05	0,12140
400	724,63	966,09	0,95346	12,40	0,12024
500	716,00	954,58	0,94210	11,75	0,11907
600	707,45	943,19	0,93085	11,10	0,11792
700	698,99	931,90	0,91972	10,45	0,11678
800	690,60	920,73	0,90869	9,80	0,11564
900	682,30	909,66	0,89776	9,15	0,11452
1000	674,08	898,70	0,88695	8,50	0,11340
1100	665,94	887,85	0,87624	7,85	0,11229
1200	657,88	877,10	0,86563	7,20	0,11119
1300	649,90	866,46	0,85513	6,55	0,11009
1400	642,00	855,93	0,84474	5,90	0,10901
1500	634,17	845,50	0,83444	5,25	0,10793
1600	626,43	835,17	0,82425	4,60	0,10686
1700	618,76	824,94	0,81415	3,95	0,10580
1800	611,17	814,82	0,80416	3,30	0,10475
1900	603,65	804,79	0,79427	2,65	0,10370
2000	596,20	794,87	0,78448	2,00	0,10267
2200	581,54	775,32	0,76518	0,70	0,10062
2400	567,17	756,16	0,74628	—0,60	0,098600
2600	553,09	737,39	0,72775	—1,90	0,096613
2800	539,29	719,00	0,70959	—3,20	0,094657
3000	525,77	700,98	0,69181	—4,50	0,092731
3200	512,53	683,32	0,67439	—5,80	0,090836
3400	499,56	666,03	0,65732	—7,10	0,088970
3600	486,86	649,09	0,64061	—8,40	0,087134
3800	474,42	632,51	0,62424	—9,70	0,085326
4000	462,24	616,27	0,60821	—11,00	0,083548
4200	450,31	600,37	0,59252	—12,30	0,081798
4400	438,64	584,80	0,57716	—13,60	0,080077
4600	427,21	569,56	0,56211	—14,90	0,078383
4800	416,02	554,65	0,54739	—16,20	0,076717
5000	405,07	540,05	0,53299	—17,50	0,075077
5500	378,71	504,91	0,49831	—20,75	0,071097
6000	353,76	471,65	0,46548	—24,00	0,067280
6500	330,16	440,18	0,43443	—27,25	0,063622
7000	307,85	410,44	0,40507	—30,50	0,060118
7500	286,78	382,34	0,37734	—33,75	0,056763
8000	266,89	355,83	0,35117	—37,00	0,053554

Примечания к табл. 2-22. [1]) Ранее существовавшая единица измерения давления килобария ($кб$) была применена в ГОСТ 4401-48, откуда взяты цифры таблицы; при этом принималось $1\ кб = 10^3\ \frac{дн}{см^2}$. Для перевода в бары (по ГОСТ 7664-55) значения давлений, выраженных в килобариях, надо разделить на 10^3.

Таблицы 2-23 а, б, в. Ускорение силы тяжести

Ускорение силы тяжести g, как известно, зависит от географической широты места φ и его высоты над уровнем моря h. Зависимость g от географической широты определяется формулой Гельмерта [1]):

$$g_\varphi = 978{,}030\,(1 + 0{,}005302\,\sin^2\varphi - 0{,}00007\,\sin^2 2\varphi), \qquad (2\text{-}30)$$

где g_φ обозначает значение ускорения силы тяжести на уровне моря и географической широте φ, выраженное в *см/сек*^{2}.

В таблице 2-23а даны значения g различных широт с интервалами в 1°, вычисленные по формуле Гельмерта с точностью до третьего десятичного знака [2]). В третьем столбце таблицы указаны разности между двумя последовательными значениями g в таблице, что необходимо при вычислении значений g для промежуточных географических широт.

Таблица 2-23а

φ	g (*см·сек*$^{-2}$)	Разность	φ	g (*см·сек*$^{-2}$)	Разность	φ	g (*см·сек*$^{-2}$)	Разность	φ	g (*см·сек*$^{-2}$)	Разность
0°	978,030	2	23°	978,818	66	46°	980,706	91	69°	982,516	60
1	032	4	24	884	68	47	797	90	70	606	57
2	036	8	25	952	70	48	887	90	71	663	55
3	044	11	26	979,022	72	49	977	89	72	718	52
4	055	14	27	094	74	50	981,066	89	73	770	50
5	069	17	28	168	76	51	155	89	74	820	46
6	086	21	29	244	77	52	244	87	75	866	45
7	107	23	30	321	79	53	331	87	76	911	41
8	130	26	31	400	81	54	418	85	77	952	38
9	156	30	32	481	81	55	503	85	78	990	36
10	186	32	33	562	84	56	588	84	79	983,026	32
11	218	35	34	646	84	57	672	82	80	058	30
12	253	38	35	730	85	58	754	81	81	088	27
13	291	41	36	815	87	59	835	79	82	115	23
14	332	44	37	902	87	60	914	78	83	138	21
15	376	46	38	989	88	61	992	76	84	159	17
16	422	49	39	980,077	89	62	982,068	74	85	176	14
17	471	52	40	166	89	63	142	73	86	190	11
18	523	54	41	255	90	64	215	70	87	201	8
19	577	57	42	345	90	65	285	69	88	209	5
20	634	59	43	435	90	66	354	66	89	214	2
21	693	61	44	525	91	67	420	65	90	216	
22	754	64	45	616	91	68	485	61			
23	818		46	706		69	546				

Примечания к табл. 2-23а. [1]) Формула Гельмерта была предложена еще в 1901 г., но до настоящего времени не потеряла своего значения, как относительно простая. В 1930 г. Международным геофизическим конгрессом была принята новая формула:

$$g_\varphi = 978{,}049\,(1 + 0{,}0052884\,\sin^2\varphi - 0{,}0000059\,\sin^2 2\varphi).$$

Эта формула приводит к значениям g, несколько бо́льшим значений

Гельмерта, на 1—2 единицы во втором десятичном знаке. [2]) Единицу измерения g в системе CGS, равную 1 *см/сек*^{2}, очень часто называют *гал*. Табличные значения g, выраженные в *см/сек*^{2}, обычно даются с точностью до третьего десятичного знака, т. е. с точностью до миллигала.

Значение ускорения силы тяжести на высоте h над уровнем моря определяется приближенной формулой

$$g_h = g_0 - 0{,}0003086\,h, \qquad (2\text{-}31)$$

где g_0 обозначает ускорение силы тяжести на уровне моря; h должно быть выражено в метрах.

Этой формулой можно пользоваться при условии, что h весьма мало по сравнению с радиусом земного шара R ($h \ll R$, стр. 245).

Величина поправок (Δ_g) на высоту (h), выраженная в *см/сек*^{2}, для некоторых высот (в метрах) дана в таблице 2-23б.

Таблица 2-23б

h (*м*)	200	300	400	500	600	700	800	900
Δ_g(*см/сек*^{2})	0,0617	0,0926	0,1234	0,1543	0,1852	0,2160	0,2469	0,2777

В таблице 2-23в даны для некоторых пунктов на земной поверхности: 1) географические координаты (широта φ и долгота λ по Гринвичу), 2) высота над уровнем моря h (в метрах), 3) полученные из наблюдений значения g для этих пунктов (в *см/сек*^{2}) и 4) Δg — аномалии g (положительные и отрицательные), т. е. отклонения g от его нормального значения для данного пункта [1]); аномалии даны в 0,001 *см/сек*^{2}.

Таблица 2-23в

	φ	λ	h (*м*)	g (*см/сек*^{2})	Δg
Базель	47°33,6′	7°34,8′ в	277	980,778	+ 4
Вашингтон . .	38°53,6′	77°02,0′ з	0	980,118	+ 35
Гринвич . . .	51°28,6′	0°00,3′ в	47	981,189	— 6
Кэмбридж . .	52°12,9′	0°05,8′ в	25	981,265	— 1
Мадрид	40°24,5′	3°41,0′ в	656	979,981	— 34
Мюнхен . . .	48°09′	11°37′ в	525	980,733	— 18
Осло	59°54,7′	10°43,5′ в	28	981,927	+ 19
Оттава	45°23,6′	75°43,0′ з	83	980,622	— 17
Париж	48°50,2′	2°20,3′ в	61	980,943	— 13
Пулково . . .	59°46,3′	30°19,7′ в	71	981,899	+ 15
Рим	41°54′	12°30′ в	49	980,367	+ 34
Токио	35°42,6′	139°46,0′ в	18	979,801	+ 1

Примечание к табл. 2-23в. [1]) Обычно аномалии g (положительные и отрицательные) не выходят далеко за пределы, приведенные в таблице, но в отдельных пунктах известны аномалии, несколько превышающие 200 *гал*, например на Гаваи наблюдается аномалия g, равная + 209 *гал* (координаты: $\varphi = 19°29{,}8'$ С; $\lambda = 155°31{,}8'$ З, $h = 3970$ *м*).

Таблица 2-23г. Географические координаты некоторых наших городов

Географические координаты некоторых наших городов, необходимые для вычисления значений g (широта φ), приведены в табл. 2-23г. Значения долготы даны по меридиану Гринвича. Долгота Пулкова (обсерватория) по меридиану Гринвича равна 30°19,7'. При определении g в зависимости от высоты над уровнем моря следует пользоваться указанной выше формулой.

Город	Широта	Долгота	Город	Широта	Долгота
Актюбинск	50°17'	57°14'	Новосибирск	55° 1'	82°55'
Алма-Ата	43 16	76 57	Новочеркасск	47 25	40 6
Архангельск	64 34	40 31	Одесса	46 26	30 45
Астрахань	46 21	48 2	Омск	54 59	73 22
Ашхабад	37 45	58 23	Орел	52 58	36 4
Баку	40 21	49 51	Оренбург	51 45	55 7
Батуми	41 40	41 38	Охотск	59 21	143 17
Благовещенск	50 15	127 35	Пенза	53 11	45 2
Брянск	53 15	34 22	Пермь	58 1	56 16
Вильнюс	54 41	25 17	Петрозаводск	61 47	34 54
Витебск	55 10	30 12	Петропавловский порт	53 0	158 44
Владивосток	43 7	131 53	Полтава	49 35	34 34
Вологда	59 13	39 53	Псков	57 49	28 20
Воронеж	51 39	39 11	Рига	56 57	24 [illegible]
Горький	56 20	44 0	Ростов-на-Дону	47 13	39 43
Днепропетровск	48 28	35 4	Рязань	54 38	39 45
Енисейск	58 27	92 12	Самарканд	39 39	66 58
Ереван	40 14	44 30	Саратов	51 32	46 4
Житомир	50 15	28 40	Свердловск	56 49	60 35
Златоуст	55 10	59 41	Семипалатинск	50 24	80 15
Иваново	57 0	40 59	Симферополь	44 57	34 6
Иркутск	52 16	104 16	Смоленск	54 46	32 6
Казань	55 48	49 7	Сретенск	52 14	117 [illegible]
Калуга	54 31	36 15	Ставрополь	42 2	41 59
Каменец-Подольск	48 40	26 35	Сталинград	48 48	44 31
Киев	50 27	30 32	Сухуми	43 0	41 1
Киров	58 36	49 41	Таллин	59 27	24 45
Коканд	40 33	70 57	Тамбов	52 44	41 28
Кострома	57 46	40 56	Ташкент	41 19	69 19
Краснодар	45 3	38 57	Тбилиси	41 42	44 48
Красноярск	56 1	92 52	Тобольск	58 12	68 16
Куйбышев	53 11	50 5	Томск	56 30	84 58
Курск	51 44	36 13	Тула	54 12	37 37
Кутаиси	42 15	42 44	Улан-Удэ	51 50	107 35
Ленинград	59 57	30 18	Ульяновск	54 19	48 25
Львов	49 51	24 1	Фрунзе	42 53	74 37
Махач-Кала	42 59	47 30	Хабаровск	48 28	135 8
Минск	53 54	27 34	Харьков	50 0	36 14
Могилев	53 54	30 20	Челябинск	55 10	61 21
Москва	55 45	37 34	Чернигов	51 29	31 19
Мурманск	68 59	33 4	Чита	52 1	113 30
Наманган	41 0	71 38	Якутск	62 2	129 44
Нерчинск	51 58	116 35	Ялта	44 30	34 11
Николаев	46 58	31 59	Ярославль	57 38	39 52
Новгород	58 31	31 17			

Таблица 2-24. **Приведение показаний водяного манометра к ртутному**

При вычислении принято: 1) удельный вес воды при 4° С равен 1 *Г/см*^{3}; 2) удельный вес ртути при 0° равен 13,5955 *Г/см*^{3}. Показания манометров водяного и ртутного могут измеряться в произвольных, но одинаковых единицах измерения.

Вода	Ртуть	Вода	Ртуть	Вода	Ртуть	Вода	Ртуть	Вода	Ртуть
1	0,07	46	3,38	91	6,69	136	10,00	181	13,31
2	0,15	47	3,46	92	6,77	137	10,08	182	13,39
3	0,22	48	3,53	93	6,85	138	10,15	183	13,46
4	0,29	49	3,60	94	6,91	139	10,22	184	13,53
5	0,37	50	3,68	95	6,99	140	10,30	185	13,61
6	0,44	51	3,75	96	7,06	141	10,37	186	13,68
7	0,51	52	3,82	97	7,13	142	10,44	187	13,75
8	0,59	53	3,90	98	7,21	143	10,52	188	13,83
9	0,66	54	3,97	99	7,28	144	10,59	189	13,90
10	0,74	55	4,05	100	7,36	145	10,67	190	13,98
11	0,81	56	4,12	101	7,43	146	10,74	191	14,05
12	0,88	57	4,19	102	7,50	147	10,81	192	14,12
13	0,96	58	4,27	103	7,58	148	10,89	193	14,20
14	1,03	59	4,34	104	7,65	149	10,96	194	14,27
15	1,10	60	4,41	105	7,72	150	11,03	195	14,34
16	1,18	61	4,49	106	7,80	151	11,11	196	14,42
17	1,25	62	4,56	107	7,87	152	11,18	197	14,49
18	1,32	63	4,63	108	7,94	153	11,25	198	14,56
19	1,40	64	4,71	109	8,02	154	11,33	199	14,64
20	1,47	65	4,78	110	8,09	155	11,40	200	14,71
21	1,54	66	4,85	111	8,16	156	11,47	250	18,39
22	1,62	67	4,93	112	8,24	157	11,55	300	22,07
23	1,69	68	5,00	113	8,31	158	11,62	350	25,74
24	1,77	69	5,08	114	8,39	159	11,70	400	29,42
25	1,84	70	5,15	115	8,46	160	11,77	450	33,10
26	1,91	71	5,22	116	8,53	161	11,84	500	36,78
27	1,99	72	5,30	117	8,61	162	11,92	550	40,45
28	2,06	73	5,37	118	8,68	163	11,99	600	44,13
29	2,13	74	5,44	119	8,75	164	12,06	650	47,81
30	2,21	75	5,52	120	8,83	165	12,14	700	51,49
31	2,28	76	5,59	121	8,90	166	12,21	750	55,17
32	2,35	77	5,66	122	8,97	167	12,28	800	58,84
33	2,43	78	5,74	123	9,05	168	12,36	850	62,52
34	2,50	79	5,81	124	9,12	169	12,43	900	66,20
35	2,57	80	5,88	125	9,19	170	12,50	950	69,88
36	2,65	81	5,96	126	9,27	171	12,58	1000	73,55
37	2,72	82	6,03	127	9,34	172	12,65	1050	77,23
38	2,80	83	6,10	128	9,41	173	12,72	1100	80,91
39	2,87	84	6,18	129	9,49	174	12,80	1150	84,59
40	2,94	85	6,25	130	9,56	175	12,87	1200	88,26
41	3,02	86	6,33	131	9,64	176	12,95	1250	91,94
42	3,09	87	6,40	132	9,71	177	13,02	1300	96,52
43	3,16	88	6,47	133	9,78	178	13,09	1350	99,30
44	3,24	89	6,55	134	9,86	179	13,17	1400	102,98
45	3,31	90	6,62	135	9,93	180	13,24	1500	110,33

Таблица 2-25. Приведение показаний барометра к 0° С

Поправка барометра на температуру вычисляется по формуле

$$H_0 = H_t\,[1 - (\beta - \alpha)\,t], \qquad (2\text{-}32)$$

где H_0 — высота барометра, приведенная к 0° С; H_t — высота барометра, отсчитанная непосредственно, β и α — коэффициенты расширения соответственно ртути и латуни или стекла (материал шкалы барометра) и t — температура барометра при отсчете.

Для всех температур выше 0° С поправка отрицательна, для всех температур ниже 0° С поправка та же по абсолютной величине, но положительна. При вычислении поправок принято: $\beta = 0{,}000182$ *град* $^{-1}$, α (латуни) $= 0{,}000019$ *град* $^{-1}$ и α (стекла) $= 0{,}000008$ *град* $^{-1}$.

В таблице даны величины поправок $H_t \cdot t\,(\beta - \alpha)$ в миллиметрах для латунной шкалы барометра. При стеклянной шкале величину табличных поправок следует увеличить на $H_t \cdot t\,(0{,}000019 - 0{,}000008) = 0{,}000011\ H_t \cdot t$.

Эту величину для показаний барометра, близких к нормальному атмосферному давлению, можно принять равной в среднем 0,008 t *мм*.

$t°$	Высота барометра H (*мм* рт. ст.)											0,008 t
	680	690	700	710	720	730	740	750	760	770	780	
1	0,11	0,11	0,11	0,12	0,12	0,12	0,12	0,12	0,12	0,13	0,13	0,01
2	0,22	0,22	0,23	0,23	0,23	0,24	0,24	0,24	0,25	0,25	0,25	0,02
3	0,33	0,34	0,34	0,35	0,35	0,36	0,36	0,37	0,37	0,38	0,38	0,02
4	0,44	0,45	0,46	0,46	0,47	0,48	0,48	0,49	0,50	0,50	0,51	0,03
5	0,55	0,56	0,57	0,58	0,59	0,59	0,60	0,61	0,62	0,63	0,64	0,04
6	0,67	0,67	0,68	0,69	0,70	0,71	0,72	0,73	0,74	0,75	0,76	0,05
7	0,79	0,79	0,80	0,81	0,82	0,83	0,84	0,86	0,87	0,88	0,89	0,06
8	0,89	0,90	0,91	0,93	0,94	0,95	0,96	0,98	0,99	1,00	1,02	0,06
9	1,00	1,01	1,03	1,04	1,06	1,07	1,09	1,10	1,11	1,13	1,14	0,07
10	1,11	1,12	1,14	1,16	1,17	1,19	1,21	1,22	1,24	1,26	1,27	0,08
11	1,22	1,24	1,26	1,27	1,29	1,31	1,33	1,34	1,36	1,38	1,40	0,09
12	1,33	1,35	1,37	1,39	1,41	1,43	1,45	1,47	1,49	1,51	1,53	0,10
13	1,44	1,46	1,48	1,50	1,53	1,55	1,57	1,59	1,61	1,63	1,65	0,10
14	1,55	1,57	1,60	1,62	1,64	1,67	1,69	1,71	1,73	1,76	1,78	0,11
15	1,66	1,69	1,71	1,74	1,76	1,78	1,81	1,83	1,86	1,88	1,91	0,12
16	1,77	1,80	1,83	1,85	1,88	1,90	1,93	1,96	1,98	2,01	2,01	0,13
17	1,88	1,91	1,94	1,97	2,00	2,02	2,05	2,08	2,11	2,13	2,16	0,14
18	2,00	2,02	2,05	2,08	2,11	2,14	2,17	2,20	2,23	2,26	2,29	0,14
19	2,11	2,14	2,17	2,20	2,23	2,26	2,29	2,82	2,35	2,38	2,42	0,14
20	2,22	2,25	2,28	2,31	2,35	2,38	2,41	2,45	2,48	2,51	2,54	0,16
21	2,33	2,36	2,40	2,43	2,46	2,50	2,53	2,57	2,60	2,64	2,67	0,17
22	2,44	2,47	2,51	2,55	2,58	2,62	2,65	2,69	2,73	2,76	2,80	0,18
23	2,55	2,59	2,62	2,66	2,70	2,74	2,77	2,81	2,85	2,89	2,92	0,18
24	2,66	2,70	2,74	2,78	2,82	2,86	2,89	2,93	2,97	3,01	3,05	0,19
25	2,77	2,81	2,85	2,89	2,93	2,97	3,02	3,06	3,10	3,14	3,18	0,20
26	2,88	2,92	2,97	3,01	3,05	3,09	3,14	3,18	3,22	3,26	3,31	0,21
27	2,99	3,04	3,08	3,12	3,17	3,21	3,26	3,30	3,34	3,39	3,43	0,22
28	3,10	3,15	3,19	3,24	3,29	3,33	3,38	3,42	3,47	3,51	3,56	0,22
29	3,21	3,26	3,31	3,36	3,40	3,45	3,50	3,55	3,59	3,64	3,69	0,23
30	3,33	3,37	3,42	3,47	3,52	3,57	3,62	3,67	3,72	3,77	3,81	0,24
31	3,44	3,49	3,54	3,59	3,64	3,69	3,74	3,79	3,84	3,89	3,94	0,25
32	3,55	3,60	3,65	3,70	3,76	3,81	3,86	3,91	3,96	4,02	4,07	0,26
33	3,66	3,71	3,77	3,82	3,87	3,98	3,98	4,03	4,09	4,14	4,20	0,26
34	3,77	3,82	3,88	3,93	3,99	4,05	4,10	4,16	4,21	4,27	4,32	0,27
35	3,88	3,94	3,99	4,05	4,11	4,16	4,22	4,28	4,34	4,39	4,45	0,28

Таблица 2-26. Поправка барометра на капиллярную депрессию ртути

Числа таблицы показывают, на сколько миллиметров понижается середина ртутного мениска вследствие капиллярной депрессии в трубках различного диаметра и при различной высоте ртутного мениска.

Ртуть при 20° С; ее коэффициент поверхностного натяжения принят равным 450 *дн/см*; ускорение силы тяжести считается нормальным.

Диаметр трубки (*мм*)	Высота ртутного мениска (*мм*)								
	0,2	0,4	0,6	0,8	1,0	1,2	1,4	1,6	1,8
7	0,18	0,35	0,51	0,66	0,79	0,91	1,01	1,08	1,14
8	0,13	0,25	0,37	0,48	0,58	0,67	0,74	0,81	0,85
9	0,09	0,18	0,27	0,35	0,43	0,50	0,56	0,61	0,65
10	0,07	0,14	0,20	0,26	0,32	0,37	0,42	0,46	0,49
11	0,05	0,10	0,15	0,20	0,24	0,28	0,32	0,35	0,38
12	0,04	0,08	0,12	0,15	0,18	0,22	0,25	0,27	0,29
13	0,03	0,06	0,09	0,12	0,14	0,17	0,19	0,21	0,23
14	0,02	0,05	0,07	0,09	0,11	0,13	0,15	0,16	0,18

Таблица 2-27. Приведение веса тела к пустоте

Вес G тела в пустоте вычисляется из результатов непосредственного взвешивания по формуле

$$G = P + P\delta\left(\frac{1}{\gamma_1} - \frac{1}{\gamma_2}\right), \qquad (2\text{-}33)$$

где P — вес тела в воздухе; δ — удельный вес воздуха; γ_1 — удельный вес взвешиваемого тела и γ_2 — удельный вес материала разновесков. В табл. 2-27 даны значения величины $K \cdot 10^5$, где K отвечает формуле:

$$K = \delta\left(\frac{1}{\gamma_1} - \frac{1}{\gamma_2}\right). \qquad (2\text{-}34)$$

Поправка дана для латунного разновеса при различных значениях γ_1: от 0,7 до 20 $Г/см^3$. Величина K вычислена для веса тела, равного 1 $Г$; при вычислении K принято: удельный вес воздуха $\delta = 0{,}0012$ $Г/см^3$, удельный вес латуни $\gamma_2 = 8{,}4$ $Г/см^3$.

Для тел с удельным весом меньше 8,4 $Г/см^3$ (удельный вес латуни) поправка положительна, для тел с удельным весом больше 8,4 $Г/см^3$ поправка отрицательна.

γ_1	$10^5 \cdot K$	γ_1	$10^5 \cdot K$	γ_1	$10^5 \cdot K$	γ_1	$10^5 \cdot K$	γ_1	$10^5 \cdot K$
0,7	157	1,5	066	2,4	036	5.0	010	9	001
0,8	136	1,6	61	2,6	32	5.5	07 (5)	10	2
0,9	119	1,7	56	2,8	29	6.0	6	12	4
1,0	105	1,8	52	3,0	26	6,5	4	14	6
1,1	095	1,9	49	3,5	20	7,0	3	16	7
1,2	086	2,0	46	4,0	16	7,5	2	18	8
1,3	078	2,2	40	4,5	12	8.0	+1	20	8
1,4	071								

Таблицы 2-28 а и б. Приведение объема газа к 0° С и 760 *мм* рт. ст.

Объем V_0 газа при 0° С и давлении 760 *мм* рт. ст. и плотность ρ_0 газа при тех же условиях определяются по формулам:

$$V_0 = \frac{V_t}{1+\alpha_p t} \frac{H}{760}, \qquad (2\text{-}35)$$

$$\rho_0 = \rho_t (1+\alpha_p t) \frac{760}{H}, \qquad (2\text{-}36)$$

где t — температура газа; H — его давление, выраженное в *мм* рт. ст.; V_t и ρ_t — соответственно объем и плотность газа при температуре t °С и давлении H *мм* рт. ст. и α_p — коэффициент расширения газа при постоянном давлении. Эти формулы выведены в предположении, что газы следуют законам Бойля—Мариотта и Ге-Люссака. В таблицах даны значения величин: 1) $1+\alpha_p t$ в интервале температур от 0 до 124° С (табл. 28а) и 2) $\frac{H}{760}$ в интервале давлений от 700 до 849 *мм* рт. ст. (табл. 28б). При этих вычислениях принято, что коэффициент расширения газов при постоянном давлении $\alpha_p = 0{,}00367$ *град*$^{-1}$.

Таблица 2-28а

t (°С)	$1+\alpha_p t$	t (°С)	$1+\alpha_p t$	t (°С)	$1+\alpha_p t$	t (°С)	$1+\alpha_p t$	t (°С)	$1+\alpha_p t$
0	1,0000	25	1,0917	50	1,1835	75	1,2752	100	1,3670
1	1,0037	26	1,0954	51	1,1872	76	1,2789	101	1,3707
2	1,0073	27	1,0991	52	1,1908	77	1,2826	102	1,3743
3	1,0110	28	1,1028	53	1,1945	78	1,2863	103	1,3780
4	1,0147	29	1,1064	54	1,1982	79	1,2899	104	1,3817
5	1,0183	30	1,1101	55	1,2018	80	1,2936	105	1,3853
6	1,0220	31	1,1138	56	1,2055	81	1,2973	106	1,3890
7	1,0257	32	1,1174	57	1,2092	82	1,3009	107	1,3927
8	1,0294	33	1,1211	58	1,2129	83	1,3046	108	1,3964
9	1,0330	34	1,1248	59	1,2165	84	1,3083	109	1,4000
10	1,0367	35	1,1284	60	1,2202	85	1,3119	110	1,4037
11	1,0404	36	1,1321	61	1,2239	86	1,3156	111	1,4074
12	1,0440	37	1,1358	62	1,2275	87	1,3193	112	1,4110
13	1,0477	38	1,1395	63	1,2312	88	1,3230	113	1,4147
14	1,0514	39	1,1431	64	1,2349	89	1,3266	114	1,4184
15	1,0550	40	1,1468	65	1,2385	90	1,3303	115	1,4220
16	1,0587	41	1,1505	66	1,2422	91	1,3340	116	1,4257
17	1,0624	42	1,1541	67	1,2459	92	1,3376	117	1,4294
18	1,0661	43	1,1578	68	1,2496	93	1,3413	118	1,4331
19	1,0697	44	1,1615	69	1,2532	94	1,3450	119	1,4367
20	1,0734	45	1,1651	70	1,2569	95	1,3486	120	1,4404
21	1,0771	46	1,1688	71	1,2606	96	1,3523	121	1,4441
22	1,0807	47	1,1725	72	1,2642	97	1,3560	122	1,4477
23	1,0844	48	1,1762	73	1,2679	98	1,3597	123	1,4514
24	1,0881	49	1,1798	74	1,2716	99	1,3633	124	1,4551

Таблица 2-28б

H (*мм* рт. ст.)	$\frac{H}{760}$	H (*мм* рт. ст.)	$\frac{H}{760}$	H (*мм* рт. ст.)	$\frac{H}{760}$	H (*мм* рт. ст.)	$\frac{H}{760}$	H (*мм* рт. ст.)	$\frac{H}{760}$
700	0,9211	730	0,9605	760	1,0000	790	1,0395	820	1,0790
701	0,9224	731	0,9618	761	1,0013	791	1,0408	821	1,0803
702	0,9237	732	0,9632	762	1,0026	792	1,0421	822	1,0816
703	0,9250	733	0,9645	763	1,0039	793	1,0434	823	1,0829
704	0,9263	734	0,9658	764	1,0053	794	1,0447	824	1,0842
705	0,9276	735	0,9671	765	1,0066	795	1,0461	825	1,0855
706	0,9289	736	0,9684	766	1,0079	796	1,0474	826	1,0868
707	0,9303	737	0,9697	767	1,0092	797	1,0487	827	1,0882
708	0,9316	738	0,9711	768	1,0105	798	1,0500	828	1,0895
709	0,9329	739	0,9724	769	1,0118	799	1,0513	829	1,0908
710	0,9342	740	0,9737	770	1,0132	800	1,0526	830	1,0921
711	0,9355	741	0,9750	771	1,0145	801	1,0540	831	1,0934
712	0,9368	742	0,9763	772	1,0158	802	1,0553	832	1,0947
713	0,9382	743	0,9776	773	1,0171	803	1,0566	833	1,0961
714	0,9395	744	0,9789	774	1,0184	804	1,0579	834	1,0974
715	0,9408	745	0,9803	775	1,0197	805	1,0592	835	1,0987
716	0,9421	746	0,9816	776	1,0211	806	1,0605	836	1,1000
717	0,9434	747	0,9829	777	1,0224	807	1,0618	837	1,1013
718	0,9447	748	0,9842	778	1,0237	808	1,0632	838	1,1026
719	0,9461	749	0,9855	779	1,0250	809	1,0645	839	1,1040
720	0,9474	750	0,9868	780	1,0263	810	1,0658	840	1,1053
721	0,9487	751	0,9882	781	1,0276	811	1,0671	841	1,1066
722	0,9500	752	0,9895	782	1,0290	812	1,0684	842	1,1079
723	0,9513	753	0,9908	783	1,0303	813	1,0697	843	1,1092
724	0,9526	754	0,9921	784	1,0316	814	1,0711	844	1,1105
725	0,9539	755	0,9934	785	1,0329	815	1,0724	845	1,1118
726	0,9553	756	0,9947	786	1,0342	816	1,0737	846	1,1132
727	0,9565	757	0,9961	787	1,0355	817	1,0750	847	1,1145
728	0,9579	758	0,9974	788	1,0368	818	1,0763	848	1,1158
729	0,9592	759	0,9987	789	1,0382	819	1,0776	849	1,1171

Примечание к табл. 2-28. Принимая при вычислениях $\alpha_p = 0{,}00367\ град^{-1}$, мы получаем результаты, правильные, строго говоря, только для идеального газа. Для реальных газов необходимы поправки, так как термические коэффициенты газов отличаются от принятого для α_p значения. Однако величина этих поправок для большинства газов, таких, как водород, гелий, азот, воздух и т. п., лежит в шестом или (иногда) в пятом десятичном знаке, и первые четыре десятичных знака, данные в таблице, сохраняют свое значение. Только для тяжелых газов (сернистый газ, озон, хлор и т. п.) поправки могут переходить в четвертый десятичный знак.

Таблица 2-29. Плотность газов при 0° С и 760 *мм* рт. ст.

В табл. 2-29 даны: 1) плотность сухих газов при 0° С и 760 *мм* рт. ст., выраженная в *г/л*; 2) плотность газов по отношению к воздуху, вычисленная в предположении, что воздух и газы находятся в одинаковых условиях давления температуры.

При вычислении плотностей газов плотность воды, свободной от примесей, при 4° С принята равной 1,000 *г/см*³. Для получения плотности газов в системе СГС, т. е. в *г/см*³, следует табличные значения ρ разделить на 1000.

Газ	Формула	Мол. в.	ρ (*г/л*)	Плотн. отн. возд.
Азот	N_2	28,016	1,25049	0,967
Аммиак	NH_3	17,032	0,77140	0,596
Аргон	Ar	39,944	1,78364	1,380
Ацетилен	C_2H_2	26,038	1,1747	0,907
Бутан (изо-)	C_4H_{10}	58,125	2,7032	2,090
Водород	H_2	2,016	0,089882	0,0695
» бромистый	HBr	80,92	3,6445	2,8189
» иодистый	HI	127,92	5,7891	4,4776
» кремнистый	SiH_4	32,12	1,44	1,114
» мышьяковистый (арсин)	AsH_3	77,93	3,484	2,695
Водород селенистый	H_2Se	80,98	3,670	2,839
» сурмянистый (стибин)	SbH_3	124,78	5,30	4,10
» теллуристый	H_2Te	129,63	5,81	4,49
» фосфористый (фосфин)	PH_3	34,00	1,5294	1,1829
Водород фтористый	HF	20,01	0,921	0,7123
» хлористый	HCl	36,47	1,6392	1,2678
» цианистый	HCN	27,027	0,901	0,697
Воздух (свободный от CO_2)	—	≈28,97	1,293	1
Гелий	He	4,003	0,17846	0,138
Двуокись хлора	ClO_2	67,46	3,09	2,39
Закись азота	N_2O	44,016	1,9775	1,530
Кислород	O_2	32,000	1,42896	1,105
Кремний четырехфтористый	SiF_4	169,92	4,684	3,623
Криптон	Kr	83,80	3,743	2,89
Ксенон	Xe	131,3	5,851	4,525
Метан	CH_4	16,043	0,71682	0,554
Метил хлористый	CH_3Cl	50,49	2,3076	1,7848
Метиламин	CH_3NH_2	31,06	1,396	1,080
Неон	Ne	20,183	0,89990	0,696
Окись азота	NO	30,008	1,340	1,037
Окись углерода	CO	28,011	1,250	0,967
Пропан	$(CH_3)_2CH_2$	44,09	2,0096	1,554
Радон	Rn	222,00	9,96	7,703
Сернистый газ	SO_2	64,066	2,92655	2,264
Сероводород	H_2S	34,082	1,538	1,198
Триметиламин	$(CH_3)_3N$	59,11	2,580	1,996
Углекислый газ	CO_2	44,011	1,977	1,529
Фтор	F_2	38,00	1,696	1,312
Хлор	Cl_2	70,914	3,214	2,485
Циан	C_2N_2	52,038	2,335	1,798
Цианистый водород	HCN	27,027	0,901	0,697
Этан	C_2H_6	30,07	1,356	1,049
Этилен	C_2H_4	28,054	1,26035	0,975

Таблица 2-30. **Плотность сухого воздуха при разных температурах**

Плотность ρ_t воздуха при температуре t вычисляется по формуле

$$\rho_t = \rho_0 \frac{H}{(1+\alpha_p t)\cdot 760}, \qquad (2\text{-}37)$$

где ρ_0 — плотность воздуха при температуре 0° С и давлении 760 *мм* рт. ст.; H — давление воздуха при температуре $t°$ С, выраженное также в *мм* рт. ст.; и α_p — коэффициент расширения воздуха при постоянном давлении. В таблице 2-30 даны значения величины $\rho_t \cdot 10^3$, где ρ_t определяется формулой (2-37), в интервале температур от 0 °С до 35° С и в интервале давлений от 700 до 780 *мм* рт. ст. для сухого воздуха с содержанием углекислоты (CO_2) не более чем 0,04% по объему. При вычислении принято: плотность воздуха при 0° С и 760 *мм* рт. ст. $\rho_0 = 0{,}0012932$ *г/см*^{3} и коэффициент расширения воздуха при постоянном давлении $\alpha_p = 0{,}00367$ *град*$^{-1}$.

t(°C)	H (*мм* рт. ст.)								
	700	710	720	730	740	750	760	770	780
0	0,1191	0,1208	0,1225	0,1242	0,1259	0,1276	0,1293	0,1310	0,1327
1	1187	1204	1221	1238	1255	1272	1288	1305	1322
2	1182	1199	1216	1233	1250	1267	1284	1300	1318
3	1178	1195	1212	1229	1245	1262	1279	1296	1313
4	1174	1191	1207	1224	1241	1258	1274	1291	1308
5	1170	1186	1203	1220	1236	1253	1270	1287	1303
6	1165	1182	1199	1215	1232	1249	1265	1282	1299
7	1161	1178	1194	1211	1228	1244	1261	1277	1294
8	1157	1174	1190	1207	1123	1240	1256	1273	1289
9	1153	1169	1186	1202	1219	1235	1252	1268	1285
10	1149	1165	1182	1198	1215	1231	1247	1264	1280
11	1145	1161	1178	1194	1210	1227	1243	1259	1276
12	1141	1157	1173	1190	1206	1222	1239	1255	1271
13	1137	1153	1169	1186	1202	1218	1234	1251	1267
14	1133	1149	1165	1181	1198	1214	1230	1246	1262
15	1129	1145	1161	1177	1193	1210	1226	1242	1258
16	1125	1141	1157	1173	1189	1205	1221	1238	1254
17	1121	1137	1153	1169	1185	1201	1217	1233	1249
18	1117	1133	1149	1165	1181	1197	1213	1229	1245
19	1113	1129	1145	1161	1177	1193	1209	1225	1241
20	1110	1126	1141	1157	1173	1189	1205	1221	1236
21	1106	1122	1137	1153	1169	1185	1201	1216	1232
22	1102	1118	1134	1149	1165	1181	1197	1212	1228
23	1098	1114	1130	1145	1161	1177	1193	1208	1224
24	1095	1110	1126	1142	1157	1173	1189	1204	1220
25	1091	1107	1122	1138	1153	1169	1185	1200	1216
26	1087	1103	1118	1134	1149	1165	1181	1196	1212
27	1084	1099	1115	1130	1146	1161	1177	1192	1208
28	1080	1096	1111	1126	1142	1157	1173	1188	1204
29	1077	1092	1107	1123	1138	1153	1169	1184	1200
30	1073	1088	1104	1119	1134	1150	1165	1180	1196
31	1069	1085	1100	1115	1130	1146	1161	1176	1192
32	1065	1081	1096	1112	1126	1142	1157	1172	1188
33	1062	1077	1093	1108	1122	1138	1153	1168	1184
34	1058	1073	1089	1104	1117	1134	1149	1164	1180
35	1054	1069	1035	1001	1112	1130	1145	1160	1176

Таблица 2-31. Плотность жидких и твердых тел

Значения плотности D выражены в $г/см^3$ и относятся к средней комнатной температуре 15—20° С. При вычислении плотностей тел плотность воды, свободной от примесей, при 4° С принята равной 1,0000 $г/см^3$.

Таблица 2-31а

	D ($г/см^3$)		D ($г/см^3$)
Агат	2,5—2,7	Кальций	1,55
Алебастр	2,7—2,8	Камфора	0,99
Алмаз	3,4—3,5	Канифоль	1,07—1,1
Алюминий	2,70	Каолин	2,4—2,6
» литой	2,56	Каучук натуральный	0,92—0,93
» прокатанный	2,6—2,7	Кварц	2,5—2,8
Анилин	1,03	Квасцы (ал.-кал.)	1,75
Асбест	2,2—3,2	» (ал.-амм.)	1,64
Ацетон	0,792	Керосин	0,80—0,82
Баббит	7,1—9,5	Кобальт	8,7
Барий	3,5	Константан [2])	8,9
Бензин	0,7—0,8	Корунд	3,9—4,1
Бензол	0,879	Кость	1,8—2,0
Бериллий	1,82	» слоновая	2,0
Бром	3,14	Кремний	см. кварц
Бронза (Cu, Sn)	8,5—8,9	Ксилол (орто-)	0,88
» (Cu, Al)	7,6—7,8	Латунь	8,5—8,7
Бумага писчая	0,7—1,1	» литая	8,4—8,6
Бура	1,7—1,8	Лед (0° С)	0,89—0,92
Ванадий	6,02	Магний	1,74
Висмут	9,80	Малахит	3,9—4,1
Вода морская	1,03	Манганин [3])	8,5
» тяжелая	1,1053	Марганец	7,4
Вольфрам	19,3	Медь	8,92
Воск	0,87—0,99	» литая	8,6—8,8
Гипосульфит	1,73	» прокатанная	8,8—8,9
Гипс крист.	2,2—2,4	Мел	1,9—2,6
» обожженный	2,7—2,8	Молибден	10,2
Глицерин безводный	1,2604	Мрамор	2,6—2,8
Гранит	2,5—2,8	Наждак	ок. 4,0
Гуммигут	1,20	Натрий	0,97
		Нафталин	1,15
Дерево сухое:		Нашатырь	1,5—1,6
бакаут	1,1—1,4	Нейзильбер [4])	8,4—8,7
бамбук	0,4	Нефть	0,73—0,94
береза	0,6—0,8	Никелин [5])	8,5
дуб	0,7—1,0	Никель	8,9
ель, сосна	0,4—0,7	Нитробензол	1,21
черное	1,1—1,3	Нитроглицерин	1,60
ясень	0,6—0,8	Нихром [6])	8,1—8,4
Дюралюминий (дюраль)	2,7—2,9	Олово	7,29
Железо	7,9	Палладий	11,9
» прокатанное	7,6—7,8	Парафин	0,87—0,92
» армко	7,86	Пемза	0,4—0,9
Золото	19,32	Пермаллой [7])	8,6
Инвар [1])	8,0	Платина	21,45
Кадмий	8,65	Платинит [8])	8,2
Калий	0,86	Пробка	0,22—0,26

Продолжение

	D (г/см³)		D (г/см³)
Радий	5	Тантал	16,6
Родий	12,4	Толуол	0,867
Ртуть	13,55	Турмалин	2,9—3,2
Рубидий	1,53		
Сахар (раф.)	1,6	Углерод:	
Свинец	11,34	» алмаз	3,4—3,5
Селитра амм.	1,73	» графит	2,3—2,7
» кал.	2,11	» уголь (древесный)	0,2—0,4
» натр.	2,26	Уксусная кислота	1,049
Сера ромб.	2,07	Уран	18,7
» моноклин.	1,96	Фарфор	2,2—2,5
Серебро	10,50	Фосфор белый	1,82
Сероуглерод	1,263	» красный	2,20
Скипидар	0,86—0,87	Хлороформ	1,498
Слюда	2,7—2,9	Хром	6,8—7,2
Соль поваренная	2,16	Хромель [10]	8,24
» каменная	2,1—2,2	Целлулоид	1,4
Спирт амил.	0,815	Цинк	7,1
» метил.	0,791	» литой	6,9—7,0
» этил.	0,789	» прокатанный	7,1—7,2
Сплав Вуда [9]	9,7	Чугун	7,0—7,8
Сталь	7,7—7,9	Шпат известковый	2,6—2,8
Стекло оконное	2,4—2,6	» исландский	2,71
» флинт.	2,9—5,9	» плавиковый	3,0—3,2
Стекло (хрусталь)	2,9—3,0	» полевой	2,5—2,7
Стронций	2,6	» тяжелый	4,3—4,6
Сурьма	6,62	Эбонит	1,2
Тальк	2,7—2,8	Янтарь	1,05—1,09

Примечания к табл. 2-31а. [1]) Сплав состава: 63,8% Fe + 36% Ni + 0,2% C. [2]) Сплав состава: 60% Cu + 40% Ni, иногда к нему добавляют небольшое количество (1,5%) алюминия за счет снижения содержания меди. [3]) Сплав состава: 84% Cu + 12% Mn + 4% Ni. [4]) Сплав состава: 65% Cu + 20% Zn + 15% Ni. [5]) По составу и свойствам близок к нейзильберу, иногда добавляют небольшие количества железа и марганца. [6]) Сплав состава: 61% Ni + 23% Fe + 16% Cr, применяются также сплавы состава: 80% Ni + 20% Cr. [7]) Сплав состава: 78,5% Ni + 21,5% Fe. [8]) Сплав состава: 46% Ni + 54% Fe, используется в вакуумной технике в качестве заменителя платины. [9]) Принадлежит к числу легкоплавких сплавов, состава: 25% Pb + 12,5% Sn + 50% Bi + 12,5% Cd, температура плавления около 60,5° C. [10]) Сплав состава: 90% Ni + 9,5% Cr.

Таблица 2-31б

Плотность некоторых тяжелых жидкостей

Жидкость	Плотность (г/см³)
1. Тетрабромэтан (растворяется в четыреххлористом углероде и бензоле)	2,964 при 20° C
2. Иодистый метилен (растворяется в тех же жидкостях)	3,325 при 20° C
3. Жидкость Клеричи (водные растворы некоторых органических соединений таллия)	до 4,9

Таблица 2-31в

Алюминий — медь

Al (%)	D (г/см³)
0	8,92
0,10	8,90
1,06	8,78
2,10	8,62
2,99	8,47
4,06	8,31
5,07	8,18
5,76	8,07
6,73	7,95
7,35	7,85
8,12	7,78
8,67	7,69
9,38	7,61
9,90	7,56
10,78	7,45
11,73	7,35
13,02	7,23

Золото — медь

Cu (%)	D (г/см³)
0	19,32
1,99	18,839
3,12	18,581
4,17	18,356
5,16	18,117
6,15	17,934
6,80	17,791
7,92	17,568
9,95	17,165
11,95	16,806
13,86	16,483

Золото — серебро

Ag (%)	D (г/см³)
0	19,32
8,4	18,041
12,0	17,540
21,5	16,354
35,4	14,870
52,2	13,432
68,7	12,257
76,7	11,760
100,0	10,50

Медь — олово

Sn (%)	D (г/см³)
0	8,92
3,8	8,79
5,6	8,78
7,4	8,76
9,0	8,76
10,7	8,80
12,3	8,81
13,8	8,83
25,0	8,87
28,0	8,903
39,2	8,980
42,0	8,791
50,0	8,760
56,0	8,357
59,0	8,210
70,3	7,972
78,4	7,726
80,0	7,735
100,0	7,29

Медь — цинк

Zn (%)	D (г/см³)
0	8,92
19,8	8,459
52,4	8,149
53,5	8,143
61,4	7,976
63,7	7,951
65,4	7,904
67,1	7,873
68,4	7,833
76,4	7,714
85,0	7,595
87,9	7,481
94,1	7,311
100,0	7,1

Олово — кадмий

Sn (%)	D (г/см³)
0	8,65
14,7	8,432
20,6	8,336
34,1	8,139
50,8	7,904
67,5	7,690
80,6	7,489
86,2	7,494

Олово — свинец

Sn (%)	D (г/см³)
0	11,34
8,5	10,815
12,3	10,590
21,8	10,080
35,9	9,460
52,8	8,779
69,2	8,188
77,0	7,927
100,0	7,29

Некоторые отдельные сплавы	D (г/см³)
94Al, 4Cu, 0,5Mg, 0,5Mn (+1% примеси)	2,96
90Al, 10Mg (магналий)	2,50
70Al, 30Mg (то же)	2,00
53Bi, 40Pb, 7Sn (точка плавления ок. 96° C)	10,56
95,5Cu, 4,3Sn, 0,2P (фосфористая бронза)	8,91
79,7Cu, 10Sn, 9,5Sb, 0,8P (то же)	8,8
59Cu, 30Zn, 11Ni (немецкое серебро)	8,34
26,3Cu, 36,9Zn, 36,8Ni (то же)	8,30
90Cu, 10Zn (пушечная бронза)	8,78

Таблицы 2-32 а и б. Плотность и удельный объем воды при разных температурах

Плотность D тела и его удельный объем v связаны соотношением $v = V/m = 1/D$, где m — масса тела и V — его объем. При вычислении плотности и удельного объема воды в интервале температур от 0 до 35° С принято: 1) плотность D воды при 4° С равна 1,00000 $г/см^3$; 2) удельный объем v воды при 4° С равен 1,00000 $см^3/г$.

В таблице 2-32а даны значения плотности и удельного объема воды в интервале температур от 0° до 35° С. В таблице 2-32б даны более точные значения плотности воды в интервале температур от 16° до 24° С через 0,1°.

Таблица 2-32а

t (°С)	D ($г/см^3$)	v ($см^3/г$)	t (°С)	D ($г/см^3$)	v ($см^3/г$)	t (°С)	D ($г/см^3$)	v ($см^3/г$)
0	0,99987	1,00013	12	0,99952	1,00048	24	0,99732	1,00268(5)
1	993	007	13	940	060	25	707	294
2	997	003	14	927	073	26	681	320
3	999	001	15	913	087	27	654	347
4	1,00000	1,00000	16	897	103	28	626	375(5)
5	0,99999	001	17	880	120	29	597	405
6	997	003	18	862	138	30	567	435
7	993	007	19	843	157	31	537	465(5)
8	988	012	20	823	177	32	505	497
9	981	019	21	202	198(5)	33	473	530
10	973	027	22	779(5)	221	34	440	563
11	963	037	23	756	224	35	406	593

Таблица 2-32б

t (°С)	D ($г/см^3$)	t (°С)	D ($г/см^3$)	t (°С)	D ($г/см^3$)	t (°С)	D ($г/см^3$)
16,0	0,998970	18,0	0,998623	20,0	0,998232	22,0	0,997799
1	998954	1	998604	1	998211	1	997776
2	998937	2	998586	2	998191	2	997753
3	998921	3	998567	3	998170	3	997730
4	998904	4	998548	4	998149	4	997707
5	998888	5	998529	5	998128	5	997684
6	998871	6	998510	6	998107	6	997661
7	998854	7	998491	7	998085	7	997637
8	998836	8	998472	8	998064	8	997614
9	998819	9	998453	9	998043	9	997591
17,0	0,998802	19,0	0,998433	21,0	0,998021	23,0	0,997567
1	998785	1	998413	1	997999	1	997543
2	998767	2	998394	2	997977	2	997520
3	998749	3	998374	3	997956	3	997496
4	998732	4	998354	4	997934	4	997472
5	998714	5	998334	5	997911	5	997448
6	998696	6	998314	6	997889	6	997424
7	998678	7	998293	7	997867	7	997399
8	998660	8	998273	8	997844	8	997375
9	998641	9	998253	9	997822	9	997351

Таблицы 2-33. **Плотность и удельный объем ртути в интервале температур от 0 до 100° С**

Значения плотности ртути (табл. 2-33а) даны в *г/см*³ с точностью до 0,0001 *г/см*³. При вычислении принято: 1) плотность воды, свободной от примесей, при 4° С равна 1,00000 *г/см*³; 2) плотность ртути при 0° равна 13,5955 *г/см*³.

Значения удельного объема ртути (табл. 2-33б) даны в условных единицах с точностью до 0,0001 по отношению к ее удельному объему при 0° С, который принят равным 1,0000.

t° (дес. град.)	Градусы									
	0°	1°	2°	3°	4°	5°	6°	7°	8°	9°
Таблица 2-33а										
0	13,5955	5930	5905	5880	5856	5831	5806	5782	5757	5732
10	5708	5683	5658	5634	5609	5584	5560	5535	5511	5486
20	5461	5437	5412	5388	5363	5339	5314	5290	5265	5241
30	5216	5191	5167	5142	5118	5094	5069	5045	5020	4996
40	4971	4947	4922	4898	4873	4849	4825	4800	4776	4751
50	4727	4703	4678	4654	4630	4605	4581	4557	4532	4508
60	4484	4459	4435	4411	4386	4362	4338	4314	4289	4265
70	4241	4217	4192	4168	4144	4120	4095	4071	4047	4023
80	3999	3975	3950	3926	3902	3878	3854	3830	3806	3781
90	3757	3733	3709	3685	3661	3637	3613	3589	3565	3541
100	3516	3492	—	—	—	—	—	—	—	—
Таблица 2-33б										
0	1,0000	0002	0004	0005(5)	0007	0009	0011	0013	0014(5)	0016
10	0018	0020	0022	0024	0025(5)	0027	0029	0031	0033	0035
20	0036	0038	0040	0042	0044	0045(5)	0048	0049	0051	0053
30	0055	0056	0058	0060	0062	0064	0066	0067	0069	0071
40	0073	0075	0076(5)	0078	0080	0082	0084	0086	0087(5)	0089
50	0091	0093	0095	0097	0098	0100	0102	0104	0106	0107(5)
60	0109	0111	0113	0115	0117	0118(5)	0120	0122	0124	0126
70	0128	0129(5)	0131	0133	0135	0137	0139	0140(5)	0142	0144
80	0146	0148	0150	0151(5)	0153	0155	0157	0159	0161	0162
90	0164	0166	0168	0170	0172	0173	0175	0177	0179	0181
100	0183	0184	—	—	—	—	—	—	—	—

Таблица 2-34. Плотность водных растворов некоторых солей и кислот при 15°С

Концентрация C раствора выражена в процентах, которые определяют число граммов тела, содержащихся в 100 г раствора. Тела при растворении предполагаются обезвоженными. Значения плотности в $г/см^3$ интерполированы для целых процентных чисел с точностью до 0,0001 $г/см^3$, при этом плотность воды, свободной от примесей, при 4 и 15° С принята равной соответственно: $D_4 = 1{,}00000$ $г/см^3$ и $D_{15} = 0{,}99913$ $г/см^3$.

Раствор	Концентрация C (%)											
	2	4	6	8	10	15	20	25	30	35	40	50
$AlCl_3$	1,0135	0279	0425	0574	0724	1071	1526	1958	2414	2794	3399	—
$BaCl_2$	1,0174	0357	0547	0744	0940	1477	2048	2431	—	—	—	—
$CaCl_2$	1,0161	0332	0505	0682	0858	1326	1810	2328	2868	3431	4016	—
$CuSO_4$	1,0185	0412	0642	0870	1098	1738	—	—	—	—	—	—
KCl	1,0121	0251	0332	0515	0648	0993	1349	—	—	—	—	—
K_2CO_3	1,0174	0356	0541	0730	0917	1409	1910	2547	3011	3576	4170	5428
KNO_3	1,0119	0248	0377	0510	0642	0988	1348	—	—	—	—	—
KOH	1,0175	0359	0544	0730	0918	1396	1884	2387	2905	3440	3991	5143
LiCl	1,0112	0231	0343	0452	0574	0362	1164	1483	1807	2163	2543	—
$MgSO_4$	1,0197	0402	0613	0828	1042	1513	2208	2825	—	—	—	—
$MnCl_2$	1,0182	0363	0545	0716	0896	1378	1875	2435	3045	3705	4411	—
NaCl	1,0137	0282	0429	0577	0726	1105	1497	1904	—	—	—	—
Na_2CO_3	1,0201	0410	0621	0833	1045	—	—	—	—	—	—	—
Na_2SO_4	1,0173	0355	0540	0727	0917	—	—	—	—	—	—	—
NaOH	1,0219	0443	0666	0889	1111	1665	2219	2771	3312	3838	4343	5303
NH_4Cl	1,0054	0117	0179	0239	0299	0441	0583	0720	—	—	—	—
$(NH_4)_2SO_4$	1,0099	0214	0328	0443	0558	0844	1130	1434	1724	2004	2284	2890
$Pb(CH_3CO_3)_2$	1,0145	0296	0447	0598	0761	1190	1652	2148	2655	3275	3869	—
Кислоты:												
азотная (HNO_3)	1,0105	0219	0334	0450	0565	0874	1191	1505	1870	2188	2509	3157
соляная (HCl)	1,0093	0193	0292	0292	0491	0748	0999	1261	1519	1779	2047	—
уксусная ($C_2H_4O_2$)	1,0033	0069	0106	0142	0176	0262	0343	0420	0493	0573	0622	0730

Таблица 2-35. Плотность водных растворов серной кислоты в интервале температур от 0 до 40° С

Концентрация C растворов серной кислоты выражена в процентах, которые определяют число граммов серной кислоты, содержащихся в 100 *г* раствора. Значения плотности выражены в *г/см*^{3} и интерполированы для целых процентных чисел с точностью до 0,0001 *г/см*^{3}; плотность воды, свободной от примесей, при 4° С принята равной 1,00000 *г/см*^{3}.

C (%)	Температура							
	0°	5°	10°	15°	20°	25°	30°	40°
0	0,9999	1,0000	0,9997	0,9991	0,9982	0,9971	0,9957	0,9922
1	1,0075	1,0073	1,0069	1,0061	1,0051	1,0038	1,0022	0,9986
2	1,0147	1,0144	1,0138	1,0129	1,0118	1,0104	1,0087	1,0050
3	1,0219	1,0214	1,0206	1,0197	1,0184	1,0169	1,0152	1,0113
4	1,0291	1,0284	1,0275	1,0264	1,0250	1,0234	1,0216	1,0176
5	1,0364	1,0358	1,0344	1,0332	1,0317	1,0300	1,0271	1,0240
6	1,0437	1,0426	1,0414	1,0400	1,0384	1,0367	1,0347	1,0305
7	1,0511	1,0498	1,0485	1,0469	1,0453	1,0434	1,0414	1,0371
8	1,0585	1,0571	1,0556	1,0539	1,0522	1,0502	1,0482	1,0437
9	1,0660	1,0644	1,0628	1,0610	1,0591	1,0571	1,0549	1,0503
10	1,0735	1,0718	1,0700	1,0681	1,0661	1,0640	1,0617	1,0570
11	1,0810	1,0792	1,0773	1,0753	1,0731	1,0709	1,0686	1,0637
12	1,0886	1,0866	1,0846	1,0825	1,0803	1,0780	1,0756	1,0705
13	1,0962	1,0942	1,0920	1,0898	1,0874	1,0851	1,0826	1,0774
14	1,1039	1,1017	1,0994	1,0971	1,0947	1,0922	1,0897	1,0844
15	1,1116	1,1093	1,1069	1,1045	1,1020	1,0994	1,0968	1,0914
16	1,1194	1,1170	1,1145	1,1120	1,1094	1,1067	1,1040	1,0985
17	1,1272	1,1247	1,1221	1,1195	1,1168	1,1141	1,1113	1,1057
18	1,1351	1,1325	1,1298	1,1270	1,1243	1,1215	1,1187	1,1129
19	1,1430	1,1403	1,1375	1,1347	1,1318	1,1290	1,1261	1,1202
20	1,1510	1,1481	1,1453	1,1424	1,1394	1,1365	1,1335	1,1275
22	1,1670	1,1640	1,1609	1,1579	1,1548	1,1517	1,1486	1,1424
24	1,1832	1,1800	1,1768	1,1736	1,1704	1,1672	1,1640	1,1576
26	1,1996	1,1962	1,1929	1,1896	1,1863	1,1829	1,1796	1,1730
28	1,2161	1,2126	1,2091	1,2057	1,2023	1,1989	1,1955	1,1887
30	1,2326	1,2291	1,2255	1,2220	1,2185	1,2150	1,2115	1,2046
32	1,2493	1,2457	1,2421	1,2385	1,2349	1,2314	1,2278	1,2207
34	1,2661	1,2625	1,2588	1,2552	1,2515	1,2479	1,2443	1,2371
36	1,2831	1,2794	1,2757	1,2720	1,2684	1,2647	1,2610	1,2538
38	1,3004	1,2966	1,2929	1,2891	1,2854	1,2817	1,2780	1,2707
40	1,3179	1,3141	1,3103	1,3065	1,3028	1,2991	1,2953	1,2879
42	1,3357	1,3318	1,3280	1,3242	1,3204	1,3167	1,3129	1,3055
44	1,3538	1,3500	1,3461	1,3423	1,3384	1,3346	1,3309	1,3234
46	1,3724	1,3685	1,3646	1,3607	1,3569	1,3530	1,3492	1,3417
48	1,3915	1,3875	1,3736	1,3796	1,3757	1,3719	1,3680	1,3604
50	1,4110	1,4070	1,4030	1,3990	1,3951	1,3911	1,3872	1,3795
55	1,4618	1,4577	1,4535	1,4494	1,4453	1,4412	1,4372	1,4293
60	1,5154	1,5111	1,5067	1,5024	1,4982	1,4940	1,4898	1,4816

Таблица 2-36. **Плотность водных растворов этилового спирта при 15° С**

При растворении этилового спирта в воде наблюдается значительное уменьшение объема раствора по сравнению с объемом той и другой жидкостей до их смешения. Уменьшение объема возрастает с увеличением концентрации спирта и при концентрации 45,88% достигает максимума, равного 4,12% начального объема обеих жидкостей.

В таблице концентрация С растворов этилового спирта выражена в процентах, которые определяют число граммов безводного этилового спирта, содержащихся в 100 *г* раствора. Значения плотности выражены в *г/см*^{3} с точностью до 0,00001 *г/см*^{3}; плотность воды, свободной от примесей, при 4° С принята равной 1,00000 *г/см*^{3}.

С (%)	Плотность	*С* (%)	Плотность	*С* (%)	Плотность
1	0,99725	36	0,94656	71	0,86952
2	99544	37	94470	72	86714
3	99368	38	94281	73	86475
4	99198	39	94087	74	86235
5	99034	40	93891	75	85995
6	98877	41	93692	76	85754
7	98726	42	93489	77	85512
8	98581	43	93284	78	85268
9	98443	44	93076	79	85024
10	98308	45	92866	80	84779
11	98177	46	92654	81	84533
12	98050	47	92439	82	84285
13	97925	48	92223	83	84035
14	97803	49	92005	84	83784
15	97683	50	91785	85	83532
16	97563	51	91565	86	83277
17	97443	52	91342	87	83019
18	97324	53	91118	88	82760
19	97203	54	90893	89	82497
20	97080	55	90667	90	82233
21	96956	56	90441	91	81965
22	96829	57	90214	92	81692
23	96699	58	89985	93	81417
24	96566	59	89756	94	81137
25	96429	60	89526	95	80853
26	96290	61	89296	96	80564
27	96145	62	89064	97	80269
28	95997	63	88832	98	79971
29	95844	64	88599	99	79665
30	95687	65	88366	100	79356
31	95525	66	88132		
32	95360	67	87898		
33	95190	68	87662		
34	95016	69	87426		
35	94838	70	87189		

Таблица 2-37. Плотность водных растворов сахара в интервале температур от 10 до 50° С

Концентрация C раствора выражена в процентах, которые определяют число граммов чистого сахара, содержащихся в 100 *г* раствора. Значения плотности выражены в $г/см^3$ и интерполированы для целых процентных чисел с точностью до 0,00001 $г/см^3$, при этом плотность воды, свободной от примесей, при 4° С принята равной 1,00000 $г/см^3$.

C (%)	Температура						
	10°	15°	20°	25°	30°	40°	50°
0	0,99973	0,99913	0,99823	0,99707	0,99567	0,99232	0,98813
1	1,00365	1,00301	1,00212	1,00093	0,99952	0,99615	0,99197
2	1,00760	1,00693	1,00602	1,00481	1,00340	1,00001	0,99575
3	1,01157	1,01087	1,00993	1,00872	1,00731	1,00387	0,99958
4	1,01557	1,01484	1,01388	1,01266	1,01124	1,00777	1,00346
5	1,01960	1,01884	1,01785	1,01661	1,01518	1,01169	1,00735
6	1,02366	1,02287	1,02186	1,02060	1,01916	1,01563	1,01127
7	1,02774	1,02692	1,02588	1,02461	1,02316	1,01960	1,01521
8	1,03185	1,03100	1,02994	1,02864	1,02717	1,02359	1,01918
9	1,03599	1,03512	1,03403	1,03271	1,03122	1,02761	1,02319
10	1,04016	1,03925	1,03814	1,03679	1,03530	1,03165	1,02198
11	1,04437	1,04343	1,04229	1,04092	1,03940	1,03573	1,03126
12	1,04859	1,04762	1,04646	1,04507	1,04353	1,03982	1,03533
13	1,05286	1,05186	1,05066	1,04925	1,04770	1,04395	1,03943
14	1,05714	1,05612	1,05490	1,05346	1,05189	1,04809	1,04356
15	1,06146	1,06041	1,05917	1,05772	1,05612	1,05229	1,04772
16	1,06581	1,06473	1,06346	1,06198	1,06035	1,05650	1,05191
17	1,07020	1,06909	1,06779	1,06629	1,06464	1,06074	1,05614
18	1,07461	1,07347	1,07215	1,07062	1,06896	1,06502	1,06038
19	1,07906	1,07789	1,07654	1,07499	1,07329	1,06933	1,06467
20	1,08353	1,08233	1,08096	1,07940	1,07767	1,07366	1,06898
22	1,09260	1,09134	1,08990	1,08830	1,08652	1,08244	1,07771
24	1,10178	1,10046	1,09897	1,09731	1,09550	1,09135	1,08657
26	1,11110	1,10972	1,10818	1,10647	1,10461	1,10039	1,09557
28	1,12056	1,11911	1,11751	1,11575	1,11386	1,10957	1,10470
30	1,13014	1,12863	1,12698	1,12517	1,12324	1,11888	1,11398
32	1,13988	1,13831	1,13660	1,13474	1,13276	1,12834	1,12340
34	1,14975	1,14811	1,14634	1,14443	1,14241	1,13794	1,13295
36	1,15976	1,15806	1,15624	1,15427	1,15221	1,14768	1,14265
38	1,16990	1,16814	1,16627	1,16425	1,16214	1,15756	1,15249
40	1,18020	1,17837	1,17645	1,17439	1,17214	1,16759	1,16248
42	1,19063	1,18875	1,18677	1,18468	1,18248	1,17777	1,17215
44	1,20121	1,19927	1,19725	1,19512	1,19287	1,18809	1,18290
46	1,21194	1,20994	1,20787	1,20570	1,20341	1,19856	1,19334
48	1,22281	1,22076	1,21864	1,21644	1,21411	1,20919	1,20392
50	1,23382	1,23173	1,22957	1,22732	1,22495	1,21996	1,21465
55	1,26203	1,25981	1,25753	1,25516	1,25271	1,24756	1,24211
60	1,29117	1,28884	1,28646	1,28399	1,28144	1,27615	1,27055

Таблица 2-38. Ареометрические шкалы

Современные ареометры обыкновенно имеют шкалу, деления которой непосредственно отвечают числовым значениям плотности жидкостей, выраженным в *г/см*^{3} (так называемые денсиметры). В специальных ареометрах, предназначенных для исследования различных растворов, на шкале часто указывается непосредственно процентное содержание растворенного тела, или концентрация, раствора (спиртомеры, сахаромеры и т. п.). В показания всех таких ареометров необходимо вводить при измерениях поправку на температуру, если последняя значительно отличается от той температуры, при которой была градуирована шкала ареометра (обыкновенно при 20° С); величина температурных поправок дается при каждом приборе.

В ареометрах другого типа, в прошлом весьма широко распространенного и не утратившего своего значения в наше время, применяются различные произвольные шкалы, не обоснованные научно. Отсчет по таким шкалам дает числовые значения плотности жидкостей в чисто условных единицах, их называют *градусами*. Для перехода от градусов к значениям плотности, выраженным в *г/см*^{3}, имеются соответствующие формулы, причем поправка на температуру остается по-прежнему. Из очень большого числа различных ареометров этого типа дальше приводятся данные для шести ареометров, которые наиболее распространены. Формула перехода к плотностям, выраженным в *г/см*^{3}, в общем случае имеет такой вид:

$$D_t = \frac{a}{b \pm n}. \qquad (2\text{-}38)$$

Здесь D и t обозначают соответственно плотность жидкости, выраженную в *г/см*^{3}, и температуру градуирования ареометра, при которой он дает правильные показания; n обозначает непосредственный отсчет показаний ареометра, а a и b являются его двумя параметрами, которые для данного ареометра остаются постоянными. Знак «+» отвечает случаю жидкости менее плотной, чем вода, знак «—» случаю жидкости более плотной, чем вода.

Далее рассматривается только второй случай жидкости более плотной, чем вода; для этого случая имеем:

$$D_t = \frac{a}{b - n}, \qquad (2\text{-}39)$$

$$n = b - \frac{a}{D_t}. \qquad (2\text{-}40)$$

В таблицах для этого случая приведены следующие данные:

1. В табл. 2-38а: 1) название ареометров и обозначения их шкал; 2) температура градуирования t; 3) значения параметров a и b [1]).

2. В табл. 2-38б: сопоставление показаний этих ареометров по отношению к °Bé (Боме рациональный), который имеет наибольшее значение; его шкала дана через интервалы в 4°, кроме того, дана точка 66°, которая в этой шкале соответствует плотности концентрированной серной кислоты и является основной.

3. В табл. 2-38в: соотношения между значениями плотности D, выраженной в *г/см*^{3}, и градусами ареометра Боме рациональный °Bé (n) с точностью до четвертого десятичного знака.

4. В табл. 2-38г: обратные соотношения между градусами ареометра Боме рациональный и значениями плотности D, выраженной в *г/см*^{3}, с точностью до 0,01 *г/см*^{3}; плотность воды, свободной от примесей, при 4° С принята равной 1,0000 *г/см*^{3}.

Таблица 2-38а

Название и обозначение	$t°$	a и b
Боме рациональный (°Bé)	15° C	$a=b=144{,}3$
Боме старый (°$Bé_{ст}$)	17,5° C	$a=b=146{,}78$
Боме американский (°$Bé_{ам}$)	60° F [2])	$a=b=145$
Баллинг (°Bl)	17,5° C	$a=b=200$
Стоппани (°St)	12,5° R [3])	$a=b=166$
Твэддл (°Tw)	60° F [4])	$a=b=200$

Таблица 2-38б

°Bé	°$Bé_{ст}$	°$Bé_{ам}$	°Bl	°St	°Tw
0°	0,05	0,00	0,07	0,01	0,01
4	4,12	4,02	5,61	4,61	5,72
8	8,19	8,04	11,15	9,22	11,75
12	12,25	12,06	16,70	13,82	18,91
16	16,32	16,08	22,24	18,42	24,96
20	20,39	20,10	27,78	23,02	32,20
24	24,46	24,12	33,32	27,62	39,91
28	28,52	28,14	38,86	32,22	48,17
32	32,59	32,16	44,41	36,82	57,01
36	36,66	36,17	49,95	41,42	66,50
40	40,73	40,19	55,49	46,02	76,82
44	44,79	44,21	61,03	50,63	87,75
48	48,86	48,23	66,58	55,23	99,71
52	52,93	52,25	72,12	59,83	112,70
56	56,99	56,27	77,66	64,43	128,00
60	61,06	60,29	83,20	69,03	142,37
64	65,13	64,31	88,74	73,63	159,43
66	67,16	66,32	91,51	75,93	168,61
68	69,20	68,33	94,29	78,23	178,27

Примечания к табл. 2-38. [1]) Параметры a и b, вообще говоря, могут быть не равны между собой. Как видно из последних формул, при условии $a=b$ плотность, равная 1 $г/см^3$, на шкале ареометра должна быть обозначена цифрой °0, что имеет место для всех шести ареометров, указанных в табл. 2-38а. [2]) 60° F = 15⅚° C ≈ 15,56° C (стр. 336). [3]) 12,5° R = 15,625° C (стр. 330). [4]) См. прим. [2]).

Таблица 2-38в

°Bé (n)	D (г/см³)	°Bé (n)	D (г/см³)	°Bé (n)	D (г/см³)	°Bé (n)	D (г/см³)
0	1,0000	17	1,1335	34	1,3083	51	1,5466
1	1,0070	18	1,1425	35	1,3202	52	1,5634
2	1,0141	19	1,1516	36	1,3324	53	1,5805
3	1,0212	20	1,1609	37	1,3448	54	1,5980
4	1,0285	21	1,1703	38	1,3575	55	1,6159
5	1,0359	22	1,1799	39	1,3704	56	1,6342
6	1,0434	23	1,1896	40	1,3835	57	1,6529
7	1,0510	24	1,1995	41	1,3969	58	1,6721
8	1,0587	25	1,2096	42	1,4106	59	1,6917
9	1,0665	26	1,2198	43	1,4245	60	1,7117
10	1,0745	27	1,2302	44	1,4387	61	1,7323
11	1,0825	28	1,2408	45	1,4532	62	1,7533
12	1,0907	29	1,2515	46	1,4680	63	1,7749
13	1,0990	30	1,2625	47	1,4830	64	1,7970
14	1,1074	31	1,2737	48	1,4984	65	1,8197
15	1,1160	32	1,2850	49	1,5142	66	1,8429
16	1,1247	33	1,2965	50	1,5302	67	1,8668

Таблица 2-38г

D (г/см³)	°Bé	D (г/см³)	°Bé	D (г/см³)	°Bé
1,00	0,126	1,22	26,125	1,47	46,223
1,01	1,553	1,23	27,085	1,49	47,539
1,02	2,953	1,24	28,031	1,51	48,820
1,03	4,325	1,25	28,961	1,53	50,069
1,04	5,671	1,26	29,876	1,55	51,285
1,05	6,991	1,27	30,777	1,57	52,469
1,06	8,287	1,28	31,664	1,59	53,625
1,07	9,558	1,29	32,537	1,61	54,751
1,08	10,805	1,30	33,397	1,63	55,850
1,09	12,030	1,31	34,243	1,65	56,922
1,10	13,233	1,32	35,077	1,67	57,968
1,11	14,413	1,33	35,899	1,69	58,990
1,12	15,573	1,34	36,708	1,71	59,988
1,13	16,712	1,35	37,504	1,73	60,962
1,14	17,832	1,36	38,290	1,75	61,915
1,15	18,931	1,37	39,063	1,77	62,846
1,16	20,012	1,38	39,826	1,79	63,756
1,17	21,074	1,39	40,578	1,80	64,203
1,18	22,119	1,40	41,318	1,81	64,646
1,19	23,145	1,41	42,049	1,82	65,084
1,20	24,155	1,43	43,479	1,83	65,517
1,21	25,148	1,45	44,869	1,84	65,944

Таблица 2-39. Упругие свойства металлов

Упругие свойства металлов, а также их прочность в сильной степени зависят от чистоты металла, его структуры, механической и термической обработки и т. п. Поэтому здесь приводятся только средние значения, которые в отдельных случаях могут иметь иную величину.

Между модулем упругости при растяжении (модулем Юнга) E и модулем сдвига N имеет место (в пределах применимости закона Гука) соотношение

$$N = \frac{E}{2(1+\mu)},$$

где μ обозначает коэффициент Пуассона, величина которого для различных твердых материалов лежит приближенно между 0,3 и 0,5.

В таблице даны для некоторых металлов средние значения при комнатной температуре: 1) модуля упругости при растяжении E, модуля сдвига N, предела прочности при растяжении (сопротивления на разрыв) $\sigma_в$; все эти величины выражены в $кГ/мм^2$; 2) коэффициента Пуассона μ (безразмерная величина).

	E ($кГ/мм^2$)	N ($кГ/мм^2$)	$\sigma_в$ ($кГ/мм^2$)	μ
Алюминий	6300—7500	2300—2700	6—11	0,34
Бронза [1]	10600	4400	20—38	0,31
Висмут	3200	1200—1400	—	0,33
Вольфрам	35500	13300	420	0,27
Дюралюминий (дюраль)	ок. 7000	ок. 2750	40—50	—
Железо кованое	20000—22000	8000—8300	40—60	0,28
Золото	7000—8500	2600—3900	—	0,41
Инвар [2]	14000	5600	78	—
Иридий	5300	—	—	—
Константан [3]	16600	6200	32	0,33
Латунь [4]	8000—10000	2700—3700	10—20	0,34—0,40
Манганин	12600	4700	—	0,33
Медь	10000—12000	4000—4800	20—30	0,3—0,4
Нейзильбер [5]	11000	4000	—	0,37
Никель	20000—22000	7500	50	0,30
Олово	4000—5400	1700	1,7—2,5	0,33
Палладий	10000—14000	4000—5000	—	0,39
Платина	16000—17500	6000—7200	24—34	0,38
Свинец	1500—1700	550—600	1,2—2,1	0,45
Серебро	7000—8000	2500—2900	28—29	0,37
Сталь инструм.	21000—22000	8000—8500	45—60	0,29
» специальная	22000—24000	8500—8800	50—160	—
Тантал	19000	—	93	—
Цинк	8000—10000	3000—4000	13—20	0,3
Хром	24000—25000	—	49	
Чугун	7500—8500	2900—3500	10—12	0,25
» ковкий	10500	4000	20	0,26

Примечания к табл. 2-39. [1]) Приближенный состав бронзы: 91% Cu + 6% Sn + 3% Zn. [2]) Железоникелевый сплав с содержанием никеля в среднем 35—37%. [3]) Состав сплава: 60% Cu + 40% Ni. [4]) Приближенный состав латуни: 66% Cu + 34% Zn. [5]) Сплав состава: 84% Cu + 12% Mn + + 4% Ni.

Таблица 2-40. Упругие свойства неметаллических тел

В таблице даны для некоторых неметаллических тел приближенные значения: 1) модуля упругости при растяжении E; 2) предела прочности $\sigma_в$ (сопротивления на разрыв); эти величины выражены в $кГ/см^2$ и относятся к средней комнатной температуре.

	E ($кГ/см^2$)	$\sigma_в$ ($кГ/см^2$)		E ($кГ/см^2$)	$\sigma_в$ ($кГ/см^2$)
Дерево [1]:			Мрамор . . .	$2{,}6\cdot10^5$	—
бамбук . . .	$2\cdot10^5$	$2{,}2\cdot10^3$	Нити:		
береза . . .	$1{,}5\cdot10^5$	$0{,}7\cdot10^3$	кварцевые .	$5{,}2\cdot10^5$	$9\cdot10^3$
дуб, бук . .	$1{,}6\cdot10^5$	$0{,}8\cdot10^3$	шелковые [3]	$0{,}6\cdot10^5$	$2{,}6\cdot10^3$
железное . .	$2{,}4\cdot10^5$	$2{,}2\cdot10^3$	паутина [4] .	$0{,}3\cdot10^5$	$1{,}8\cdot10^3$
сосна, ель .	$0{,}9\cdot10^5$	$0{,}5\cdot10^3$	Резина [5] . .	$0{,}4\cdot10^5$	—
Кварц	$6{,}8\cdot10^5$	—	Стекло:		
Кетгут [2] . .	$0{,}3\cdot10^5$	$4{,}2\cdot10^3$	крон	$7{,}2\cdot10^5$	$0{,}7\cdot10^3$
Лед (при			флинт . . .	$5{,}5\cdot10^5$	$0{,}7\cdot10^3$
$-2°$ С) . . .	$0{,}3\cdot10^5$	ок. 40	органическое [6] . .	$0{,}3\cdot10^5$	$0{,}4\cdot10^3$

Примечания к табл. 2-40. [1]) Вдоль волокон. [2]) Струна для смычковых инструментов и теннисных ракеток, в медицине жилка, или «кетгут». [3]) Быстро уменьшаются с возрастанием нагрузки. [4]) Обнаруживает явную упругую усталость. [5]) Мягкая вулканизированная резина. [6]) Продукт полимеризации метилового эфира метакриловой кислоты, называемый также *акрилат* (точнее, *полиметилметакрилат*).

Таблица 2-41. Твердость тел

Твердость H различных тел обыкновенно определяют путем вдавливания при стандартных условиях в поверхность исследуемого образца стального крепкого закаленного шарика (способ Бринеля). Измеряя величину давления в $кГ$ и поверхность полученного на теле отпечатка шарика в $мм^2$, вычисляют затем среднюю величину удельного давления шарика на тело в $кГ/мм^2$, которая и служит числовым значением твердости тела по Бринелю H_B (*число твердости*), т. е.

$$H_B = \frac{P}{S}, \tag{2-41}$$

где P обозначает давление шарика в $кГ$, а S — поверхность отпечатка в $мм^2$; последняя, очевидно, равна поверхности шарового сегмента с высотой h и диаметром d, которые равны глубине отпечатка и его диаметру на поверхности образца. Таким образом, можно написать:

$$S = \pi r h = \pi D\,\frac{D - \sqrt{D^2 - d^2}}{2}, \tag{2-42}$$

где D, d и h обозначают соответственно диаметр стального шарика, диаметр отпечатка и его глубину; все эти величины выражаются в миллиметрах.

Величину давления P выбирают в зависимости от твердости исследуемого тела и диаметра шарика (обычные диаметры 10,5 и 2,5 *мм*). Принято пользоваться давлением, численно равным (в *кГ*): для очень твердых тел (сталь, чугун) 30 D^2, для менее твердых (медь, бронза) 10 D^2 и для мягких металлов (алюминий, золото) 2,5 D^2. Давление при испытаниях должно повышаться плавно, без резких толчков, и образец выдерживается под максимальной нагрузкой в течение 30 *сек*.

В таблице даны значения твердости по Бринелю для некоторых металлов, выраженные в $кГ/мм^2$.

Таблица 2-41

	H_B ($кГ/мм^2$)		H_B ($кГ/мм^2$)
Алюминий мягкий . .	16—26	Натрий	0,07–0,08
» прокатанный	до 39	Никель прокатанный .	110—300
Висмут	9—10	» литой	90—110
Вольфрам	350	Олово	5—6
Железо кованое . . .	60—80	Палладий	45—50
Золото	15—20	Платина отожженная .	24—26
» кованое	19—25	» жесткая . . .	до 60
Иридий	170	Свинец	4.0—4,2
Кадмий	21—24	Серебро	20—25
Калий	0,04	» кованое . . .	до 30
Кальций	30—42	Сурьма	30
Кобальт	ок. 100	Сталь отожженная . .	120—200
Латунь	95—140	» закаленная . .	до 600
Магний	25—29	Хром	70—130
Марганец	20	Цинк мягкий	8—10
Медь электролит. . .	28—30	» жесткий	до 20
» наклепанная . .	до 80	Чугун	ок. 160
Молибден	150—200	» твердый . . .	до 200

Таблицы 2-42 а и б. **Десятибалльная шкала твердости**

Твердость тел, в особенности минералов (стр. 000), часто оценивают по совершенно условной десятибалльной шкале, которая обычно называется *шкалой Мооса*. Эталонами твердости в этой шкале служат следующие десять минералов (табл. 2-42а):

Таблица 2-42а

	Тв.		Тв.
Тальк	1	Полевой шпат (ортоклаз)	6
Гипс (или каменная соль)	2	Кварц	7
Известковый шпат	3	Топаз	8
Плавиковый шпат	4	Корунд	9
Апатит	5	Алмаз	10

Эти минералы подобраны так, что каждый последующий эталон проводит на поверхности предыдущего царапину. Тот же прием — нанесение царапины — служит и для определения твердости различных других минералов и тел, так как всегда можно установить, что исследуемое

тело по твердости или отвечает одному из эталонов, или лежит в промежутке между двумя соседними эталонами. Это дает возможность приближенно оценивать твердость исследуемых тел соответствующими числами. Такое определение твердости, очевидно, очень неточно и вполне условно, тем не менее к нему часто прибегают на практике ввиду его крайней простоты.

В табл. 2-42б даны приближенные значения твердости некоторых химических элементов по условной десятибалльной шкале.

Таблица 2-42б

	Тв.		Тв.		Тв.
Алмаз	10,0	Калий	0,5	Никель	5,8
Алюминий . .	до 2,9	Кобальт . . .	5,5	Олово	1,8
Бор	9,5	Кремний . . .	7,0	Палладий . . .	4,8
Висмут	2,5	Литий	0,6	Платина . . .	4,3
Железо	ок. 4,5	Магний	2,0	Свинец	1,5
Золото	2,5	Марганец . . .	5,0	Серебро . . .	2,7
Иридий	6,5	Медь	3,0	Хром	9,0
Кадмий	2,0	Натрий	0,4	Цинк	2,5

§ 2-17. Акустика

Таблицы 2-43 а и б. Скорость звука в воздухе

В таблице 2-43а дана скорость звука v в воздухе в *м/сек* для температурного интервала от — 150 до 1000° С. Значения v даны с точностью до 1 *м/сек*, а для температур 0 и 20° С — с точностью до 0,1 *м/сек*. Поправку на температуру можно приближенно вычислять по формуле

$$v_t = v_0 \sqrt{1 + \alpha t}, \qquad (2\text{-}43)$$

где v_t и v_0 обозначают скорость звука при температурах соответственно t° С и 0° С; α — коэффициент расширения воздуха при постоянном давлении, равный 0,00367 *град*$^{-1}$.

Таблица 2-43а

t (°С)	v (*м/сек*)	t (°С)	v (*м/сек*)	t (°С)	v (*м/сек*)	t (°С)	v (*м/сек*)
— 150,0	216	— 10,9	326	100	386	700	621
— 106,2	253	0	331,5	300	478	750	632
— 45,6	305	20,0	342,4	500	552	1000	700

При повышении давления в воздухе скорость звука возрастает, как видно из таблицы 2-43б, где даны значения v в воздухе при 0° С.

Таблица 2-43б

p (*атм*) . . .	1	25	50	100
v (*м/сек*) . .	331,5	332,0	334,7	350,6

Таблица 2-44. Скорость звука в парах и газах

Значения скорости v звука выражены в *м/сек* и даны с точностью до 1 *м/сек*, для некоторых газов — с точностью до 0,1 *м/сек*. В таблице указана также температура t, к которой относятся эти значения. Поправку на температуру можно приближенно вычислять по формуле

$$v_t = v_0 \sqrt{1 + \alpha t}, \qquad (2\text{-}44)$$

где v_t и v_0 обозначают скорость звука в данном газе при температурах соответственно t °С и 0 °С; α — коэффициент расширения газа при постоянном давлении, равный 0,00367 *град*$^{-1}$.

Вещество	t (°С)	v (*м·сек*$^{-1}$)	Вещество	t (°С)	v (*м·сек*$^{-1}$)
Азот	0	333,6	Окись азота	0	333,9
»	300	487	» углерода	0	337,6
»	600	599	Пары брома	0	135
»	1000	720	» бензола	80	208
Аргон	0	319,0	Пары воды насыщенные	0	401
»	300	446	Пары воды насыщенные	110	413
»	600	551	Пары воды насыщенные	130	424
»	1000	665	Углекислота	0	260,3
Ацетилен	0	327	»	100	300
Водород	0	1270	»	300	369
Газ светильный	13,6	442	Хлор	0	206
Гелий	0	970	Этан	10	308
Кислород	0	317,5	»	50	327
»	21	328			
»	— 182,0	173			
Метан	0	430			
»	300	587			

Таблица 2-45. Скорость звука в жидкостях

Значения скорости v звука выражены в *м/сек* и даны приближенно с точностью около 10 *м/сек*. В таблице указана также температура t °С, к которой относятся эти значения.

Жидкость	t (°С)	v (*м/сек*)	Жидкость	t (°С)	v (*м/сек*)
Аммиак (водный раствор)	16	1660	Раствор NaCl 15%	15	1530
Бензин	17	1170	» NaCl 20%	15	1650
Вода	13	1440	Спирт этиловый абс.	8,4	1231
»	19	1460	Спирт этиловый абс.	23,0	1177
»	31	1500	Спирт этиловый 95%	12,5	1241
» морская	15	1500	Спирт этиловый 95%	20,5	1213
Кислота соляная	15,5	1520	Хлороформ	15	983
Нефть	7,4	1390	Эфир этиловый	0	1150
»	15	1330	» »	15	1032
Раствор Na_2CO_3 конц.	22,2	1590			
Раствор NaCl 10%	15	1470			

Таблица 2-46. Скорость звука в твердых телах

В твердых телах звуковые колебания могут быть продольными и поперечными. В последнем случае скорость распространения колебаний определяется приближенной формулой:

$$v=\sqrt{\frac{N}{D}},$$

где N и D обозначает модуль сдвига твердого тела и его плотность. В таблице значения скорости v звука выражены в *м/сек* и даны приближенно с точностью около 10 *м/сек*. В таблице указана также температура t °С, к которой относятся эти значения; там, где температура не указана, значения t соответствуют комнатной температуре.

	t (°С)	v (*м/сек*)		t (°С)	v (*м/сек*)
Алюминий	18	5100	Константан	18	4300
» дюраль	—	5140	Кость слоновая	—	3060
Бронза	—	3500	Латунь	18	3360
Бумага натянутая	—	2100	Лед	4	3230
Воск	—	390	Магний	—	4602
Вольфрам	—	5174	Манганин	18	3830
Гипс	18	2310	Медь	15—20	3570
Глина (сухая)	8	1650	»	100	3290
Гранит	—	6000	»	200	2950
Дерево, мягкие породы	—	ок. 3000	Мрамор	—	3810
Сосна	—	3320	Нейзильбер	18	3600
Дерево, твердые породы	—	до 5000	Никель	18	4970
Чинар	—	4460	Олово	18	2500
Ясень	—	4670	Палладий	10	3070
Железо	100	5300	Парафин	15—17	1400
»	200	4720	Платина	100	2570
» кованое	15—20	5120	»	200	2460
» проволока	10—20	4910	Платина прокаленная	15—20	2680
Сталь	200	4790	Платина твердая	—	2780
» мягкая	15—20	ок. 5000	Пробка	—	430—530
» твердая	18	до 6000	Ртуть (тв.)	—70	2670
Золото прокаленное	15—20	1740	Свинец	15—20	1260
» твердое	10	2110	Серебро	100	2640
Кадмий	—	2310	Серебро прокаленное	15—20	2600
Каменная соль	—	4400	Серебро твердое	10	2730
Каучук черный	0	54	Слоновая кость	—	3013
» »	50	31	Стеарин	15—17	1380
» красный	0	69	Стекло флинт.	—	4450
» »	50	37	» крон.	—	5220
» очень жесткий	—	150	» органическое	—	1770
Кварц кристалл.	—	5490	Цинк	18	3700
Кирпич	—	3652	Эбонит	14	1570
Кобальт	—	4720	Шеллак	—	1320
			Шиффер	—	4540

Таблицы 2-47 а и б. Частота колебаний некоторых музыкальных тонов

В таблицах даны выраженные в герцах частоты всех тонов равномерно темперированной гаммы на протяжении семи октав: контр-октавы (C_{-1}), большой октавы (C), малой октавы (c), первой, второй, третьей и четвертой октавы (обозначения соответственно c_1, c_2, c_3 и c_4) для двух частот нормального тона la_3 (a_1 в первой октаве c_1): 1) частота la_3 равна 435 *гц* (табл. 2-47а) и 2) частота la_3 равна 440 *гц* (табл. 2-47б).

Таблица 2-47а

Тон	Октавы						
	C_{-1}	C	c	c_1	c_2	c_3	c_4
c (до)	32,33	64,66	129,33	258,65	517,30	1034,6	2069,2
cis	34,25	68,51	137,02	274,03	548,06	1096,1	2192,3
d (ре)	36,29	72,58	145,16	290,32	580,65	1161,3	2322,6
dis	38,45	76,90	153,80	307,59	615,18	1230,4	2460,7
e (ми)	40,74	81,47	162,94	325,88	651,76	1303,5	2607,1
f (фа)	43,16	86,31	172,63	345,26	690,52	1381,0	2762,1
fis	45,72	91,45	182,90	365,79	731,58	1463,2	2926,3
g (соль)	48,44	96,89	193,77	387,54	775,08	1550,2	3100,3
gis	51,32	102,65	205,29	410,58	821,16	1642,3	3284,7
a (ля)	54,37	108,75	217,5	435,01 [1])	870,0	1740,0	3480,0
ais	57,61	115,22	230,43	460,85	921,71	1843,4	3686,9
h (си)	61,03	122,07	244,13	488,27	976,54	1953,1	3906,1

Таблица 2-47б

Тон	Октавы						
	C_{-1}	C	c	c_1	c_2	c_3	c_4
c (до)	32,70	65,41	130,81	261,63	523,25	1046,6	2093,1
cis	34,65	69,30	138,59	277,18	554,36	1108,7	2217,5
d (ре)	36,71	73,42	146,83	293,66	587,33	1174,7	2349,3
dis	38,89	77,78	155,56	311,13	622,25	1244,5	2489,0
e (ми)	41,20	82,41	164,81	329,63	659,25	1318,5	2637,0
f (фа)	43,65	87,31	174,61	349,23	698,46	1396,9	2793,8
fis	46,25	92,50	185,00	369,99	739,99	1480,0	2960,0
g (соль)	49,00	98,00	196,00	392,00	783,00	1568,0	3136,0
gis	51,91	103,83	207,65	415,30	830,61	1661,2	3322,4
a (ля)	55,0	110,0	220,0	440,0 [1])	880,0	1760,0	3520,0
ais	58,27	116,54	233,08	466,16	932,33	1864,6	3729,3
h (си)	61,74	123,47	246,94	493,88	987,77	1975,5	3951,1

Примечание к табл. 2-47. [1]) Частота нормального тона, равная 435 *гц*, была установлена Международным конгрессом в 1885 г. На Международном конгрессе в 1939 г. была введена новая частота нормального тона, равная 440 *гц*, принятая и у нас (ОСТ 7710).

Таблица 2-48. Коэффициенты поглощения звука

Коэффициенты поглощения звука отнесены к тону с частотой 512 *гц* и рассчитаны на 1 $м^2$ поверхности. При вычислении величины и возможного поглощения звука следует величину поглощающей поверхности, выраженную в $м^2$, умножать на соответствующий коэффициент.

Поглощающая среда	Коэффициент поглощения	Поглощающая среда	Коэффициент поглощения
Облицовка из твердой сосны	0,061—0,1	То же, покрытый краской	0,25—0,45
Штукатурка на деревянных планках	0,033	Отверстия отопительных и вентиляционных каналов	0,50
Штукатурка на проволочной сетке	0,033	Отверстия стены	0,25—0,70
Кирпичная стена	0,032	Изоляит толщиной 1,3 *см*	0,31
Линолеум на твердой подкладке	0,030	Толстый ковер	0,29
Стекло обычной толщины	0,027	Масляные картины с рамой	0,28
Штукатурка на кирпичной стене	0,025	Занавес	0,23
Бетон	0,015	Ковер	0,20
Мрамор	0,010	Пробка толщиной 2,5 *см*	0,16
Шерстяной войлок	0,55	Вязь (48 $г/м^2$)	0,019

Таблица 2-49. Коэффициенты звукоизоляции

Коэффициент звукоизоляции σ определяется как отношение силы I_1 звука, падающего на перегородку, к силе I_2 звука, прошедшего через нее на другую сторону. Коэффициенты σ обыкновенно выражаются в децибелах (стр. 236), т. е. принимают, что

$$\sigma = 10 \lg \frac{I_1}{I_2}. \qquad (2\text{-}45)$$

Тип перегородки	σ (*дб*)	Тип перегородки	σ (*дб*)
Алюминий 0,6 *мм*	16	Потолки	43—64
Дюралюминий 0,6 *мм*	15	Двойные перегородки с воздушным зазором	40—70
Сталь 2 *мм*	33	Перегородка из 17 слоев различных материалов	75
Свинец 1,5 *мм*	30	Дверь деревянная из березовой фанеры	22
» 3,2 *мм*	32	Дверь дубовая 45 *мм*, хорошо пригнанная	25
Фанера трехслойная 3,2 *мм*	19	То же, без тщательной пригонки	20
» » 6,4 *мм*	21	Дверь деревянная 45 *мм*, из 6 панелей 12,7 *мм*, двойная с зазором 11,5 *мм*	43
Дерево оштукатуренное 12,3 *мм*	28	Окно, стекло 6,4 *мм*, одинарная рама	30
Кирпичная стена оштукатуренная 200 *мм*	48	То же, двойная рама с зазором 24 *см*	46
Кирпичная стена оштукатуренная 100 *мм*	44		
Бетонная стена оштукатуренная 110 *мм*	42		
Деревянные комнатные перегородки оштукатуренные	30—50		

§ 2-18. Молекулярные явления и теплота

Таблицы 2-50 а и б. Коэффициенты внутреннего трения (вязкости) газов и паров

В таблицах даны: 1) значения коэффициентов внутреннего трения (вязкости) η для некоторых газов и паров при различных температурах, которые указываются (табл. 2-50а); 2) значения η для воздуха в интервале температур от 0 до 1000° С (табл. 2-50б). Значения η даны в *г/см·сек*.

Таблица 2-50а

	t (°С)	$\eta \cdot 10^6$ (*г/см · сек*)		t (°С)	$\eta \cdot 10^6$ (*г/см · сек*)
Азот	0	167	Окись углерода	0	166
»	15	174	» »	15	174
»	23	177	Пары воды	0	87
Аргон	23	221	» »	100	123
Водород	0	84	» ртути	0	162
»	28,1	89	» »	300	532
Воздух	0	172	» бензола	14,2	70
»	16	181	» »	100	94
»	21,6	184	Пары сероуглерода	14,2	96
Газ сернистый	0	117	Пары хлороформа	14,2	99
» »	14,0	122	Пары эфира этил.	14,2	72
» »	17,7	124	Пропан	0	75
Гелий	0	186	Сероводород	17	125
»	23	198	Углекислота	0	137
Закись азота	0	137	»	15	144
» »	15	144	»	23	147
» »	23	150	Хлор	20	132
Кислород	0	192	Циан	17	99
»	14,2	197	Этан	23	93
»	23,0	204			
Метан	17	109			
Окись азота	0	179			

Таблица 2-50б

t (°С)	$\eta \cdot 10^7$ (*г/см · сек*)	t (°С)	$\eta \cdot 10^7$ (*г/см · сек*)	t (°С)	$\eta \cdot 10^7$ (*г/см · сек*)
0	1719	350	3063	700	4162
50	1926	400	3245	750	4301
100	2124	450	3413	800	4432
150	2319	500	3570	850	4560
200	2512	550	3720	900	4688
250	2704	600	3868	950	4812
300	2886	650	4017	1000	4933

Таблицы 2-51 а и б. Коэффициенты внутреннего трения (вязкости) жидкостей

Коэффициент η внутреннего трения или вязкости (термины равнозначные) определяется из формулы:

$$F = \eta S \frac{\Delta v}{\Delta x},$$

где F обозначает силу внутреннего трения, S — поверхность и $\frac{\Delta v}{\Delta x}$ — градиент скорости в направлении, перпендикулярном к направлению движения. Размерность η в системе LMT равна $L^{-1}MT^{-1}$; единицей вязкости в системе СГС служит пуаз, вязкость воды при 20° С почти равна 0,01 пуаза, или одному сантипуазу.

Наблюдения показали, что коэффициенты вязкости жидкостей в очень сильной степени зависят от температуры. Как общее правило оказалось, что вязкость жидкостей быстро уменьшается с повышением температуры. Почти для всех неассоциированных жидкостей очень хорошо оправдывается формула Бачинского:

$$\eta = \frac{a}{v - \omega},$$

где v — обозначает удельный объем жидкости, являющийся функцией температуры и давления, а величины a и ω служат двумя параметрами, из них ω близко отвечает константе b в уравнении Ван-дер-Ваальса.

В таблицах даны: 1) значения коэффициентов внутреннего трения (вязкости) η для воды, свободной от примесей, и для водных растворов этилового спирта и сахара в интервале температур от 0 и до 80° С; концентрация растворов дана в весовых процентах (табл. 2-51а); 2) значения коэффициентов η для некоторых жидкостей при различных температурах, которые указываются (табл. 2-51б). Значения η выражены в *г/см · сек*.

Таблица 2-51а

t (°C)	$\eta \cdot 100$ (*г/см · сек*)							
	Вода	Раствор этилового спирта				Раствор сахара		
		20%	40%	60%	80%	20%	20%	60%
0	1,788	5,319	7,14	5,75	3,690	3,804	14,77	238
5	1,515	4,065	5,59	4,63	3,125	3,154	11,56	156
10	1,306	3,165	4,39	3,77	2,710	2,652	9,794	109,8
15	1,140	2,618	3,53	3,14	2,309	2,267	7,468	74,6
20	1,004	2,183	2,91	2,67	2,008	1,960	6,200	56,5
25	0,894	1,815	2,35	2,24	1,784	1,704	5,187	43,86
30	1,801	1,553	2,02	1,93	1,531	1,504	4,382	33,78
35	0,720	1,332	1,72	1,66	1,355	1,331	3,762	26,52
40	0,653	1,160	1,482	1,447	1,203	1,193	3,249	21,28
45	0,595	1,015	1,289	1,271	1,081	1,070	2,847	17,18
50	0,549	0,907	1,132	1,127	0,968	0,970	2,497	14,01
55	0,507	0,814	0,998	0,997	0,867	0,884	2,219	11,67
60	0,470	0,736	0,893	0,902	0,789	0,808	1,982	9,83
65	0,435	0,666	0,802	0,806	0,711	0,742	1,778	8,34
70	0,406	0,603	0,727	0,729	0,650	0,685	1,608	7,15
75	0,379	0,559	0,663	0,663	0,600	0,635	1,462	6,20
80	0,356	0,505	0,601	0,604	—	0,590	1,334	5,40

Таблица 2-51б

	t (°C)	η ($г/см \cdot сек$)		t (°C)	η ($г/см \cdot сек$)
Амилацетат	8,97	0,0103	Масло касторовое	35	3,12
»	19,91	0,0087	» оливковое	20	0,808
Анилин	10	0,0655	» »	30	0,557
»	20	0,0440	Нитробензол	10	0,0251
»	30	0,0316	»	20	0,0201
Ацетон	25	0,0032	»	30	0,0168
Бензол	15	0,0070	Ртуть	10,14	0,0162
»	20	0,0065	»	18,00	0,0158
»	25	0,0060	»	31,15	0,0150
Бром	12,6	0,0107	Сероуглерод	8,92	0,0041
»	19,1	0,0100	»	19,91	0,0038
»	32,0	0,0089	»	25	0,0035
Вода	15	0,0114	Скипидар (плотн. 0,87)	20	0,0149
Глицерин (0,8% воды)	18	13,93	»	40	0,0107
То же	30	5,71	Спирт амиловый	25	0,0448
Кислота азотная (конц.)	10	0,0177	» метиловый	8,92	0,0071
			» »	19,91	0,0061
Кислота азотная (конц.)	20	0,0091	» »	25	0,0055
			» этиловый	10	0,0147
Кислота азотная (конц.)	40	0,0070	» »	20	0,0120
			» »	30	0,0100
Кислота серная (конц.)	10	0,352	Толуол	8,86	0,0067
» » »	20	0,242	»	19,91	0,0058
» » »	40	0,131	»	25	0,0055
Кислота уксусная (конц.)	15	0,0132	Фенол	30	0,0700
			»	50	0,0320
Кислота уксусная (конц.)	25	0,0112	Хлороформ	8,10	0,0064
			»	19,19	0,0053
Ксилол (мета-)	12	0,0079	»	25	0,0054
» »	19,91	0,0064	Эфир этиловый	18	0,0024
Масло касторовое	17,5	12,25	» »	25	0,0022

Таблица 2-52. Внутреннее трение (вязкость) в твердых телах

Внутреннее трение в твердых телах исследовано еще далеко недостаточно, и числовые результаты часто устанавливают только порядок измеряемых величин. В таблице даны приближенные значения коэффициентов внутреннего трения η для некоторых твердых тел при температурах, которые указываются. Значения η выражены в $г/см \cdot сек$.

	t (°C)	η ($г/см \cdot сек$)		(t °C)	η ($г/см \cdot сек$)
Алюминий	9	$7{,}5 \cdot 10^{15}$	Олово	9	$2{,}4 \cdot 10^{15}$
Канифоль	15	$3{,}0 \cdot 10^{16}$	Свинец	9	$0{,}47 \cdot 10^{15}$
»	20	$6{,}0 \cdot 10^{15}$	Стекло	420	$4 \cdot 10^{12}$
Лед	0	$15 - 10 \cdot 10^{12}$	»	710	$4{,}5 \cdot 10^{10}$
»	— 14	$8{,}5 \cdot 10^{12}$	Сургуч	19	$1{,}1 \cdot 10^{11}$

Таблица 2-53. Диффузия газов и паров

Коэффициент самодиффузии газов, D' вычисленный теоретически, оказывается приближенно равным величине: $D' = {}^1/_3\,\bar{u}\cdot\bar{\lambda}$, где $\bar{u}$ и $\bar{\lambda}$ обозначают среднюю скорость и среднюю длину свободного пробега молекул газа. Если же имеет место взаимная диффузия двух различных газов, то коэффициент диффузии D определяется выражением

$$D = \frac{n_1 D' + n_2 D''}{n_1 + n_2},$$

где D' и D'' — коэффициенты самодиффузии первого и второго газов, а n_1 и n_2 — их концентрации. Эта формула выведена в предположении, что диффузия происходит стационарно, т. е. что суммарная концентрация обоих газов остается постоянной ($n_1 + n_2 = \text{const}$). При этом условии коэффициент диффузии первого газа во второй (D_{12}) оказывается равным коэффициенту диффузии второго газа в первый (D_{21}), т. е. что $D_{12} = D_{21} = D$.

В таблице предполагается, что газ (пар) диффундирует в пространство, занятое другим газом (паром); оба тела находятся при постоянных условиях давления и температуры (последняя указана в таблице). Значения коэффициентов диффузии K даны в *см²/сек*.

Газы	t (°C)	K	Пары	t (°C)	K
Аргон — гелий	15	0,70	Водяной пар — водород	0	0,69
Водород — азот . . .	12,5	0,73	— углекислота . .	0	0,13
— воздух	0	0,64	Кислота уксусная —		
— кислород	0	0,69	— водород	0	0,40
— кислород	14	0,77	— воздух	0	0,11
— метан	0	0,62	— углекислота . .	0	0,07
— окись углерода .	0	0,64	Сероуглерод — водород	0	0,36
— углекислота . .	0	0,54	— воздух	0	0,09
— этилен	0	0,48	— углекислота . .	0	0,06
Воздух — водяной пар	0	0,22	Спирт амиловый — во-		
— водяной пар . .	15	0,26	дород	0	0,23
— кислород	0	0,18	— воздух	0	0,06
— сероуглерод . .	0	0,09	— углекислота . .	0	0,04
Кислород — азот . . .	0	0,18	Спирт метиловый —		
— азот	12,5	0,20	—водород	0	0,50
Окись углерода — эти-			— воздух	0	0,13
лен	0	0,11	— кислород	0	0,18
Углекислота — водород	0	0,54	— метан	0	0,15
— водород	18	0,60	— окись углерода .	0	0,13
— водяной пар . .	18	0,15	— углекислота . .	0	0,08
Бензол — водород . .	0	0,29	Спирт этиловый — во-		
— воздух	0	0,14	дород	0	0,37
— кислород	0	0,18	— воздух	0	0,10
— метан	0	0,15	— углекислота . .	0	0,07
— окись углерода .	0	0,13			

Таблица 2-54. Скорость, длина свободного пробега, число столкновений и размеры газовых молекул

Некоторые из формул кинетической теории газов, которые служат для вычислений средней скорости движения молекул, средней длины их свободного пути между двумя последовательными столкновениями и диаметра молекул, ниже указываются; в них введены следующие обозначения:

ρ — плотность газа при нормальных условиях (0 °С и 760 *мм* рт. ст.); p — давление газа в атмосферах ($1\ атм = 1{,}01325 \cdot 10^6\ дн/см^2$); T — абсолютная температура; R — газовая постоянная; b — постоянная уравнения Ван-дер-Ваальса; η и λ — коэффициенты соответственно внутреннего трения (вязкости) и теплопроводности газа (в *г/см · сек* и в *кал/см · сек · град*); c_p — удельная теплоемкость газа при постоянном давлении; m — масса одной молекулы газа (в *г*); σ — диаметр молекулы (в *см*); n_0 — число молекул в 1 $см^3$ газа при нормальных условиях (число Лошмидта, стр. 243); $\bar{u}$ — средняя квадратичная скорость движения молекул, т. е. корень квадратный из среднего арифметического квадратов скоростей всех молекул (в *см/сек*); $\bar{v}$ — средняя скорость молекул, т. е. среднее арифметическое скоростей всех молекул (в *см/сек*); l — средняя длина свободного пробега молекул (в *см*); ν — среднее число столкновений молекул в единицу времени (в $сек^{-1}$).

Основные формулы для вычислений таковы:

1. $$\bar{u} = \sqrt{\frac{3\overline{RT}}{n_0 m}} = \sqrt{\frac{3\overline{p}}{n_0 m}} = \sqrt{\frac{3\overline{p}}{\rho}}.$$

2. $$\bar{v} = \frac{4\bar{u}}{\sqrt{6\pi}} = 0{,}921\,\bar{u}.$$

3. $$l = \frac{\eta}{0{,}31\rho\bar{v}} = \frac{2{,}02}{\sqrt{\rho\rho}}; \qquad \nu = \frac{\bar{v}}{l}.$$

4. Наиболее сложным является вычисление σ, при этих вычислениях пользуются тремя основными формулами:

а) из коэффициента вязкости $\sigma_\eta = \sqrt{\frac{0{,}0912\rho\bar{u}}{n_0\eta}}$;

б) из коэффициента теплопроводности $\sigma_\chi = \sqrt{\frac{0{,}146\rho\bar{u}c_p}{n_0\lambda}}$;

в) из уравнения Ван-дер-Ваальса $\sigma_b = \sqrt{\frac{3b}{2\pi n_0}}$.

В таблице приведены результаты таких вычислений для некоторых газов; даны значения величин: $\bar{u}$ (при 0°С), λ, ν и σ, для последней величины даны результаты вычислений всеми тремя методами (σ_η, σ_χ и σ_b).

	$\bar{u}$ (*см/сек*)	l (*см*)	ν ($сек^{-1}$)	σ_η (*см*)	σ_χ (*см*)	σ_b (*см*)
Азот	$4{,}9 \cdot 10^4$	$9{,}4 \cdot 10^{-6}$	$5{,}0 \cdot 10^9$	$3{,}7 \cdot 10^{-8}$	$3{,}5 \cdot 10^{-8}$	$3{,}6 \cdot 10^{-8}$
Аргон	4,1	10,1	4,0	3,5	—	3,0
Водород . . .	18,4	17,8	10,0	2,6	2,5	2,4
Гелий	13,1	28,1	4,3	2,3	—	2,4
Кислород . . .	4,6	10,2	4,4	3,6	3,3	—
Окись углерода	4,9	9,4	4,7	3,7	3,5	—
Углекислота .	3,9	6,1	6,0	4,4	4,6	3,5

Таблицы 2-55 а и б. Поверхностное натяжение жидкостей

Значения коэффициентов σ поверхностного натяжения жидкостей выражены в *дн/см* и даны по отношению к воздуху, к углекислоте или к парам той же жидкости, что обозначено соответственно символами *в*, CO_2 и *п*. Для тел жидких при обычных температурах значения σ даны в интервале средних комнатных температур, которые указываются (табл. 2-55а). Для воды даны значения σ, выраженные в тех же единицах, для температурного интервала от 0 до 80° С по отношению к влажному воздуху (табл. 2-55б).

Таблица 2-55а

	t (°С)	σ (*дн/см*)		t (°С)	σ (*дн/см*)
Амилацетат (*п*)	14,4	24,5	Олово (CO_2)	253	526,1
Анилин (*п*)	19,5	40,8	Ртуть (*п*)	15	487,0
» (*в*)	12,5	44,7	» (*в*)	18	481,2
» (*в*)	17,5	44,1	» (*в*)	20	471,6
Ацетон (*п*)	16,8	23,3	» (*п*)	40	468,2
Бензол (*п*)	11,2	29,2	Сероуглерод (*в*)	0	32,2
» (*в*)	12,5	29,9	» (*п*)	19,4	33,6
» (*в*)	17,5	29,2	» (*п*)	25,0	29,8
Бром (*в*)	13,0	44,1	Скипидар (*в*)	18	26,8
Висмут (CO_2)	750	346	»	20	26,7
Вода (*в*)	15	73,26	Спирт метиловый (*п*)	20	23,0
Глицерин (D=1,23 *г/см*³)	15,5	64,3	Спирт пропиловый (*п*)	16,4	23,8
Кислота азотная (70%) (*в*)	20	59,4	Спирт этиловый (*п*)	20	22,75
			»	40	20,2
Кислота серная (85%) (*в*)	18	57,6	Толуол (*в*)	12,5	29,1
			» (*в*)	17,5	28,5
Кислота уксусная (безв.) (*п*)	20	23,5	» (*в*)	27,1	26,7
Ксилол (мета-) (*п*)	20,1	28,9	Фенол (*п*)	54,8	36,5
Масло касторовое (*в*)	18,0	33,1	Хлороформ (*п*)	10,2	27,6
» оливковое (*в*)	18,0	32,0	»	45,5	23,0
Нитробензол (*п*)	13,6	42,7	Эфир этиловый (*п*)	20	16,5
			То же	30	15,3

Таблица 2-55б

t (°С)	σ (*дн/см*)	t (°С)	σ (*дн/см*)	t (°С)	σ (*дн/см*)
0	75,49	23	72,08	40	69,54
5	74,75	24	71,93	45	68,6
10	74,01	25	71,78	50	67,8
12	73,70	26	71,63	55	66,9
14	73,41	28	71,33	60	66,0
16	73,11	30	71,03	65	65,1
18	72,82	32	70,74	70	64,2
20	72,53	34	70,44	75	63,3
21	72,37	36	70,14	80	62,3
22	72,22	38	69,85		

Таблицы 2-56 а и б. Растворимость неорганических солей и тростникового сахара в воде

В таблице 2-56а дана концентрация насыщенных растворов ряда солей в воде при температурах 20 и 100° С. Концентрации отвечают числу граммов соли, растворяющихся в 100 *г* воды. Соли предполагаются обезвоженными; если возможно образование гидратов, то в таблице указывается количество кристаллизационной воды, но растворимость дается в предположении обезвоженной соли. Если температура не отвечает указанным двум температурам, она отмечается в таблице отдельно. Кроме того, в таблице дан приближенный молекулярный вес M соли (также обезвоженной).

Вещество	M	20° С	100° С	Примечание
Аммоний сернокислый . .	132,1	75,4	103,3	
» хлористый . . .	53,5	37,5	77,3	
Барий азотнокислый . . .	261,4	9,2	34,2	
» хлористый	208,3	35,7	58,8	Гидрат $2H_2O$
Кадмий сернокислый . . .	208,5	77,0	58,4	
Калий азотнокислый . . .	101,1	31,7	246	
» бромистый	119,0	65,8	105	
» двухромокислый .	294,2	13	104	
» сернокислый . . .	174,3	11,1	24,1	
» хлористый	74,6	34,0	56,7	
Кальций углекислый . . .	100,1	0,002	0,002/75°	
» хлористый . . .	111,0	59,5	159	Гидрат $6H_2O$
Литий сернокислый . . .	109,9	34,2	30,0	Гидрат H_2O
» хлористый	42,4	78,5	127,5	Гидрат H_2O
Магний сернокислый . . .	120,4	26	73,8	Гидрат $7H_2O$
» хлористый	95,2	54,5	72,7	Гидрат $6H_2O$
Марганец сернокислый . .	151,0	64	35	Гидрат $5H_2O$
Медь сернокислая	159,6	20,7	75,4	Гидрат $5H_2O$
Натрий двууглекислый . .	84,0	9,6	16,4/60°	
» сернокислый . . .	142,0	19,4	42,5	Гидрат $10H_2O$
» углекислый . . .	106,0	21,5	45,5	Гидрат $10H_2O$
» хлористый	58,4	36,0	39,1	
Никель сернокислый . . .	154,8	38	77	Гидрат $7H_2O$
Свинец азотнокислый . .	331,2	52,2	127	
Серебро азотнокислое . .	169,9	222	952	
Стронций хлористый . . .	158,5	53,0	100,8	Гидрат $6H_2O$
Цинк сернокислый	161,4	54,4	80	Гидрат $7H_2O$
» хлористый	136,3	368	615	

В таблице 2-56б приводятся значения растворимости сахара в воде при различных температурах, выраженные в процентах (по весу в 100 *г* раствора).

Таблица 2-56б

t (°C)	% сах.	t (°C)	% сах.	t (°C)	% сах.	t (°C)	% сах.	t (°C)	% сах.
0	64,18	20	67,09	40	70,42	60	74,18	80	78,36
5	64,87	25	67,89	45	71,32	65	75,88	85	79,46
10	65,58	30	68,80	50	72,25	70	76,22	90	80,61
15	66,53	35	69,55	55	73,20	75	77,27	95	81,77

Таблица 2-57. Диффузия водных растворов

Раствор диффундирует в чистую воду. Значения коэффициентов D диффузии выражены в *см²/сутки*. Концентрация выражена для электролитов в грамм-эквивалентах на литр раствора, для неэлектролитов — в молях. Температура t °С указана в таблице.

Вещество	t (°С)	Конц.	D (*см²/сутки*)	Вещество	t (°С)	Конц.	D (*см²/сутки*)
Аммиак	12	1,0	1,42	Литий хлористый	18	0,10	0,951
	4	3,55	1,06			1,0	0,920
		3,75	0,45			4,2	0,956
Барий хлористый	8	0,33	0,65	Медь сернокислая	17	0,10	0,39
		2,4	0,66			0,50	0,29
Бром	12	0,1	0,8			1,95	0,23
Глицерин	10,14	0,125	0,356	Медь хлористая	10	1,5	0,43
		0,875	0,342	Натрий азотнокислый			
		1,75	0,300		10,5	3,0	0,76
Кадмий сернокислый					5,0	5,0	0,83
	19,0	2,0	0,246		13	0,6	0,90
Калий азотнокислый						6,0	0,77
	17,6	0,02	1,28	Натрий бромистый	10	2,9	0,86
		0,3	1,26	Натрий сернокислый			
		1,4	1,10		10	1,4	0,66
Калий бромистый	10	1,0	1,13		10,4	1,29	0,49
Калий сернокислый	19,6	0,02	1,01	Натрий углекислый			
		0,28	0,86		10	2,4	0,39
		0,95	0,79	Натрий хлористый	12	1,0	0,90
Калий углекислый	10	3,0	0,60		15	0,02	0,94
Калий хлористый	17,5	0,02	1,36			0,1	0,94
		0,9	1,52			0,9	0,97
	18,0	1,0	1,330			3,9	1,02
		3,6	1,338	Сахар тростниковый	12	0,5	0,28
Кальций хлористый						1,0	0,25
	9	1,5	0,72		18,5	0,30	0,31
	10	0,27	0,68			0,97	0,24
		2,0	0,68			1,97	0,43
Кислота азотная	12	0,55	1,91	Свинец азотнокислый			
	19,5	0,10	2,07		12	0,22	0,71
		0,90	2,26			0,82	0,66
		3,90	2,46	Серебро азотнокислое			
Кислота серная	12	1,0	1,12		12	0,02	1,03
	18	0,35	1,32			0,10	0,98
		0,85	1,34			0,90	0,88
		2,85	1,60			3,9	0,53
		4,85	1,90	Спирт этиловый	11	0,05	0,73
Кислота соляная	12	0,50	2,07			0,25	0,69
		1,0	2,09			0,75	0,62
	19,2	0,10	2,21			3,75	0,45
		0,90	2,63	Цинк сернокислый	19,5	0,025	0,50
		3,20	3,89			0,55	0,36
Кобальт хлористый	10	1,5	0,46			2,95	0,33
Литий бромистый	10	2,3	0,80				
		4,4	0,90				

Таблицы 2-58 а и б. Основные точки стоградусной международной температурной шкалы и другие температурные шкалы

В качестве стоградусной международной температурной шкалы принята так называемая «Международная температурная шкала 1948 г.» (ГОСТ 8550-57), две основные точки которой определены девятой Генеральной конференцией по мерам и весам в 1948 г. как температуры фазового равновесия при атмосферном давлении 760 *мм* рт. ст. (101 325 *н/м*²) между:

1) твердой и жидкой фазами воды (ледяная точка), т. е. 0° С;

2) жидкой и газообразной фазами воды (паровая точка), т. е. 100° С.

Градус стоградусной шкалы обозначается °С, а температура обозначается *t*.

Международный комитет мер и весов утвердил для этой шкалы еще четыре первичные точки с фиксированными значениями температуры, которые были определены также как температуры фазового равновесия при атмосферном давлении 760 *мм* рт. ст. между:

1) жидкой и газообразной фазами кислорода (кислородная точка), — 182,970° С;

2) жидкой и парообразной фазами серы (серная точка), 444,60° С;

3) твердой и жидкой фазами серебра (серебряная точка), 960,8° С;

4) твердой и жидкой фазами золота (золотая точка), 1063° С.

На той же конференции температура тройной точки в этой шкале была принята равной +0,0100° С.

Для интерполяции температур между основными точками служат:

а) в пределах от — 190 до 660° С — платиновый термометр сопротивления;

б) в пределах от 660 до 1063° С — нормальная платина-платинородиевая термопара;

в) выше 1063° С — оптический пирометр.

Кроме стоградусной международной шкалы, в научных исследованиях столь же широкое применение находит *абсолютная термодинамическая температурная шкала*, или *шкала Кельвина*, градусы которой обозначаются °К. Десятая Генеральная конференция по мерам и весам в 1954 г. постановила определить эту шкалу при помощи тройной точки воды в качестве основной реперной точки, присвоив ей значение температуры 273,16° К точно. Градусы абсолютной шкалы и стоградусной шкалы по величине одинаковы, но нулевой точкой шкалы Кельвина служит температура абсолютного нуля. Исходя из определения абсолютной термодинамической шкалы и значения температуры тройной точки в стоградусной шкале, принятого равным 0,0100 °С, находим разность между значениями температуры какого-либо состояния в той и другой шкале; очевидно, она составляет

$$273{,}16° - 0{,}01° = 273{,}15°.$$

Отсюда температура ледяной точки (0° С) в абсолютной шкале

$$T = 0° \text{ С} + 273{,}15° = 273{,}15° \text{ К},$$

а температура абсолютного нуля в стоградусной шкале

$$0° \text{ С} - 273{,}15° = -273{,}15° \text{ С}\ ^{1}).$$

Таким образом, переход от стоградусной шкалы к абсолютной и обратно совершается по зависимостям:

$$n \text{ °С} = (n + 273{,}15) \text{ °К} \qquad (2\text{-}46)$$

и

$$n \text{ °К} = (n - 273{,}15) \text{ °С}, \qquad (2\text{-}47)$$

При сравнении вновь принятой международной температурной шкалы с прежней международной шкалой 1927 года выяснилось, что обе эти шкалы совпадают до температуры 630,5 °С, а дальше наблюдается заметное расхождение. Сопоставление обоих шкал дано в таблице 2-58а.

Таблица 2-58а

М. т. шк. (°С) 1927 г.	630,5	800	1000	1063	1200	1400	1600	2000	3000	3500
М. т. шк. (°С) 1948 г.	630,5	800,4	1000,2	1063	1199,5	1398,3	1597,0	1994	2981	3471

Критический анализ источников возможных неточностей в международной температурной шкале показал, что неточности могут обуславливаться как при практическом воспроизведении основных точек шкалы, так и при их измерении, причем эти неточности возрастают при переходе в область высоких температур. Величины возможных неточностей, вызываемых той и другой причиной, приведены в таблице 2-58б.

Таблица 2-58б

Температура (°С)	−182,97	0	100	300	444,60	960,8	1063	2000
При воспроизв. (°С)	±0,003	±0,0001	±0,001	±0,002	±0,005	±0,1	±0,1	±3
При измерении (°С)	±0,02	0	0	±0,1	±0,15	±0,5	±1	±6

Кроме этих двух температурных шкал, в некоторых странах применяются еще другие температурные шкалы, из которых наиболее широким распространением пользуются шкала Фаренгейта, ее градусы обозначаются °F, и шкала Реомюра, ее градусы обозначаются °R.

На шкале Фаренгейта точка 0° С отвечает 32° F, а 100° С отвечает 212° F, таким образом, 1° С равен $^9/_5$° F.

На шкале Реомюра 0° R совпадает с 0° С, но точка 100° С отвечает 80° R, таким образом, 1° С равен $^4/_5$° R и 1° R равен $^5/_4$ °С.

Формулы для перехода от шкал Фаренгейта и Реомюра к международной стоградусной шкале и обратно, как это следует из предыдущего, имеют такой вид:

$$n\,^\circ\mathrm{C} = \left(\frac{9}{5}\,n + 32\right)^\circ\mathrm{F} = \frac{4}{5}\,n\,^\circ\mathrm{R}, \tag{2-48}$$

$$n\,^\circ\mathrm{F} = \frac{5}{9}\,(n - 32)\,^\circ\mathrm{C} = \frac{4}{9}\,(n - 32)\,^\circ\mathrm{R}, \tag{2-49}$$

$$n\,^\circ\mathrm{R} = \frac{5}{4}\,^\circ\mathrm{C} = \left(\frac{9}{4}\,n + 32\right)^\circ\mathrm{F}. \tag{2-50}$$

Имеются числовые таблицы перевода температур из одной шкалы в другие (см. приложение к т. III).

Примечание к табл. 2-58. [1]) Значение температуры абсолютного нуля часто принимают приближенно равной −273° С.

Таблица 2-59. Термические коэффициенты расширения твердых тел

В таблице даны значения линейных коэффициентов α расширения твердых тел, полученные как среднее для интервала температур, указанного в таблице; если дана одна температура, то табличное значение α можно применить при температурах, отличающихся от указанной в среднем на $\pm 10°$ С. Объемный коэффициент расширения β твердых тел равен утроенному значению их линейного коэффициента ($\beta = 3\alpha$).

	t (°C)	$\alpha \cdot 10^4$ (1/*град*)
Алюминий	0—100	0,238
Бронза (84% Cu, 9% Zn, 6% Sn)	20	180
» алюмин. (95% Cu, 5% Al)	20—99	142
Висмут	17—100	135
Вольфрам	0—100	045
Гипс кристалл	12—25	25
Дерево буковое ⊥ слоям	2—34	26
» » ∥ »	2—34	06
» дубовое ⊥ слоям	2—34	54
» » ∥ »	2—34	05
Кленовое ⊥	2—34	48
» ∥	2—34	06
Красное ⊥	2—34	40
» ∥	2—34	04
» сосновое ⊥ слоям	2—34	34
» » ∥ »	2—34	05
Железо мягкое	0—100	114
Сталь (1,5% C)	0—100	105
Золото	17—100	143
Инвар (36,1% Ni)	17—100	009
Иридий	17—100	066
Кадмий	18—43	247
Калий	0—50	83
» хлористый	0—25	28
Каолин	15—1000	053
Кварц ∥ оси	40	078
» ⊥ оси	40	141
» плавленый	0—80	004
Кирпич	—	09
Константан (60% Cu, 40% Ni)	0—16	122
Кобальт	40	127
Кремний	3—18	025
Латунь (62% Cu, 38% Zn)	10—16	189
Лед	—10— 0	507
Магналий (85,9% Al, 14,1% Mg)	12—39	238
Магний	0—100	260
Манганин (84% Cu, 4% Ni, 12% Mn)	18	181
Медь	18	167
Молибден	25—100	052
Мрамор белый	15—100	14
Натрий	0—50	72
» хлористый	0—25	42
Нейзильбер	0—100	184
Никель	0—100	130
Нихром	18	123

Продолжение

	t (°C)	$\alpha \cdot 10^4$ (1/*град*)
Олово	18—100	0,270
Платина	0,6—21.5	089
Свинец	17—100	293
Сера ромб.	13—50	641
Серебро	0—100	197
Стекло крон	0—100	ок. 0, 09
» флинт	0—100	ок. 0, 07
Сурьма	17—100	109
Углерод алмаз	50	013
» графит	50	08
Фарфор	0—100	ок. 0, 03
Хром	0—100	084
Целлулоид	20—40	74
Шпат известковый ∥ оси	40	26
» » ⊥ оси	40	05
» плавиковый	40	19
Эбонит	17—25	77

Таблица 2-60. Термические коэффициенты расширения жидкостей

В таблице даны значения кубических коэффициентов расширения β жидкостей при температуре 20° С; теми же значениями β можно пользоваться при температурах, отличающихся от 20° С в среднем на $\pm$ 10° С

	$\beta \cdot 10^3$ (1/*град*)		$\beta \cdot 10^2$ (1/*град*)
Анилин	0,085	Раствор $CaCl_2$ 5,8%	0,025
Ацетон	148	» » 40,9%	046
Бензол	124	» KCl 2,5%	023
Бром	111	» » 24,3%	035
Вода [1])	207	» NaCl 6,1%	030
Глицерин	051	» » 20,6%	041
Керосин ($D = 0{,}8467$)	095	Ртуть [2])	0181
Кислота азотная 25%	058	Сероуглерод	121
» » 50%	091	Скипидар	ок. 0,095
» серная 96%	055	Спирт амиловый	092
» уксусная безв.	107	» метиловый	125
Ксилол (мета-)	099	» пропиловый	096
» (орто-)	097	» этиловый	110
» (пара-)	101	Толуол	109
Нефть	ок. 0,09	Хлороформ	127
Пентант (норм.)	160	Эфир этиловый	165

Примечания к табл. 2-60. [1]) См. табл. 2-61. [2]) См. табл. 2-62.

Таблица 2-61. Тепловое расширение воды

Объемное расширение воды в интервале температур 0 и 5° С не следует общему закону теплового расширения тел, так как при 4° С (или, точнее, при 3,98 °С) вода имеет минимум удельного объема, т. е. наибольшую плотность [1]. Чрезвычайно тщательные исследования плотности воды в зависимости от температуры привели к ряду формул, в которых объем воды представлен как функция ее температуры. Формулы, дающие наиболее точные результаты, представлены в таблице.

В области температур между 0 и 5° С эти формулы дают значения, очень близкие к действительным значениям плотности воды.

Интервал температур (°С)	Формулы	
$-10 \div 4$	$v_t = v_0 (1 - 6{,}4807 \cdot 10^{-5} t + 8{,}6697 \cdot 10^{-6} t^2 - 2{,}6211 \cdot 10^{-7} t^3)$	(2-51)
$0 \div 33$	$v_t = v_0 (1 - 6{,}4268 \cdot 10^{-5} t + 8{,}50526 \cdot 10^{-6} t^2 - 6{,}78977 \cdot 10^{-8} t^3 + 4{,}01209 \cdot 10^{-10} t^4)$	(2-52)
$0 \div 80$	$v_t = v_0 (1 - 5{,}3255 \cdot 10^{-5} t + 7{,}61532 \cdot 10^{-6} t^2 - 4{,}37217 \cdot 10^{-8} t^3 + 1{,}64322 \cdot 10^{-10} t^4)$	(2-53)

Примечание к таблице 2-61. [1]) Здесь необходимо сделать следующие замечания: а) Температура наибольшей плотности воды 4° С отвечает нормальному атмосферному давлению; при повышении давления (значительном) температура наибольшей плотности воды заметно понижается, так при 41,3 *атм* она равна 3,3° С; б) температуру наибольшей плотности тяжелой воды D_2O, которая по всем своим свойствам заметно отличается от H_2O (стр. 269), принимают равной 11,6° С (при давлении 1 *атм*).

Таблица 2-62. Тепловое расширение ртути

В таблице приводятся зависимости объемного коэффициента расширения ртути β_t от температуры в указанных пределах.

Автор	Интервал температур (°С)	Формула	
Менделеев	$0 \div 100$	$\beta_t = 1{,}801 \cdot 10^{-4} + 0{,}2 \cdot 10^{-7} t$	(2-54)
Рекнагель	$0 \div 100$	$\beta_t = 1{,}8018 \cdot 10^{-4} + 0{,}94 \cdot 10^{-8} t + 0{,}5 \cdot 10^{-10} t^2$	(2-55)
Шаппюи	$-20 \div 100$	$\beta_t = 1{,}815405 \cdot 10^{-4} + 0{,}195130 \cdot 10^{-8} t + 1{,}00917 \cdot 10^{-10} t^2 - 2{,}03862 \cdot 10^{-18} t^3$	(2-56)

Таблицы 2-63а и б. Термические коэффициенты расширения и давления газов

Температурный коэффициент расширения α_p газов при постоянном давлении определяется по формуле

$$\alpha_p = \frac{V_t - V_0}{V_0 t}, \qquad (2\text{-}57)$$

где V_t и V_0 обозначают объемы газов соответственно при t °С и 0° С. В таблице 2-63а даны средние значения α_p для интервала температур 0—100° С в предположении, что давление газа остается постоянным и равным нормальному.

Температурный коэффициент давления газов при постоянном объеме α_v определяется по формуле

$$\alpha_v = \frac{p_t - p_0}{p_0 t}, \qquad (2\text{-}58)$$

где p_t и p_0 обозначают давление газа при температурах соответственно t °С и 0° С. В таблице 2-63а даны значения α_v, средние для интервала температур 0—100° С, в предположении, что p_0 равно 1000 *мм* рт. ст.

Для идеального газа α_p и α_v равны ($\alpha_p = \alpha_v$).

Таблица 2-63а

	$\alpha_p \cdot 10^6$ (*град*$^{-1}$)	$\alpha_v \cdot 10^6$ (*град*$^{-1}$)		$\alpha_p \cdot 10^6$ (*град*$^{-1}$)	$\alpha_v \cdot 10^6$ (*град*$^{-1}$)
Азот	3674	3672	Гелий	3658	3660
Аммиак	3804	3770	Закись кислорода	3719	3676
Водород	3661	3663	Кислород	3665	3674
Воздух (свободный от CO_2)	3671	3674	Окись углерода .	3669	3667
			Углекислота	3741	3726

Исследования одновременно показали, что значения α_p и α_v зависят от начального давления p газа; результаты таких исследований даны в таблице 2-63б.

Таблица 2-63б

	p (*атм*)	α_p	p (*см*, Hg)	α_v
Водород	200	0,00332	0,0077	0,003328
»	400	,00295	,025	,003623
»	600	,00261	,47	,003656
»	800	,00242	100,0	,0036626
Кислород	200	0,00534	0,007	0,004161
»	400	,00459	,25	,003984
»	600	,00357	,51	,003831
»	800	,00288	1,9	,0036683
»	1000	,00241	18,5	,003690
Углекислота . . .	51,8 (*см*, Hg)	0,0037073	51,8	0,0036981
» . .	99,8	,0037410	99,8	,0037262
» . .	137,7	,0037703	100,0	,0037248

Таблицы 2-64а и б. Точки плавления и кипения тел

В таблице 2-64а даны значения точек плавления $t_{пл}$ и точек кипения $t_к$ при атмосферном давлении 760 *мм* рт. ст. для чистых тел, т. е. свободных от примесей; температуры $t_{пл}$ и $t_к$ даны в градусах стоградусной шкалы (°С). Поправка точки кипения на атмосферное давление указана в табл. 2-66.

В таблице 2-64б даны температуры плавления льда при различных давлениях p, выраженных в $кГ/см^2$.

	$t_{пл}$ (°С)	$t_к$ (°С)		$t_{пл}$ (°С)	$t_к$ (°С)
Азот	— 209,86	— 195,81	Калий хлористый (KCl)	776	1417
Алюминий	660,1	2330	Кальций	850	1440
Анилин	— 6,2	184,3	Камфара	176	204
Аргон	— 189,2	— 185,9	Кварц плавленый	1725	2230 (2590)
Ацетон	— 94,3	56,2	Кислород	— 218,8	— 182,970[2])
Барий	704	1600	» (озон O_3)	— 251,4	— 111,5
Бензол	5,54	80,2	Кислота уксусная (безв.)	16,6	118,1
Бор	2100	2550	Кобальт	1492	3000
Бром	— 7,2	58,8	Криптон	— 157	— 153,2
Бромоформ	6,5	149,5	Ксенон	— 112	— 108,1
Висмут	271,3	1420	Ксилол (мета-)	— 47,4	139,0
Водород	— 259,2	— 252,8	Литий	186	1380
» бромистый (HBr)	— 88	— 67,1	Магний	650	1100
» хлористый (HCl)	— 112	— 84	Марганец	1260	2150
Вольфрам	3380	6000	Медь	1083	2582
Гелий	— 271,4 [1])	— 268,9	Метан	— 182,5	— 161,5
Глицерин	18,6	290	Молибден	2625	4800
Железо	1535	2800	Натрий	97,7	883
Закись азота	— 102,4	— 89,5	» хлористый (NaCl)	804	1413
Золото	1063	2660	Нафталин	80,1	217,7
Кадмий	320,9	766	Неон	— 248,7	— 246,1
Калий	63	760	Никель	1453	2800

Продолжение

	$t_{пл}$ (°C)	$t_к$ (°C)		$t_{пл}$ (°C)	$t_к$ (°C)
Нитробензол	5,9	210,9	Спирт этиловый	— 117	78,5
Окись азота	— 163,6	— 151,8	Стронций	770	1360
Окись углерода	— 207	— 192	Сурьма	630,5	1440
Олово	231,9	2337	Толуол	— 95,0	110,6
Парафин	— 38,56	350—430	Фтор	— 223	— 187,9
Пентан (норм.)	— 129,7	36,15	Хлор	— 101	— 34,1
Платина	1769	4000	Хлороформ	— 63,5	— 61,0
Радий	700	1140	Хром	1800	2300
Ртуть	— 38,87	356,58	Цинк	419,5	907
Свинец	327,3	1750	Цирконий	1860	> 2900
Сера	112,8	444,600 [3]	Этан	— 183,3	— 88,6
Серебро	960,8	2193	Этилен	— 169,2	— 103,7
Спирт метиловый	— 93,9	64,1	Эфир этиловый	— 116,0	34,6

Примечания к табл. 2-64а. [1]) Под давлением 30 *ат*. [2]) Первичная реперная точка международной температурной шкалы (табл. 2-58). [3]) См. прим. [2]).

Таблица 2-64б

p (*кГ/см*^{2})	1	336	615	890	1155	1410	1625	1835	2042	2200
$t_{пл}$ (°C)	0,0	—2,5	—5,0	—7,5	—10,0	—12,5	—15,0	—17,5	—20,0	—22,1

Таблица 2-65. Точка кипения воды при различных барометрических давлениях

В таблице даны значения точки кипения $t_к$ воды в интервале барометрических давлений H от 680 до 800 *мм* рт. ст. через 1 *мм* рт. ст. Для давлений, промежуточных по отношению к давлениям, данным в таблице, точка кипения воды может быть вычислена посредством линейной интерполяции.

H (*мм* рт. ст.)	$t_к$ (°C)	H (*мм* рт. ст.)	$t_к$ (°C)	H (*мм* рт. ст.)	$t_к$ (°C)	H (*мм* рт. ст.)	$t_к$ (°C)
680	96,916	710	98,106	740	99,255	770	100,366
681	956	711	145	741	293	771	402
682	996	712	184	742	331	772	439
683	97,037	713	223	743	368	773	475
684	077	714	262	744	406	774	511
685	117	715	301	745	443	775	547
686	157	716	339	746	481	776	584
687	197	717	378	747	518	777	620
688	237	718	417	748	555	778	656
689	277	719	455	749	593	779	692
690	317	720	494	750	630	780	728
691	357	721	532	751	667	781	764
692	397	722	571	752	704	782	800
693	437	723	609	753	741	783	836
694	477	724	648	754	778	784	872
695	516	725	686	755	815	785	908
696	556	726	624	756	852	786	944
697	596	727	762	757	889	787	980
698	635	728	801	758	926	788	101,016
699	675	729	839	759	963	789	051
700	714	730	877	760	100,000	790	087
701	754	731	915	761	037	791	122
702	793	732	953	762	073	792	158
703	832	733	991	763	140	793	194
704	872	734	99,029	764	147	794	229
705	911	735	067	765	184	795	265
706	950	736	105	766	220	796	300
707	989	737	142	767	257	797	335
708	98,028	738	180	768	293	798	371
709	067	739	218	769	330	799	406
						800	441

Таблица 2-66. Зависимость точки кипения жидкостей от давления

Если показание барометра не выходит за пределы обычных колебаний атмосферного давления, то точку кипения жидкости при давлении H можно определить по формуле

$$t_к = t_0[1 + c\,(H - 760)], \qquad (2\text{-}59)$$

где t_0—точка кипения жидкости при атмосферном давлении 760 *мм* рт. ст. и c — некоторый коэффициент, различный для различных жидкостей; его величина дается в таблице.

	$c \cdot 10^6$		$c \cdot 10^3$
Анилин	112	Сероуглерод	129
Ацетон	117	Скипидар	131
Бензол	122	Спирт амиловый	097
Вода	101	» метиловый	103
Кислота уксусная	112	» пропиловый	095
Ксилол (мета-)	128	» этиловый	097
» (орто-)	118	Толуол	117
» (пара-)	136	Фенол	094
Пентан (норм.)	130	Хлороформ	024
Ртуть	120	Эфир этиловый	129

Таблица 2-67. Давление и плотность насыщенного водяного пара в интервале температур от — 20 до 100° С

В таблице для указанного интервала температур даны:
1) давление p насыщенного водяного пара, выраженное в *мм* рт. ст.,
2) плотность ρ насыщенного водяного пара, выраженная в $г/м^3$.

t (°С)	p (*мм* рт. ст.)	ρ ($г/м^3$)	t (°С)	p (*мм* рт. ст.)	ρ ($г/м^3$)	t (°С)	p (*мм* рт. ст.)	ρ ($г/м^3$)
—20	0,772	0,88	15	12,78	12,8	35	42,175	39,6
—18	0,935	1,05	16	13,634	13,6	36	44,563	41,7
—16	1,128	1,27	17	14,530	14,5	37	47,067	44,0
—14	1,357	1,51	18	15,477	15,4	38	49,692	46,2
—12	1,627	1,80	19	16,477	16,3	39	52,442	48,6
—10	1,946	2,14	20	17,535	17,3	40	55,324	51,2
— 8	2,321	2,54	21	18,650	18,3	45	71,88	65,6
— 6	2,761	2,99	22	19,827	19,4	50	92,51	83,2
— 4	3,276	3,51	23	21,068	20,6	55	118,04	104,6
— 2	3,879	4,13	24	22,377	21,8	60	149,38	130,5
0	4,579	4,84	25	23,756	23,0	65	187,54	161,5
2	5,294	5,60	26	25,209	24,4	70	233,71	198,4
4	6,101	6,40	27	26,739	25,8	75	289,13	242,1
6	7,013	7,3	28	28,349	27,2	80	355,12	293,8
8	8,045	8,3	29	30,043	28,7	85	433,62	354,1
10	9,209	9,4	30	31,824	30,3	90	525,76	424,1
11	9,844	10,0	31	33,695	32,0	95	633,90	505,0
12	10,518	10,7	32	35,663	33,8	100	760,00	598,0
13	11,231	11,4	33	37,729	35,6	110	1074,26	827,0
14	11,987	12,1	34	39,898	37,6	120	1489,14	1122,0

Таблица 2-68. Психрометрическая таблица

При определении влажности воздуха аспирационным психрометром приходится пользоваться формулой

$$E = E_1 - 0{,}00066B\,(t - t_1)\,[1 + 0{,}00115\,(t - t_1)], \qquad (2\text{-}60)$$

где E обозначает давление паров воды, находящихся в воздухе, температура которого t определяется по показаниям сухого термометра; E_1 обозначает давление паров воды, насыщающих воздух при той же температуре t; t_1 обозначает температуру влажного термометра при достижении стационарного состояния.

В таблице даны значения относительной влажности воздуха в процентах в зависимости от показаний сухого термометра (t °C) и разности показаний сухого и влажного термометров ($t - t_1$) °C в интервале температур от 0 до 20° С при барометрическом давлении 760 *мм* рт. ст.

t (показания сухого термометра в °C)	$t° - t°_1$ (разность показаний сухого и влажного термометров в °C)											
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
0	100	81	63	45	28	11						
1	100	83	65	48	32	16						
2	100	84	68	51	35	20						
3	100	84	69	54	39	24	10					
4	100	85	70	56	42	28	14					
5	100	86	72	58	45	32	19	6				
6	100	86	73	60	47	35	23	10				
7	100	87	74	61	49	37	26	14				
8	100	87	75	63	51	40	29	18	7			
9	100	88	76	64	53	42	31	21	11			
10	100	88	76	65	54	44	34	24	14	5		
11	100	88	77	66	56	46	36	26	17	8		
12	100	89	78	68	57	48	38	29	20	11		
13	100	89	79	69	59	49	40	31	23	14	6	
14	100	89	79	70	60	51	42	34	25	17	9	
15	100	90	80	71	61	52	44	86	27	20	12	5
16	100	90	81	71	62	54	46	37	30	22	15	8
17	100	90	81	72	64	55	47	39	32	24	17	10
18	100	91	82	73	65	56	49	41	34	27	20	13
19	100	91	82	74	65	58	50	43	35	29	22	15
20	100	91	83	74	66	59	51	44	37	30	24	18
21	100	91	83	75	67	60	52	46	39	32	26	20
22	100	92	83	76	68	61	54	47	40	34	28	22
23	100	92	84	76	69	61	55	48	42	36	30	24
24	100	92	84	77	69	62	56	49	43	37	31	26
25	100	92	84	77	70	63	57	50	44	38	33	27
26	100	92	85	78	71	64	58	51	46	40	34	29
27	100	92	85	78	71	65	59	52	47	41	36	30
28	100	93	85	78	72	65	59	53	48	42	37	32
29	100	93	86	79	72	66	60	54	49	43	38	33
30	100	93	86	79	73	67	61	55	50	44	39	34

Таблицы 2-69а и б. Давление насыщенных паров жидкостей при различных температурах

В таблице 2-69а даны значения давления p насыщенных паров жидкостей, выраженные в *мм* рт. ст., при различных температурах. Для температур, промежуточных по отношению к температурам, данным в таблице, давление насыщенных паров можно приближенно вычислять посредством линейной интерполяции.

Таблица 2-69а

Жидкости	t (°C)	p (*мм* Hg)	Жидкости	t (°C)	p (*мм* Hg)
Анилин	182	713,75	Ртуть	356,58	760,0
	183	732,65		358	774,45
	183,9	760,0		360	802,62
	184	751,9	Спирт метиловый	56,5	500
	185	771,5		60,5	600
Ацетон	40	420,15		64,1	700
	50	620,86		65,8	760,0
	60	860,48	Спирт этиловый .	51,5	235
Бензол	50	271,37		61	353
	60	390,10		68	509
	70	547,42		77	740
	80	751,86		78,5	760,0
	80,3	760,0	Толуол	99,4	550
	90	1012,75		102,5	600
Кислота уксусная	100	417,1		105,3	650
	110	580,8		107,8	700
	120	794,0		107,8	700
Пентан	20	420,2		110,6	760,0
	30	610,9	Хлороформ . . .	40	366
	40	873		51	541
Ртуть	350	669,77		60	731
	354	720,56		61,0	760,0
	356	747,11		70,2	1010

В таблице 2-69б даны более точные значения давления ртутных паров в *мм* Hg на интервале температур от —38° до 46° С.

Таблица 2-69б

t (°C)	p (*мм* Hg)	t (°C)	p (*мм* Hg)	t (°C)	p (*мм* Hg)	t (°C)	p (*мм* Hg)
—38	$1{,}45\cdot10^{-6}$	—28	$6{,}30\cdot10^{-6}$	—18	$23{,}2\cdot10^{-6}$	—8	$76{,}2\cdot10^{-6}$
—36	$1{,}97\cdot10^{-6}$	—26	$8{,}28\cdot10^{-6}$	—16	$29{,}8\cdot10^{-6}$	—6	$95{,}4\cdot10^{-6}$
—34	$2{,}66\cdot10^{-6}$	—24	$10{,}8\cdot10^{-6}$	—14	$38{,}0\cdot10^{-6}$	—4	$119{,}0\cdot10^{-6}$
—32	$3{,}59\cdot10^{-6}$	—22	$14{,}0\cdot10^{-6}$	—12	$48{,}1\cdot10^{-6}$	—2	$149{,}0\cdot10^{-6}$
—30	$4{,}78\cdot10^{-6}$	—20	$18{,}1\cdot10^{-6}$	—10	$60{,}6\cdot10^{-6}$	0	$185{,}0\cdot10^{-6}$
0	0,000185	12	0,000588	24	0,001691	36	0,004471
2	0,000228	14	0,000706	26	0,002000	38	0,005219
4	0,000276	16	0,000846	28	0,002359	40	0,006079
6	0,000335	18	0,001009	30	0,002777	42	0,007067
8	0,000406	20	0,001201	32	0,003261	44	0,008200
10	0,000490	22	0,001426	34	0,003823	46	0,009497

Таблица 2-70. Критические даты

В таблице даны: 1) критическая температура $t_{кр}$ по стоградусной шкале; 2) критическое давление $p_{кр}$, выраженное в физических атмосферах.

	$t_{кр}$ (°C)	$p_{кр}$ (*am*)		$t_{кр}$ (°C)	$p_{кр}$ (*am*)
Азот	— 147,1	33,5	Неон	— 228,65	26,86
Аммиак	132,4	111,5	Окись азота	— 92,9	64,6
Анизол	369	41,3	» углерода	— 140,2	34,53
Анилин	425,6	52,3	Пентан (изо-)	187,8	32,8
Аргон	— 122,4	47,996	Пентан (норм.)	197,2	33,04
Ацетон	235,0	47,0	Пропан	95,6	43
Ацетилен	35,9	62,0	Пропилен	92,3	45,0
Бензол	288,5	47,7	Пропионовая кислота	339,5	53,0
Бром	302	131	Радон	104	62
Бромбензол	397	44,6	Ртуть	>1550	>200
Бутан (изо-)	134	36	Сернистый газ	157,2	77,7
Бутан (норм.)	152,8	37,5	Сероводород	100,4	88,9
Вода	374,1	217,5	Сероокись углерода	105	61
Вода тяжелая	371,5	218	Сероуглерод	273	76
Водород	— 239,92	12,80	Спирты:		
Водород бромистый	90	84	бутиловый (изо-)	265	48
Водород иодистый	151	82	бутиловый (норм.)	287	48,4
Водород селенистый	138	88	метиловый	240	78,58
Водород хлористый	51,4	81,55	пропиловый (изо-)	235	53
Водород цианистый	183,5	50	пропиловый (норм.)	263,7	49,95
Воздух	— 140,7	37,2	этиловый	243,6	62,8
Гелий	— 267,9	2,26	Толуол	320,6	41,6
Германий четыреххлористый	277	38	Углекислота	31,1	73,0
Гидразин	380	145	Углерод четыреххлористый	283,15	44,98
Закись азота	36,48	71,7	Уксусная кислота	321,6	57,2
Кислород	— 118,8	49,7	Фенол	419,2	60,5
Крезол (мета-)	432	45,0	Фосген	181,7	56,0
» (орто-)	422	49,4	Фосфин	51	64
» (пара-)	426	50,8	Фтор	— 129	55
Кремний четыреххфтористый	— 1,5	50	Хлор	144,0	76,1
Кремнистый водород	— 3,5	48	Хлорбензол	359	44,6
Криптон	— 63,7	54,9	Хлороформ	262,5	54,9
Ксенон	16,7	58,22	Циан	126,6	58,2
Ксилол (мета-)	345,6	35,8	Этан	32,3	48,8
Метан	— 82,1	45,8	Этил хлористый	187,2	51,72
Метил хлористый	143,1	65,8	Этиламин	183,2	55,5
Метил фтористый	44,9	62,0	Этилен	9,5	50,7
Нафталин	468,2	39,2	Эфир этиловый	193,8	35,5

Таблица 2-71. Теплопроводность твердых тел

Для большинства чистых металлов теплопроводность уменьшается с повышением температуры, для сплавов и плохих проводников тепла обычно наблюдается обратная зависимость. Если обозначить через λ, σ и T соответственно коэффициент теплопроводности, удельную электропроводность и абсолютную температуру, то для чистых металлов отношение $\lambda/\sigma T$ остается приближенно постоянной величиной (стр. 366).

В таблице даны значения коэффициента теплопроводности λ для некоторых металлов и неметаллических твердых тел, выраженные в *кал/см · сек · град*; указаны также температуры, при которых производились измерения λ.

	t (°C)	λ		t (°C)	λ
Алюминий	20	0,48	Мрамор	0	0,007
Асбест (картон)	500	0,0004	Натрий	20	0,32
Бронза [1]	18	0,14	Каменная соль	30	0,015
Висмут	0	0,018	Нейзильбер [5]	18	0,06
»	18	0,019	Никель	18	0,14
Вольфрам	0	0,38	Олово	18	0,16
»	18	0,35	Парафин	17	0,0005
Воск	20	0,0001	Платина	0	0,167
Вуда сплав	10—20	0,03	»	17	0,165
Гипс искусств.	0	0,003	Пробка	30	0,0007
Дерево дубовое	15	0,0006	Свинец	0	0,084
» сосновое	20	0,0004	»	18	0,083
Железо мягкое	18	0,14	Сера ромб.	0	0,0006
Золото	18	0,70	Серебро	18	0,99
Иридий	17	0,14	Слюда [6]	50	0,0018
Кадмий	18	0,22	Сталь (1,5% C)	0	0,11
Кварц крист. $\perp$ оси	0	0,016	Стекло зеркальное	12,5	0,0018
» » $\parallel$ оси	0	0,030	» крон	12,5	0,0016
» плавленый	0	0,003	» флинт	12,5	0,0025
Кобальт	30	0,16	Сурьма	0	0,044
Константан [3]	18	0,054	Углерод (графит)	7	0,012
Латунь [2]	18	0,26	» в порошке	30	0,0003
Лед	0	0,0055	Угли для дуги	50	0,015
Магний	0	0,37	Фарфор	20	0,0025
Манганин [4]	18	0,053	Целлулоид	8	0,0003
Медь	0	0,920	Шпат известковый $\perp$ оси	8,5	0,007
»	18	0,916	Шпат известковый $\parallel$ оси	8,5	0,009
Молибден	17	0,35	Эбонит	25	0,0004

Примечания к табл. 2-71. [1]) Состава: 85% Cu + 6% Sn + 9% Zn. [2]) Состава: 60% Cu + 40% Ni. [3]) Состава: 70% Cu + 30% Zn. [4]) Состава: 84% Cu + 12% Mn + 4% Ni. [5]) 63% Cu + 15% Ni + 22% Zn. [6]) В направлении, перпендикулярном к плоскостям спайности.

Таблица 2-72. Теплопроводность жидкостей

Приближенные значения коэффициентов теплопроводности λ некоторых жидкостей выражены в *кал/см · сек · град*. Числа таблицы дают значения величины $\lambda \cdot 10^2$; указаны также температуры, при которых производились измерения λ.

	t (°C)	$\lambda \cdot 10^2$		t (°C)	$\lambda \cdot 10^2$
Анилин	12	0,041	Нитробензол	12,5	0,038
Ацетон	0	043	Пентан (норм.)	14	029
Бензол	12	033	Растворы: NH_3 26%	18	119
Вода	4,1	129	$CaCl_2$ 15%	32	138
»	20	143	KCl 20%	32	133
»	80	154	NaCl 10%	32	148
»	90	160	Сероуглерод	0	039
Глицерин	12	067	»	14	034
»	20	068	Скипидар	12	026
Керосин	13	035	Спирт амиловый	12	033
Кислота серная 30%	32	124	» »	33	027
Кислота серная 60%	32	105	» метиловый	12	047
Кислота соляная 12,5%	32	126	» »	32	040
Кислота соляная 25%	32	115	» этиловый	12	042
Кислота уксусная	12	047	» »	33	035
» »	25	043	Толуол	0	035
Ксилол (мета-)	0	034	»	14,5	034
			Углерод четыреххлористый	23	028
			Хлороформ	12	029
			Эфир этиловый	14,9	032

Таблица 2-73. Теплопроводность газов

Теплопроводность λ газов, как это следует из теоретических соображений, должна возрастать при повышении температуры. В таблице приведены коэффициенты теплопроводности λ некоторых газов, вычисленные теоретически (значения λ при температурах 273,1°; 293,1° и 298,1° К определены экспериментально). Значения λ выражены в *кал/см · сек · град* (в табл. даны значения величины $\lambda \cdot 10^5$); температуры даны по абсолютной шкале.

T (°K)	$\lambda \cdot 10^5$								
	O_2	CO	He	H_2	CH_4	NO	CO_2	N_2O	Воздух
100	2,16	2,09	17,51	16,25	2,54	—	—	—	2,20
150	3,29	3,15	22,73	23,54	3,86	3,21	—	—	3,32
200	4,37	4,17	27,56	30,64	5,22	4,24	2,27	2,33	4,36
250	5,39	5,11	32,00	37,09	6,64	5,23	3,08	3,19	5,27
273,1	5,84	5,52	33,90	39,65	7,34	5,67	3,48	3,62	5,66
293,1	6,22	5,88	35,48	41,64	7,96	6,06	3,85	4,01	—
298,1	6,31	5,96	35,86	42,10	8,12	6,15	3,95	4,11	—
300	6,35	6,00	36,00	42,27	8,19	6,19	3,98	4,15	6,10
310	6,55	6,18	36,74	43,19	8,52	6,38	4,17	4,35	6,26
320	6,75	6,35	37,46	44,11	8,86	6,57	4,37	4,56	6,42
330	6,95	6,53	38,15	45,02	9,22	6,76	4,57	4,77	6,58
350	7,38	6,88	39,44	46,85	9,98	7,13	4,99	5,21	6,90
380	8,03	7,43	41,17	49,60	11,22	7,69	5,63	5,86	7,39

Таблица 2-74. Удельные теплоемкости твердых и жидких тел

В таблице даны: 1) приближенные значения удельных теплоемкостей c ряда твердых и жидких тел, средние для температурных интервалов (t °C), указанных в таблице; 2) значения удельных теплоемкостей c некоторых тел при низких температурах. Все значения c выражены в *кал/г · град*.

	t (°C)	c		t (°C)	c
Алюминий	16 — 100	0,21	Магний	17 — 100	0,25
»	— 240	009	Марганец	20 — 100	12
Анилин	12 — 50	515	Медь	18 — 100	093
Ацетон	3 — 23	52	»	— 250	0035
Бензол	6 — 60	41	Молибден	20 — 100	065
Бром	— 13,1	088	Мрамор белый	0 — 100	21
Бронза	14 — 98	09	Натрий	0 — 20	29
Висмут	17 — 100	031	» хлористый	17 — 99	21
»	— 186	020	Никель	15 — 100	11
Вольфрам	20 — 100	034	Нитробензол	0 — 30	339
Глицерин	15 — 50	58	Олово	18 — 100	0,055
Гранит	12 — 100	ок.0,19	Палладий	0 — 100	054
Железо	18 — 100	11	Пентан	0	51
»	— 182,7	05	Платина	0 — 100	032
Золото	0 — 100	03	Растворы:		
Иридий	0 — 100	03	KCl 25%	18	828
Кадмий	0 — 100	06	» 50%	18	904
Калий	0 — 50	19	» 100%	18	948
» хлористый	16 — 99	16	NaCl 25%	18	880
Кварц крист.	0 — 100	19	» 50%	18	931
» плавленый	0 — 100	18	» 100%	18	962
Керосин	18 — 99	ок.0,50	Родий	10 — 97	058
Кислота азотная 3,4%	20	96	Рубидий	20 — 35	079
Кислота азотная 12,3%	20	87	Свинец	18 — 100	031
Кислота азотная 58,3%	21 — 52	65	Сера ромб.	0 — 32	166
Кислота серная 5,2%	5 — 22	96	Серебро	15 — 100	05
Кислота серная 50%	5 — 22	59	Сероуглерод	0 — 30	24
Кислота серная 85%	0	39	Спирт амиловый	17 — 96	64
Кислота соляная 5,4%	20 — 50	95	» метиловый	15 — 20	57
Кислота соляная 16,8%	18	55	» этиловый	12 — 30	60
Кислота уксусная	1 — 8	62	Сталь (1,25% C)	10 — 13	12
Константан	0	098	Стекло	10 — 50	16—20
Кремний	0 — 99	17	Сурьма	17 — 100	050
Ксилол (мета-)	30	38	Тантал	20	036
Латунь	20 — 100	09	Толуол	0	386
Лед	— 20	48	Углерод:		
»	— 10	53	алмаз	0 — 20	112
			»	— 185	0025
			графит	20 — 85	174
			уголь аморф.	26 — 76	168
			Фарфор	15 — 950	26
			Хром	18 — 100	111
			Цинк	0	91
			»	— 201	057
			»	— 233	027

Таблица 2-75. Удельная теплоемкость воды и ртути

В таблице даны значения: 1) удельной теплоемкости воды в интервале температур от 0 до 100° С; 2) удельной теплоемкости c ртути в интервале температур от 0 до 260° С. Все значения c выражены в *кал/г · град*. Удельная теплоемкость воды при 20° С принята равной 1,0000 *кал/г · град*.

Теплоемкость c воды				Теплоемкость c ртути	
t (°С)	c	t (° С)	c	t (°С)	c
0	1,0094	50	0,9987	0	0,0334
5	0054	55	9992	20	332
10	0027	60	1,0000	40	331
15	0011	65	0008	60	330
20	1,0000	70	0016	80	329
25	0,9992	75	0024	100	328
30	9987	80	0033	140	326
35	9983	85	0043	160	325
40	9982	90	0053	200	324
45	9983	100	0074	260	323

Таблица 2-76. Удельные теплоемкости газов и паров

Удельные теплоемкости газов c_p и c_v обыкновенно относят к одному грамму газа, выражая их в *кал/г · град*. Теоретически следует, что $c_p > c_v$ и их отношение c_p/c_v, обозначаемое γ, для идеального газа должно быть равно 1,41. Но очень часто применяют, кроме c_p и c_v, еще так называемые молекулярные (молярные, мольные) теплоемкости газов C_p и C_v, вычисляя их по отношению к 1 *г-молю* газа. Очевидно, что

$$C_p = c_p M,\ C_v = c_v M \text{ и } C_p/C_v = c_p/c_v = \gamma, \qquad (2\text{-}61)$$

где M обозначает молекулярный вес.

В таблице даны средние значения теплоемкостей c_p и C_p, для некоторых газов и паров при нормальном давлении; интервал температур (t °С), для которого были получены эти значения, указывается. Дано также отношение c_p/c_v для средней комнатной температуры.

	t (°С)	c_p	C_p	$\frac{c_p}{c_v} = \gamma$
Азот	0 — 20	0,248	6,95	1,404
Аммиак (пары)	24 — 200	0,536	9,1	1,34
Аргон	15	0,125	5,0	1,67
Ацетилен	18	0,383	9,97	1,26
Ацетон (пары)	26 — 110	0,374	21,7	1,26
Бензол (пары)	80	0,260	20,3	—
Бром (пары)	19 — 388	0,055	9,0	1,32

Продолжение

	t (°C)	c_p	C_p	$\frac{c_p}{c_v} = \gamma$
Водород	10 — 200	3,409	6,87	1,41
Воздух	0 — 100	0,237	7,0	1,40
Гелий	— 180	1,251	5,01	1,66
Закись азота	16 — 200	0,226	9,95	1,32
Кислород	13 — 207	0,217	6,94	1,40
Метан	18 — 208	0,593	9,5	1,31
Окись азота	13 — 172	0,231	6,93	1,40
Окись углерода	26 — 198	0,248	6,80	1,40
Сернистый газ	16 — 202	0,134	8,59	1,29
Сероводород	16 — 206	0,245	8,35	1,32
Углекислота	15	0,199	8,76	1,30
Хлор	13 — 202	0,124	8,79	1,36
Хлороформ (пары)	27 — 118	0,144	17,2	1,15
Этан	15	0,403	12,11	1,22
Этилен	15 — 100	0,399	11,19	1,25

Таблица 2-77. Удельные теплоты плавления и парообразования

В таблице даны значения удельной теплоты плавления λ и удельной теплоты парообразования ρ, выраженные в *кал/г*. Предполагается, что плавление и кипение происходят при нормальном атмосферном давлении, т. е. при температурах, которые отвечают табличным значениям точек плавления и кипения (табл. 2-64).

	λ (*кал/г*)	ρ (*кал/г*)		λ (*кал/г*)	ρ (*кал/г*)
Азот	6,1	47,7	Магний	46,5	—
Алюминий	92,4	—	Марганец	36,7	—
Аммиак	108,1	327,1	Медь	41,6	—
Анилин	20,9	109,6	Метан	14,5	—
Аргон	6,7	37,6	Натрий	27,4	—
Ацетон	19,6	124,5	» хлористый	123,5	—
Бензол	30,2	94,2	Окись углерода	8,0	50,5
Бром	16,2	43,7	Олово	14,3	—
Висмут	12,6	205	Платина	27,2	—
Вода (лед)	79,7	539,6	Ртуть	2,8	70,6
Водород	14,0	107,2	Свинец	5,9	221,5
Воздух (20% O_2)	—	50,9	Селен	20,3	—
Гелий	—	5,5	Сера	13,2	—
Железо	ок.6,5	—	Серебро	21,1	—
Золото	15,8	—	» хлористое	30,7	—
Кадмий	13,7	—	Спирт метиловый	16,4	263,3
» хлористый	57,8	—	» этиловый	25,8	204,2
Кислород	3,3	51,0	Углекислота	45,3	ок.55
Кислота азотная	9,5	114,9	Фосфор	4,7	130
» серная	24,0	122,1	Хлор	23,0	62,7
» уксусная	44,7	96,8	Цинк	28,1	—
Ксилол (пара-)	39,3	—	Эфир этиловый	23,5	84,8

§ 2-19. Магнитные и электрические явления

Таблицы 2-78а и б. Магнитная восприимчивость пара- и диамагнитных тел

В таблицах дана удельная магнитная восприимчивость χ некоторых пара- и диамагнитных тел, которая для изотропных тел определяется выражением

$$\chi = \frac{Y}{H}, \qquad (2\text{-}62)$$

где Y обозначает намагниченность 1 $г$ тела, а H — напряженность внешнего намагничивающего поля.

В отдельности даны значения χ: 1) для элементов (табл. 2-78а); 2) для некоторых соединений, органических и неорганических (табл. 2-78б). Твердые тела предполагаются в изотропном состоянии. Температуры (t °C) отвечают стоградусной шкале.

Таблица 2-78а

	t (°C)	$\chi \cdot 10^6$		t (°C)	$\chi \cdot 10^6$
Азот	18	−0,34	Палладий	18	+5,4
Алюминий	18	+0,65	»	200	+4,6
Аргон	18	−0,48	»	750	+2,6
Барий	20	+0,91	»	1230	+1,7
Висмут	18	−1,38	Платина	18	+1,10
»	260	−1,02	»	250	+0,66
Водород	18	−1,98	»	700	+0,45
Вольфрам	16	+0,28	»	1220	+0,30
Гелий	18	−0,47	Ртуть	18	−0,19
Золото	18	−0,15	» твердая	−80	−0,15
»	−256,6	−0,13	Свинец	16	−0,11
Иридий	25	+0,14	» жидкий	330	−0,08
»	200	+0,17	Сера ромб.	18	−0,49
»	450	+0,20	» жидкая	113	−0,49
»	850	+0,26	» »	220	−0,49
»	1150	+0,31	Серебро	16	−0,20
Кадмий	18	−0,18	Сурьма	16	−0,87
Калий	20	+0,52	» жидкая	800	−0,49
Кальций	20	+1,10	Тантал	18	+0,87
Кислород	20	+106,2	»	820	+0,77
» жидкий	−195	+259,6	Углерод алмаз	18	−0,49
» твердый	−240	+60	» »	400	−0,51
Кремний	20	−0,13	» »	1200	−0,56
Литий	16	+0,50	» графит	20	−3,5
Магний	18	+0,55	» »	−170	−6,0
» жидкий	700	+0,55	» »	600	−2,0
Марганец	22	+9,9	» »	1000	−1,3
Медь	18	−0,085	Фосфор белый	20	−0,90
Молибден	18	+0,04	Хлор жидкий	−60	−0,57
Натрий	18	+0,51	Хром	18	+3,6
Неон	18	−0,33	»	1100	+4,2
Олово	18	+0,025	Цинк	18	−0,157
» серое	18	−0,35	» жидкий	450	−0,09
» жидкое	400	−0,036	Эрбий	18	+22

Таблица 2-786

	t (°C)	$\chi \cdot 10^6$		t (°C)	$\chi \cdot 10^6$
Алюминий сернокислый	18	−0,48	Марганец сернокислый	24	88,5
Алюминий хлористый	19	−0,60	Марганец хлористый	24	107,0
Аммиак (газ)	16	−1,1	Натрий хлористый	18	−0,50
Ацетон	15	−0,58	Натрий сернокислый	16	−0,86
Барий сернокислый	—	−0,306	Нефть	15—20	ок. −0,8
Барий хлористый	15	−0,41	Никель бромистый	18	+19,0
Бериллий хлористый	17	−0,60	Никеля закись	—	+48,3
Бензол	16,8	−0,71	Никель сернокислый	15,9	+26,7
Висмут иодистый	20	−0,49	Никель хлористый	24	+44,7
Висмут бромистый	19	−0,33	Олово двухххлористое	—	−0,34
Вода	10	−0,72	Парафин	20	ок. −0,5
Водород хлористый	22	−0,66	Свинец бромистый	20	−0,28
Воздух	20	+24,2	Свинец иодистый	19	−0,33
Гадолиний хлористый	18	+91	Свинец хлористый	15	−0,32
Гадолиния окись	20	+130,1	Спирт бутиловый	—	−0,74
Глицерин	20	−0,54	Спирт метиловый	−3	−0,65
Железа окись	20	189,1	Спирт этиловый	19	−0,74
Железо бромное	18	+48	Стекло (крон)	—	−0,90
Железо сернокислое	19	+74,2	Стекло (тяжелый флинт)		−1,2
Железо хлористое	17	+101,2	Сурьма трехххлористая	15	−0,36
Железо хлорное	20	+86,2	Сурьмы трехокись	14	−0,19
Калий бромистый	—	−0,377	Углекислота	18	−0,42
Калий железосинеродистый	21	+7,08	Хлороформ	15	−0,49
Калий марганцевокислый	21	+0,175	Хром хлористый	19	+44,3
Калий хлористый	20	−0,52	Хром сернокислый	21	+29,5
Кварц	20	−0,49	Хрома трехокись	17	+0,51
Кислота уксусная	20	−0,53	Цинк бромистый	19	−0,40
Кислота азотная	22	−0,467	Цинк сернокислый	—	−0,48
Кислота серная	22	−0,44	Цинк хлористый	22	−0,47
Кобальт хлористый	25	+90,5	Шеллак	—	−0,30
Кобальт иодистый	18	+32,0	Эбонит	20	+0,6
Кобальт сернокислый	22	59,6	Этилацетат	6	−0,607
Магний бромистый	20	−0,57	Этилен	20	−1,6
Магний хлористый	12	−0,58	Этилен хлористый	—	−0,602
			Эфир этиловый	20	−0,77

Таблица 2-79. Магнитная проницаемость ферромагнитных тел

Магнитная проницаемость μ ферромагнитных тел определяется выражением

$$\mu = B/H, \qquad (2\text{-}63)$$

где B обозначает магнитную индукцию в теле, а H — напряженность внешнего намагничивающего поля. В таблице даны значения B и μ при изменении H в пределах от 1 до 6000 эрстед для: 1) электролитического железа (Fe); 2) никеля (Ni), кобальта (Co) и сплава Гейслера (75,6% Cu + + 14,25% Mn + 10,15% Al).

H	Fe		Ni		Co		Сплав Гейслера	
	B	μ	B	μ	B	μ	B	μ
1,0	5800	5800	650	650	—	—	—	—
1,5	7500	5000	1350	900	—	—	—	—
2,5	9200	3680	2800	1120	210	84	120	48
5,0	11000	2200	4330	865	570	114	400	80
10	12300	1230	4940	494	1700	170	720	72
20	13450	673	5400	270	3400	170	1070	54
50	14850	297	5850	117	5960	119	1540	31
100	16000	160	6200	62	7840	78	1970	20
150	16860	112	6400	43	9000	60	2250	15
300	18400	61,3	6700	22	—	—	2800	9,3
500	19200	38,4	6910	14	—	—	3120	6,2
1000	20000	20,0	7370	7,4	—	—	3670	3,7
2000	21060	10,5	8400	4,2	—	—	4710	2,4
3000	22100	7,4	9380	3,1	—	—	5750	1,9
4000	23130	5,8	1040	2,6	—	—	6780	1,7
5000	24120	4,8	—	—	—	—	7790	1,6
6000	25130	4,2	—	—	—	—	8790	1,5

Таблица 2-80. Магнитная проницаемость железа и стали в слабых полях

Значения магнитной проницаемости μ даны при изменении H в пределах от 0,01 до 0,2 эрстед для: 1) электролитического железа неотожженного; 2) стали динамомашинной неотожженной, отожженной один раз и отожженной два раза.

H	Значения μ			
	Железо неотожж.	Сталь		
		неотожж.	отожж. 1 раз	отожж. 2 раза
0,01	300	413	522	351
0,03	420	437	586	433
0,05	560	463	650	540
0,10	975	532	786	872
0,15	1500	590	912	1390
0,20	2100	638	1040	3030

Таблица 2-81. Намагниченность при насыщении в зависимости от температуры

В таблице дана удельная намагниченность I ферромагнитных тел в состоянии насыщения при различных температурах. Значения I даны для: 1) электролитического железа (Fe); 2) кобальта (Co); 3) никеля (Ni); 4) магнетита или железной магнитной руды Fe_3O_4. Температуры указаны в таблице t (°C).

Fe		Co		Ni		Fe_3O_4	
t (°C)	I	t (°C)	I	t (°C)	I	t° (C)	I
—188	221	—188	168	20	54,6	—253	99
— 78	219	17	166	79	52,6	— 79	97
16	216	205	161	128	50,4	17	93
105	213	324	157	173	47,7	116	88
181	210	362	156	216	44,3	216	81
265	206	437	153	257	39,3	316	72
337	201	470	151	278	37,0	409	61
426	192	510	149	316	29,6	497	46
499	184	614	143	334	24,4	540	33
526	179	641	141	341	21,4	557	26
562	173	693	137	347	18,8	568	18
603	162	748	132	353	15,6	573	13
630	155	804	125	358	12,0	578	0
656	144	844	120	362	9,4		
682	131	918	109	365	7,3		
700	120	971	99	369	5,6		
747	84	1016	88	373	4,4		
751	75	1068	72	376	3,6		
759	62	1090	62	380	3,0		
761	59	1133	32	388	2,2		
769	40	1144	21	395	1,7		
772	24	1149	18	406	1,7		

Таблица 2-82. Точка магнитного превращения (точка Кюри)

В таблице даны приближенные значения температуры (точки) магнитного превращения для основных ферромагнитных элементов Fe, Co и Ni, а также для некоторых их сплавов и химических соединений.

	Точка Кюри t (°C)		Точка Кюри t (°C)
Железо Fe	770±10	Сплавы 22% Fe + 78% Ni	550
» кремнистое (4,3% Si)	690	50% Fe + 50% Ni	420
Кобальт Co	1180±20	70% Fe + 30% Ni	ок. 70
Никель Ni	355± 5	49% Fe + 49% Co +	
Магнетит Fe_3O_4	572± 7	+ 2% V . . .	980
Карбид железа Fe_3C (цементит)	212	70% Ni + 30% Cu	10—100
Гадолиний	16	Сплав Гейслера 61% Cu + 26% Mn + + 13% Al . . .	330

Таблица 2-83. Горизонтальная составляющая земного магнетизма

Значения горизонтальной составляющей H земного магнетизма даны в системе CGSM для северных широт в интервале от 45 до 55°.

Сев. широта (в градусах)	Восточная долгота по меридиану Гринвича (в градусах)										
	2	4	6	8	10	12	14	16	18	20	22
45	0,215	0,216	0,217	0,218	0,219	0,220	0,221	0,222	0,223	0,225	0,226
46	0,210	0,211	0,212	0,212	0,213	0,214	0,215	0,216	0,217	0,219	0,221
47	0,205	0,206	0,206	0,207	0,209	0,209	0,210	0,211	0,213	0,214	0,216
48	0,201	0,202	0,202	0,203	0,204	0,205	0,206	0,207	0,209	0,210	0,211
49	0,197	0,198	0,198	0,199	0,200	0,201	0,202	0,203	0,204	0,205	0,207
50	0,192	0,193	0,193	0,194	0,195	0,196	0,197	0,198	0,199	0,201	0,203
51	0,187	0,188	0,188	0,189	0,190	0,191	0,192	0,193	0,194	0,195	0,197
52	0,183	0,184	0,184	0,185	0,186	0,187	0,188	0,189	0,190	0,191	0,192
53	0,180	0,181	0,181	0,182	0,183	0,183	0,184	0,185	0,186	0,186	0,187
54	0,176	0,177	0,177	0,178	0,178	0,179	0,180	0,182	0,183	0,183	0,183
55	0,172	0,173	0,173	0,174	0,175	0,175	0,176	0,176	0,177	0,178	0,179

Таблица 2-84. Диэлектрическая постоянная (диэлектрическая проницаемость) твердых, жидких и газообразных тел

В таблице даны значения диэлектрической постоянной ε (иначе диэлектрической проницаемости) некоторых твердых, жидких и газообразных тел для постоянных электрических полей или для малых частот, когда длину волны можно считать практически бесконечно большой. Газообразные тела предполагаются при нормальном атмосферном давлении; температуры, к которым относятся значения ε, указываются.

	t (°C)	ε		t (°C)	ε
Алмаз	18	16,5	Двуокись титана	18	40—80
Амилацетат	18	4,8	Каменная соль	20	5,6
Анилин	18	7,3	Кварц крист.	18	4,5
Апатит	18	8,5	» плавленый	18	3,5—4,1
Асфальт	18	2,7	Кость слоновая	18	6,9
Ацетон	20	21,5	Ксилол (мета-)	18	2,4
Бакелит	18	3—5	Лед	—18	3,2
Бальзам канадский	18	2,7	Масло касторовое	10,9	4,6
Бензол	18	2,3	» оливковое	21	3,2
Бром	5	3,1	» парафиновое	20	4,7
Бумага	18	2—2,5	Масло трансформаторное	18	2,2—2,5
Вода	18	80,4	Мрамор	18	8,3
Воск пчелиный	18	2,5—3,0	Нефть, керосин	21	2,1
Гетинакс	18	3,5—5,0	Нитробензол	18	36,4
Глицерин	15	39,1	Парафин	20	2,0—2,5
Дерево	18	2,2—3,7			

Продолжение

	t (°C)	ε		t (°C)	ε
Рутил ⊥ оси . . .	20	86	Целлулоид	18	4,1
» ∥ оси . . .	20	170	Четыреххлористый углерод	18	2,2
Сера	18	3,6—4,3	Шеллак	18	3,1—3,7
Сероуглерод . . .	20	2,6	Эбонит	18	2,5—2,8
Сильвин	18	4,9	Эфир этиловый . .	18	4,3
Скипидар	20	2,2	Янтарь	18	2,7—2,9
Слюда	18	5,7—7,0			
Специальные керамические массы, содержащие BO и TiO_2	18	1000—10000	Газы		
Спирт метиловый	13,4	35,4	Азот	0	1,000606
» этиловый .	14,7	26,8		20	581
Стекло зеркальное	18	6—7	Водород	0	264
» крон . . .	18	5—9		20	273
» флинт . .	18	7—10	Воздух	0	590
Титанат бария . .	20	1200		19	576
Толуол	14,4	2,4	Гелий	0	068
Турмалин ∥ оси . .	18	6,0	Кислород	0	524
Фарфор	18	5,0—6,8	Метан	0	953
Хлороформ	22	5,2	Окись углерода . .	0	690
			Углекислота . . .	0	946

Таблицы 2-85 а, б. Электродвижущие силы гальванических элементов

Эталоном электродвижущей силы в настоящее время считают э. д. с. кадмиевого гальванического элемента (элемент Вестона), который составляется по схеме: катод — металлический кадмий Cd (в виде 12%-ной ртутной амальгамы); электролит — насыщенный водный раствор сернокислого кадмия $CdSO_4$; анод — металлическая ртуть Hg; деполяризатор — сернокислая закись ртути Hg_2SO_4.

Электродвижущая сила нормального кадмиевого элемента, которую при 20° С принимают равной 1,01830 *в*, обнаруживает небольшой, но заметный температурный коэффициент. Зависимость э. д. с. кадмиевого элемента от температуры дана в табл. 2-85а.

Таблица 2-85а

t (°C)	э. д. с. (*в*)	t (°C)	э. д. с. (*в*)	t (°C)	э. д. с. (*в*)
0	1,01911	15	1,01850	30	1,01789
5	1,01891	20	1,01830	35	1,01769
10	1,01871	25	1,01810	40	1,01748

Элемент Кларка, долгое время бывший эталоном электродвижущей силы, еще не потерял своего значения. Этот элемент составляется по той же схеме, как и элемент Вестона, но кадмий (катод и электролит) заменен в нем цинком и насыщенным раствором сернокислого цинка; э. д. с. элемента Кларка принимается равной 1,4328 *в* при 15° С.

В качестве местных источников тока применяются аккумуляторы и некоторые гальванические элементы. Аккумуляторы в настоящее время известны трех типов:

1. Свинцовые аккумуляторы: катод — свинец Pb, электролит — водный раствор серной кислоты H_2SO_4 (плотность 1,2—1,3 $г/см^3$), анод — перекись свинца Pb_2O_5; э. д. с.: максимальная при зарядке до 2,6 *в*, в рабочем состоянии 2,5—2,0 *в*; не следует допускать падения э. д. с. ниже 1,8 *в*.

2. Железоникелевые аккумуляторы: катод — железо Fe, электролит — 20%-ный раствор едкого кали KOH, анод — окись никеля Ni_2O_3; э. д. с.: при зарядке до 1,8 *в*, при работе аккумулятора постепенно падает; разряд до 1,1—1,0 *в* (и еще ниже) аккумулятор переносит без вреда.

3. Кадмиевоникелевые аккумуляторы: катод — кадмий Cd в смеси с железом Fe, электролит — 20%-ный раствор едкого кали KOH, анод — гидрат закиси никеля $Ni(OH)_3$; э. д. с. та же, что у железоникелевого аккумулятора.

Некоторые из гальванических элементов, применяемые в настоящее время, указаны в табл. 2-85б, отдельно элементы с одним электролитом и элементы с двумя электролитами. В таблице даны: 1) схемы элементов (катод — анод — электролит); 2) приближенные значения их э. д. с. (в вольтах) при 18° С; указано также имя ученого, предложившего данный элемент. Если в элементе применяется деполяризатор, то последний указывается; введены сокращения: дп. — деполяризатор и п. с. — пористый сосуд.

Таблица 2-85б

	Катод	Анод	Электролит	E (*в*)
			Элементы с одним электролитом	
Вольта	Zn	Cu	Раствор H_2SO_4	~1,0
Грене [1]	Zn	C	Раствор H_2SO_4, дп. $K_2Cr_2O_7$	~2,0
Де ля Рив	Zn	Pt	Раствор H_2SO_4, п. с., дп. PbO_3	~2,4
Кларк [2]	Zn	Hg	Нас. раствор $ZnSO_4$, дп. Hg_2SO_4	1,433
Лекланше [3]	Zn	C	Раствор NH_4Cl, дп. MnO_2	~1,5
			Элементы с двумя электролитами	
Боттон	Zn	C	Раствор $ZnCl_2$, п. с., раствор HCl	~3,0
Бунзен	Zn	C	Раствор H_2SO_4, п. с., HNO_3	~1,9
д'Арсонваль	Zn	C	Раствор $ZnSO_4$, п. с., раствор $CuSO_4$	~2,7
Даниэль	Zn	Cu	Раствор $ZnSO_4$, п. с., раствор $CuSO_4$	1,09
Поггендорф	Zn	C	Раствор H_2SO_4, п. с., раствор $K_2Cr_2O_7$	~2,0
Флеминг [4]	Zn	C	Раствор $ZnSO_4$, п. с., раствор $CuSO_4$	1,07

Примечания к табл. 2-85б. [1]) Цинк в элементе Грене обычно амальгамируется; к этой операции часто прибегают и в других элементах. [2]) Элемент Кларка долгое время был принят в качестве нормального, но затем преимущество было отдано кадмиевому элементу Вестона,

который имеет значительно меньший температурный коэффициент э. д. с. [3]) Так называемые сухие элементы, очень широко распространенные, в большинстве являются элементами Лекланше, в которых пространство между электродами заполняется какой-либо нейтральной пористой массой (древесные опилки, гипс, песок), смоченной электролитом Лекланше, т. е. раствором нашатыря. [4]) Элемент Флеминга, который отличается от элемента Даниэля только строго фиксированной плотностью обоих электролитов, некоторое время считался нормальным элементом вследствие большого постоянства э. д. с.

Таблицы 2-86 а, б, в, г. Термоэлектродвижущие силы

В таблице 2-86а даны значения термоэлектродвижущих сил E ряда металлов по отношению к платине для разности температур, равной 100° С. Предполагается, что один спай термопары (платина — металл) находится при 0° С, другой спай удерживается при температуре 100° С. Положительный знак обозначает, что в спае, находящемся при 0° С, ток течет от данного металла к платине. Металлы расположены в порядке убывающей величины термоэлектродвижущих сил; последние выражены в милливольтах. Возможные отличия в данных для некоторых металлов объясняются различием исследованных образцов.

В табл. 2-86б даны значения э. д. с. нормальной термопары Ле-Шателье и термопары Rh — PtRh. Более точные значения электродвижущей силы нормальной термопары Ле-Шателье Pt — Pt 10% Rh в температурном интервале 0—1700° С даны в таблице 2-86в.

В табл. 2-86г даны значения э. д. с. некоторых рабочих термопар.

Таблица 2-86а

Металл термопары платина—металл	E (мв)	Металл термопары платина—металл	E (мв)	Металл термопары платина—металл	E (мв)
Висмут ⊥ оси	−5,2	Тантал	+0,34	Медь	+0,77
» ∥ оси	−7,7	»	+0,51	»	+0,75
Копель [1])	−4,0	Алюминий	+0,40	Иридий	+0,68
Константан	−3,43	»	+0,41	»	+0,65
»	−3,47	Олово	+0,44	Золото	+0,78
Кобальт	−1,69	»	+0,42	»	+0,80
Никель	−1,50	Магний	+0,40	Кадмий	+0,86
»	−1,52	»	+0,43	»	+0,95
Калий	−0,94	Свинец	+0,44	Вольфрам	+0,90
»	−0,83	»	+0,46	»	+0,79
Палладий	−0,28	Цезий	+0,50	Молибден	+1,31
»	−0,30	Иридий	+0,65	»	+1,22
»	−0,32	»	+0,68	Литий	+1,39
Натрий	−0,21	Родий	+0,65	Железо мягкое	+1,89
»	−0,25	Таллий	+0,59	» жесткое	+1,87
Рубидий	−0,19	Манганин	+0,57	Нихром	+2,20
Ртуть	−0,07	»	+0,82	Сурьма	+4,86
Платина	0	Цинк	+0,60	Кремний	+44,8
Графит	+0,22	»	+0,79	Сернистый теллур	+50
Уголь эл.	+0,25	Серебро	+0,74		
» »	+0,30	»	+0,79		

Таблица 2-86б

t (°C)	Термопара Ле-Шателье Pt—PtRh		Родиевоплатино-родиевая термопара Rh—PtRh		t (°C)	Термопара Ле-Шателье Pt—PtRh		Родиевоплатино-родиевая термопара Rh—PtRh	
	E (*мв*)	$\frac{dE}{dt}\left(\frac{мкв}{град}\right)$	E (*мв*)	$\frac{dE}{dt}\left(\frac{мкв}{град}\right)$		E (*мв*)	$\frac{dE}{dt}\left(\frac{мкв}{град}\right)$	E (*мв*)	$\frac{dE}{dt}\left(\frac{мкв}{град}\right)$
0	0,00		0,00		900	8,47	11,3	3,37	7,5
20	0,11	6,5	—	—	1000	9,61	11,4	4,21	8,4
100	0,65		0,001	0,1	1100	10,77	11,6	5,16	9,5
200	1,44	7,9	0,12	1,2	1200	11,96	11,9	6,22	10,6
300	2,33	8,9	0,29	1,7	1300	13,15	11,9	7,27	10,5
400	2,26	9,3	0,57	2,8	1350	—	12,1	—	11,2
500	4,23	9,7	0,95	3,8	1400	14,36	—	8,39	—
600	5,24	10,1	1,40	4,5	1500	15,56	12,0	9,55	11,4
700	6,27	10,3	1,96	5,6	1600	16,73	11,7	—	—
800	7,34	10,7	2,62	6,6					

Нормальная термопара Ле-Шателье (Pt — Pt 10% Rh) рекомендована Международным комитетом как основной прибор при точных измерениях высоких температур (≈ до 1500° С). Однако, как весьма ценный прибор, нормальная термопара обычно не применяется при измерениях и служит главным образом для контроля показаний рабочих термопар, которые применяются для непосредственных измерений.

В таблице температуры даны в °С, электродвижущие силы E выражены в *мкв*. Холодный спай предполагается при 0 °С.

Таблица 2-86в

t °C	0	20	40	60	80	100
0	0	112	233	363	499	642
100	642	791	945	1104	1268	1435
200	1435	1605	1778	1954	2133	2314
300	2314	2498	2683	2871	3059	3249
400	3249	3440	3633	3827	4023	4220
500	4220	4419	4619	4820	5022	5226
600	5226	5432	5638	5846	6055	6265
700	6265	6477	6691	6906	7122	7339
800	7339	7558	7778	7999	8222	8446
900	8446	8672	8900	9129	9359	9591
1000	9591	9823	10055	10289	10523	10757
1100	10757	10993	11229	11467	11706	11946
1200	11946	12187	12428	12670	12912	13155
1300	13155	13399	13642	13886	14128	14371
1400	14371	14613	14855	15097	15339	15580
1500	15580	15820	16060	16298	16534	16770
1600	16770	17004	17236	17466	17695	17922

Таблица 2-86г

Некоторые рабочие термопары

(В месте главного спая ток течет от проводника 1 к проводнику 2).

t (°C)	Константан [1] — Cu		Константан — Ag		Константан — Fe		Никель — уголь		Ni — сплав Cr + Ni		Константан — сплав Cr — Ni	
	E (мв)	$\frac{dE}{dt}\left(\frac{мкв}{град}\right)$	E (мв)	$\frac{dE}{dt}\left(\frac{мкв}{град}\right)$	E (мв)	$\frac{dE}{dt}\left(\frac{мкв}{град}\right)$	E (мв)	$\frac{dE}{dt}\left(\frac{мкв}{град}\right)$	E (мв)	$\frac{dE}{dt}\left(\frac{мкв}{град}\right)$	E (мв)	$\frac{dE}{dt}\left(\frac{мкв}{град}\right)$
—200	—5,46	21,4	—	—	—7,50	31,0	—	—	—	—	—	—
—100	—3,32	33,2	—	—	—4,40	44,0	—	—	—	—	—	—
0	0,0		0,0		0,0		—	—	0,0		0,0	
20	0,76	41	0,78	44,2	—	—	0,0	—	0,82	40,6	1,25	56,2
100	4,1	47	4,12	42,2	5,15	51,5	1,76	22,0	4,07	40,5	5,62	64,2
200	8,8	53	8,84	52,6	10,48	53,5	4,17	24,1	8,12	41,0	11,08	70,1
300	14,1	58	14,10	56,7	15,77	52,9	6,54	23,7	12,22	41,0	19,09	73,9
400	19,9	64	19,77	60,2	20,96	51,9	8,38	18,4	16,32	43,0	26,48	77,0
500	26,3	—	25,79	63,6	26,12	51,6	10,28	19,0	20,62	42,5	34,18	77,7
600	—	—	32,15	—	31,47	53,5	12,50	22,2	24,87	42,5	41,95	80,7
700	—	—	—	—	37,15	56,8	15,29	27,9	29,12	40,0	50,02	79,2
800	—	—	—	—	43,25	61,0	18,30	30,1	33,12	41,5	57,94	78,2
900	—	—	—	—	49,26	61,1	21,80	35,0	37,27	41,8	65,76	—
1000	—	—	—	—	—	—	25,63	38,3	41,45	41,7	—	—
1100	—	—	—	—	—	—	29,79	41,6	45,62	41,5	—	—
1200	—	—	—	—	—	—	34,35	45,6	49,77	—	—	—

Примечание к табл. 2-86. [1]) Сплав меди и никеля состава 56,5% Cu + 43,5% Ni.

Таблицы 2-87а и б. Удельное сопротивление твердых тел

В таблице даны значения удельного сопротивления ρ некоторых металлов (табл. 2-87а) и изоляторов (табл. 2-87б) при температуре 18—20° С, выраженные в *ом·см*. Величина ρ для металлов в сильной степени зависит от примесей, в таблице даны значения ρ для химически чистых металлов. Значения ρ для изоляторов даны приближенно. Металлы и изоляторы расположены в таблице в порядке возрастающих значений ρ.

Таблица 2-87а

	$10^4\,\rho$ (*ом·см*)		$10^4\,\rho$ (*ом·см*)		$10^4\,\rho$ (*ом·см*)
Серебро . . .	0,016	Никель . . .	0,070	Аргентан . .	0,42
Медь	0,017	Кадмий . . .	0,076	Никелин . . .	0,33
Золото	0,023	Латунь . . .	0,08	Манганин . .	0,43
Алюминий . .	0,029	Кобальт . . .	0,097	Константан .	0,49
Дюралюминий	0,0335	Железо . . .	0,10	Сплав Вуда [3]	0,52 (0°)
Магний . . .	0,044	Палладий . .	0,107	Осмий	0,602
Кальций . . .	0,046	Платина . . .	0,110	Сплав Розе [4]	0,64 (0°)
Натрий . . .	0,047	Олово	0,113	Хромель . . .	0,70—
Марганец . .	0,05	Хром	0,131	» . . .	—1,10
Иридий . . .	0,063	Тантал	0,146	Инвар	0,81
Вольфрам . .	0,053	Бронза [1] . . .	0,18	Ртуть	0,958
Молибден . .	0,054	Торий	0,18	Нихром [5] . .	1,10
Родий	0,047	Свинец	0,208	Висмут . . .	1,19
Цинк	0,061	Платинит [2] .	0,45	Фехраль [6] . .	1,20
Калий	0,066	Сурьма . . .	0,405	Графит . . .	8,0

Таблица 2-87б

	ρ (*ом·см*)		ρ (*ом·см*)		ρ (*ом·см*)
Асбест	10^8	Стекло натр.	10^{12}	Шеллак . . .	10^{16}
Шифер . . .	10^8	» пирекс	10^{14}	Канифоль . .	10^{16}
Дерево сухое	10^{10}	Кварц ∥ оси .	10^{14}	Кварц ⊥ оси	$3\cdot10^{16}$
Мрамор . . .	10^{10}	» плавленый	$2\cdot10^{14}$	Сера	10^{17}
Целлулоид . .	$2\cdot10^{10}$	Слюда	10^{15}	Полистирол .	10^{17}
Бакелит . . .	10^{11}	Миканит . . .	10^{15}	Эбонит	10^{18}
Гетинакс . .	$5\cdot10^{11}$	Фарфор . . .	$2\cdot10^{15}$	Парафин . . .	$3\cdot10^{18}$
Алмаз	10^{12}	Сургуч	$5\cdot10^{15}$	Янтарь	10^{19}

Примечания к табл. 2-87. [1]) Сплав состава: 88% Cu + 12% Sn. [2]) Сплав состава: 62% Cu + 15% Ni + 22% Zn. [3]) Сплав состава: 50% Bi + + 25% Pb + 12,5% Sn + 12,5% Cd. [4]) Сплав состава: 50% Bi + 27,1% Pb + + 22,9% Sn. [5]) Сплав никеля и хрома состава: 80% Ni + 20% Cr; применяется также сплав состава: 67,5% Ni + 15% Cr + 16% Fe + 1,5% Mn. [6]) Сплав состава: 78% Fe + 17% Cr + 5% Al.

Таблица 2-88. Температурный коэффициент сопротивления чистых металлов и сплавов

Зависимость сопротивления R металлов от температуры определяется формулой

$$R_t = R_0 (1 + \alpha t), \qquad (2\text{-}64)$$

где R_t и R_0 — сопротивления металла при температурах соответственно t °С и 0° С и α — температурный коэффициент сопротивления, который для чистых металлов близок к величине 0,00367 $град^{-1}$, а для сплавов имеет совершенно иное значение.

В таблице даны значения α для некоторых металлов и сплавов и указаны температуры t °С, которым отвечают эти значения α.

	t (°С)	α ($град^{-1}$)		t (°С)	α ($град^{-1}$)
Чистые металлы					
Алюминий	18—100	0,0038	Свинец	18	0,0042
Висмут	18	40	Серебро	0—100	36
Вольфрам	0—170	51	Стронций	18	38
Железо	45	62	Сурьма	18	36
Золото	0—100	34—25	Тантал	0—100	35
Индий	18	47	Цинк	20	37
Иридий	18	39	**Сплавы**		
Кадмий	18—100	42	Константан	25	0,000002
Калий	18	51	Манганин [1]	18	0,000001
Кальций	18	33	Бронза [2]	20	0,0005
Кобальт	0—160	66	Бронза алюмин. [3]	—	0,00102
Литий	18	47	То же [4]	—	0,00320
»	230	52	Латунь [5]	15	0,0010
Магний	18	39	То же [6]	15	0,0020
Медь	18	43	Нейзильбер	18	0,0003
Молибден	0—110	43	Нихром	20	0,0004
Натрий	18	44	Сплав Вуда	20	0,0037
Никель	0—100	62	Сплав Розе	0	0,0020
Олово	20	42	Сплав CuMn [7]	—	0,00022
Осмий	18	42	Сплав PtIr [8]	0	0,0008
Палладий	18—100	37	Сплав PtRh [9]	0	0,0013
Платина	0—100	38	Платинит	0	0,003
Родий	18	44			
Ртуть	0—25	09			

Примечания к табл. 2-88. [1]) Большинство образцов константана и манганина в области обычных комнатных температур имеет, практически говоря, нулевой температурный коэффициент сопротивления. Для некоторых образцов этих сплавов температурный коэффициент имел величину, которая лежала за пределами точности измерений (шестой десятичный знак). Однако это ничтожное значение α для константана и манганина наблюдается только в области средних температур, и при переходе к более высоким температурам его значение заметно возрастает, так, при 500° С α константана становится равным 0,000027, а для манганина 0,00011. [2]) Сплав состава: 88% Cu + 12% Sn. [3]) Сплав состава: 97% Cu + 3% Al. [4]) Сплав состава: 90% Cu + 10% Al. [5]) Сплав состава: 60% Cu + 40% Zn. [6]) Сплав состава: 66% Cu + 34% Al. [7]) Сплав состава: 96,5% Cu + 3,5% Mn. [8]) Сплав состава: 80% Pt + 20% Ir. [9]) Сплав состава: 90% Pt + 10% Rh.

Таблицы 2-89а и б. Сопротивление чистых металлов при низких температурах

В таблице 2-89а даны значения удельного сопротивления (в *ом·см*) некоторых чистых металлов при низких температурах (0 °С). В таблице 2-89б дано отношение R_T/R_0 сопротивлений чистых металлов при температуре T °К и 273° К.

Таблица 2-89а

	t (°С)	$10^4\,\rho$ (*ом · см*)		t (°С)	$10^4\,\rho$ (*ом · см*)
Висмут .	—200	0,348	Платина .	—265	0,0010
Золото . .	—252,8	0,00018	Ртуть . .	—183,5	0,0697
Железо .	—252,7	0,00011	Свинец . .	—252,9	0,0059
Медь . . .	—258,6	0,00014	Серебро .	—258,6	0,00009

Таблица 2-89б

	T (°К)	R_T/R_0		T (°К)	R_T/R_0
Алюминий . .	77,7	1,008	Олово	79,0	0,2098
	20,4	0,0075		20,4	0,0116
Висмут . . .	77,8	0,3255	Платина . . .	91,4	0,2500
	20,4	0,0810		20,4	0,0061
Вольфрам . .	78,2	0,1478	Ртуть	90,1	0,2851
	20,4	0,0317		20,4	0,4900
Железо	78,2	0,0741	Свинец	73,1	0,2321
	20,4	0,0076		20,5	0,0301
Золото	78,8	0,2189	Серебро . . .	78,8	0,1974
	20,4	0,0060		20,4	0,0100
Медь	81,6	0,1440	Сурьма . . .	77,7	0,2041
	20,4	0,0008		20,4	0,0319
Молибден . .	77,8	0,1370	Хром	80,0	0,1340
	20,4	0,0448		20,6	0,0533
Никель	78,8	0,0919	Цинк	83,7	0,2351
	20,4	0,0066		20,4	0,0087

Таблица 2-90. Зависимость сопротивления металлов от давления

Изменение сопротивления ΔR металлов от давления может быть представлено формулой

$$\Delta R = R\,(Ap + Bp^2), \qquad (2\text{-}65)$$

где R — сопротивление металла при нормальном давлении; p — давление, а A и B — постоянные коэффициенты, различные для различных металлов. Например, для марганца и хрома было найдено:

Металл	Формула
Марганец . .	$7{,}012\cdot10^{-6}\,p + 5{,}63\cdot10^{-11}\,p^2$
Хром	$5{,}8\cdot10^{-7}\,p$ (для хрома $B = 0$)

Таблица 2-91. Отношение коэффициентов теплопроводности и электропроводности металлов

В таблице даны значения величины $\lambda/\sigma T = \text{const}$ (стр. 348), где λ обозначает теплопроводность, выраженную в $вт/см \cdot град^{-1}$; σ — электропроводность, выраженную в $ом^{-1} \cdot см^{-1}$; T — абсолютную температуру, значения которой указаны в таблице отдельно.

	$T°$	$(\lambda/\sigma T)10^8$		$T°$	$(\lambda/\sigma T)10^8$
Алюминий . .	291,2	2,18	Платина . . .	273,2	2,51
	373,2	2,27		373,9	2,60
Висмут . . .	291,2	3,31	Ртуть	196,2	2,55
	373,2	2,89		86,2	2,65
Железо	273,2	2,47	Свинец	273,2	2,47
Золото	273,2	2,35		373,9	2,56
	373,8	2,40	Серебро . . .	273,2	2,31
Магний . . .	273,2	2,47		373,2	2,37
Медь	273,2	2,23	Сурьма . . .	273,2	2,83
	374,8	2,23		90,0	3,03
Никель	373,2	2,28	Цинк	293,2	2,56
Олово	291,2	2,52		83,2	2,04
	373,2	2,49			

Таблицы 2-92 а и б. Удельное сопротивление электролитов

В таблице 2-92а даны значения удельного сопротивления электролитов в $ом \cdot см$ при температуре 18° С. Концентрация растворов c дана в процентах, которые определяют число граммов безводной соли или кислоты в 100 $г$ раствора.

Таблица 2-92а

c (%)	NH_4Cl	NaCl	$ZnSO_4$	$CuSO_4$	KOH	NaOH	H_2SO_4
5	10,9	14,9	52,4	52,9	5,8	5,1	4,8
10	5,6	8,3	31,2	31,3	3,2	3,2	2,6
15	3,9	6,1	24,1	23,8	2,4	2,9	1,8
20	3,0	5,1	21,3	—	2,0	3,0	1,5
25	2,5	4,7	20,8	—	1,9	3,7	1,4

В таблице 2-92б даны значения удельной электропроводности водных растворов KCl и NaCl при различных температурах (в пределах 10 — 30° С), выраженные в $ом^{-1} \cdot см^{-1}$. Растворы KCl взяты: нормальный, $^1/_{10}$ нормального и $^1/_{100}$ нормального; растворы натрия предполагаются насыщенными при всех температурах, указанных в таблице.

Таблица 2-92б

Раствор	10° С	15° С	20° С	25° С	30° С
KCl норм.	0,08319	0,09252	0,10207	0,11180	—
KCl $^1/_{10}$ норм. . .	0,00933	0,01048	0,01167	0,01288	0,01412
KCl $^1/_{100}$ норм. .	0,001020	0,001147	0,001278	0,001413	0,003036
NaCl	0,1779	0,2014	0,2259	0,2513	0,2774

Таблица 2-93. Электрохимические эквиваленты

В таблице даны: количество металла в *мг* и объем гремучего газа в $см^3$, которые выделяются током силой в 1 *а* в течение времени, равного 1 *сек*, 1 *мин* и 1 часу.

	Ag (*мг*)	Cu (*мг*)	H_2 (*мг*)	Гремучий газ ($см^3$)
В течение 1 *сек* . . .	1,118 [1]	0,3291	0,01036	0,1740
» » 1 *мин* . .	67,08	19,76	0,6215	10,44
» » 1 часа . .	4025	1186	37,29	626

Примечание к табл. 2-93. [1]) Международная конференция 1903 г. в Лондоне положила электрохимический эквивалент серебра в основу при установлении международного ампера, определив его как постоянный по величине ток, который выделяет в вольтаметре из водного раствора азотнокислого серебра в течение одной секунды 1,11800 *мг* серебра (международный ампер). В настоящее время утверждено иное определение ампера (стр. 242), который предложено временно называть абсолютным. Соотношение между этими единицами таково: 1 межд. ампер = 0,99985 абс. ампера.

Таблица 2-94. Подвижность ионов в воде

Подвижностью *и* ионов в электрохимии называют произведение числа Фарадея (стр. 345) на так называемую *абсолютную скорость* *v* ионов в растворах, которая выражается в $см^2/в \cdot сек$ и соответствует подвижности ионов в газах (табл. 2-95). Таким образом, можно написать:

$$u_а = v_а F \quad \text{и} \quad u_к = v_к F, \tag{2-66}$$

где $u_а$ и $u_к$ обозначают подвижности соответственно анионов и катионов; $v_а$ и $v_к$ — их абсолютные скорости; F — число Фарадея.

Из этих формул находим, что подвижность ионов в растворах выражается в $см^2/ом \cdot г\text{-}экв$. В таблице даны значения подвижности некоторых ионов в водных растворах при 18° С для очень слабых концентраций *с*, величина которых в грамм-эквивалентах на 1 *л* указывается.

с	Подвижность ($см^2/ом \cdot г\text{-}экв$)							
	K	Na	Li	Cs	Ag	Cl	I	Br
0,0001	64,1	43,2	33,2	67,4	53,7	64,9	65,6	67,0
0,0002	64,0	43,0	33,0	67,2	53,4	64,8	65,5	66,8
0,0005	63,7	42,8	32,8	66,9	53,1	64,4	65,3	66,5
0,001	63,3	42,4	32,5	66,6	52,8	64,0	64,9	66,1
0,002	62,8	42,0	32,1	66,0	52,2	63,5	64,4	65,5
0,005	61,8	41,3	31,5	64,9	51,3	62,5	63,5	64,4
0,01	60,7	40,5	30,8	63,7	50,2	61,5	62,7	63,7
0,02	59,5	39,5	30,0	62,0	49,0	60,2	61,6	62,4
0,05	57,2	37,9	28,8	60,0	46,0	57,9	60,1	60,6
0,1	55,1	36,4	27,5	58,0	44,0	55,8	58,8	59,1

Таблица 2-95. **Подвижность ионов в газах**

При движении ионов в газах под действием постоянного электрического поля среднее значение $\overline{u}$ их скорости в направлении силовых линий поля оказывается пропорциональным его напряженности E, т. е. можно написать:

$$\overline{u} = KE. \qquad (2\text{-}67)$$

Коэффициент пропорциональности K, равный $\overline{u}/E$, носит название *подвижности ионов в газе*, причем принято $\overline{u}$ выражать в *см/сек*, а E — в *в/см*. Таким образом, K выражается в *см²/в·сек*, т. е. соответствует той величине, которая в электрохимии называется *абсолютной скоростью движения ионов в электролитах* (табл. 2-94).

В таблице даны скорости движения $\overline{u}$ газовых ионов, положительных и отрицательных, для некоторых газов, измеренные в *см/сек*. Напряженность поля предполагается равной 1 *в/см*, давление газа соответствует нормальному, температура 18 — 20° С. Приведено также приближенное значение молекулярного веса газов M.

	M	K^+	K^-		M	K^+	K^-
Азот	28	1,27	1,84	Закись азота	44	0,82	0,90
Аммиак	17	0,74	0,80	Кислород	32	1,32	1,83
Бензол	78	0,18	0,21	Окись углерода	28	1,1	1,4
Водород	2	6,70	7,95	Углекислота	44	0,84	1,05
Воздух	29	1,38	1,87				
Гелий	4	5,09	6,31				

§ 2-20. Оптика

Таблица 2-96. **Яркость некоторых источников света**

В таблице даны приближенные значения яркости некоторых источников света, выраженные в стильбах (*сб*).

Источник света	Ярк. (*сб*)	Источник света	Ярк. (*сб*)
Свеча парафиновая	0,5	Электрическая дуга	8000—18 000
Свеча Гефнера	0,7	То же большой мощности	до 100 000
Свеча спермацетовая	1,0	Естественные источники света	
Ацетиленовое пламя	10,8	Солнце при ясном небе:	
Лампы накаливания:		в зените	165 000
с угольным волоском	50—55	у горизонта	350
с вольфрамовым волоском	1200	Безоблачное небо	0,8
То же проекционные	2500	Пасмурное небо	0,1
Шрифт Нернста (2,3 *вт/св*)	260	Луна	0,25
Люминесцентные лампы	0,53—0,66		

Таблицы 2-97 а и б. Яркие линии испускания

В таблицах даны для видимой части спектра: 1) длины волн λ ярких спектральных линий некоторых элементов, выраженные в единицах Ангстрема (1 Å = 10^{-8} *см*), (табл. 2-97а); 2) линии в спектре неона, выраженные в mμ (табл. 2-97 б); в этой таблице указаны приближенно также цвет и относительная яркость линий.

Таблица 2-97а

Элемент	λ (Å)	Элемент	λ (Å)	Элемент	λ (Å)	Элемент	λ (Å)	Элемент	λ (Å)
Ag — серебро	4055,26	Cs — цезий	4555,35	He — гелий	4026,189	Li — литий	4132,29	Rb — рубидий	4201,85
	4210,94		4593,18		4471,482		4602,86		4215,56
	4212,68		5844,7		4713,144		4971,99		5724,45
	4668,48		6212,87		4921,930		6103,64		6070,75
	5209,07		6586,51		5015,680		6240,1		6206,31
	5465,49		6723,28		5875,625		6707,846		6298,33
	5471,55		6870,45		6678,150	Mg — магний	4481,33		7408,17
Ba — барий	4554,04		6973,29		7065,70		5167,34	Sn — олово	4511,30
	4934,09		7228,53		7281,35		5172,70		4524,74
	5535,55	Cu — медь	4022,66	Hg — ртуть	4046,56		5183,62		5631,68
	5777,66		4062,70		4347,50		5528,46		5970,30
	6141,72		4530,82		4358,343	Na — натрий	4668,60		6037,70
	6496,90		4586,95		4398,62		4982,84		6149,67
	6595,32		4651,13		4487,48		5149,09		6462,36
	7059,96		4704,70		4825,62		5153,64	Tl — таллий	4737,05
	7120,31		5105,543		5460,742		5688,22		5109,47
	7280,27		5153,251		5769,598		5889,965		5152,14
Ca — кальций	4226,73		5218,202		5790,659		5895,932		5350,46
	4454,78		5700,24		6100,36		6154,23		5527,90
	4585,87		5782,159		7301,68		6160,76		5949,04
	6439,07		6920,06	K — калий	4044,14				6549,77
	7148,15		7570,09		4047,20	Ra — радий	4340,64		6713,69
	7203,17	H — водород	4101,737		5339,67		5660,81		
	7326,15		4340,429		5359,52		6200,30	Zn — цинк	4057,71
Cd — кадмий	4678,16		4340,497		5782,60		6446,20		4680,198
	4799,92		4861,280		5801,96		6487,32		4722,164
	5085,822		4861,358		6911,30		6980,22		4810,535
	6099,18		6562,711		6938,98		7118,50		5181,99
	6438,470		6562,847		7664,91		7141,21		6362,35
					7698,98		7225,16		

Таблица 2-97б

Линии в спектре неона	Относительная яркость	λ (mμ)	Линии в спектре неона	Относительная яркость	λ (mμ)
Ярко-красная . .	10	640,2	Зеленая	6	540,0
Красно-оранжевая	10	614,3	Зеленая	8	533,0
Оранжевая . . .	5	594,5	Зеленая	5	503,1
Желтая	20	585,3	Сине-зеленая . .	8	484,9
Светло-зеленая .	4	576,5			

Таблица 2-98. Длины волн некоторых линий Фраунгофера

В таблице даны значения длин волн λ главных линий Фраунгофера солнечного спектра, выраженные в единицах Ангстрема, их обозначение и элемент, которому они принадлежат.

λ (Å)	Обозначение	Элемент	λ (Å)	Обозначение	Элемент
7620,5	*A*	Кислород	5167	b_4	Железо (магний)[1]
7594,1			4957,6	*c*	Железо
6869,9	*B*	»	4861,37	*F*	Водород
6562,8	*C*	Водород	4668	*d*	Железо
6278,1	*a*	Кислород	4383,6	*e*	»
5895,93	D_1	Натрий	4340,4	*G'*	Водород
5889,97	D_2	»	4325,8	—	Железо
5875,62	D_3	Гелий	4307,9	*G*	Железо (кальций)[2]
5269,56	*E*	Железо	4226,7	*g*	Кальций
5183,62	b_1	Магний	4101,8	*h*	Водород
5172,7	b_2	»	3968,4	*H*	Кальций
5169,0	b_3	Железо	3933,6	*K*	»

Примечания к табл. 2-98. [1]) Близкие линии: 5167,49 (Fe) и 5167,34 (Mg). [2]) Близкие линии: 4307,91 (Fe) и 4307,74 (Ca).

Таблица 2-99. Полосы поглощения углекислоты и водяного пара в инфракрасной части спектра

В таблице дано значение максимумов инфракрасных полос поглощения углекислоты и водяного пара в инфракрасной части спектра (до 15 μ); все значения длин волн выражены в микронах.

Углекислота	2,71 (слабая)	4,27 (сильная)		14,7 (сильная)	
Водяной пар	0,944	2,898	3,402	7,44	8,73	11,24
	1,128	2,948	3,463	7,58	8,99	11,47
	1,157	2,997	4,98	7,75	9,30	11,66
	1,367	3,028	5,04	7,88	9,50	11,89
	1,411	3,070	5,18	8,04	9,74	12,42
	1,480	3,112	5,24	8,17	9,98	12,82
	1,843	3,194	6,42	8,23	10,30	13,34
	1,870	3,245	6,49	8,36	10,66	13,62
	1,904	3,295	6,56	8,42	10,80	14,32
	1,985	3,340	6,61	8,51	10,94	14,98

Таблица 2-100. Поглощение инфракрасных волн кварцем

Поглощение лучей света при нормальном падении на поглощающий слой определяется формулой

$$I = I_0 e^{-kx}, \qquad (2\text{-}68)$$

где I_0 и I — значения интенсивностей луча, падающего на тело и прошедшего через него; x — толщина поглощающего слоя; k — коэффициент поглощения, который принято вычислять для пластинок толщиной 1 *см*.

В таблице даны значения k для обыкновенного луча в интервале спектра от 2,72 до 4,50 μ; для лучей с длиной волны больше 6μ кварц можно считать практически непрозрачным.

λ (μ)	2,72	2,83	2,95	3,07	3,17	3,38	3,67	3,82	3,96	4,12	4,50
k	0,20	0,47	0,57	0,31	0,20	0,15	1,26	1,61	2,04	3,41	7,30

Таблица 2-101. Отражение света металлами

Коэффициент отражения r световых лучей при нормальном падении их на зеркальную поверхность определяется формулой

$$r = I/I_0, \qquad (2\text{-}69)$$

где I_0 и I — интенсивности падающего и отраженного лучей.

В таблице даны значения r, выраженные в процентах, для некоторых длин волн λ в видимой части спектра; длины волн выражены в миллимикронах.

λ (mμ)	Зеркальный сплав	Сталь	Ni	Cu	Pt	Au	Ag
420	83,3	51,9	56,6	32,7	51,8	29,3	86,6
450	83,4	54,4	59,4	37,0	54,7	33,1	90,5
500	83,3	54,8	60,8	43,7	58,4	47,0	91,3
550	82,7	54,9	62,6	47,7	61,1	74,0	92,7
600	83,0	55,4	64,9	71,8	64,2	84,4	93,6
650	82,7	56,4	66,6	80,0	66,5	88,9	94,7
700	83,3	57,6	68,8	83,1	69,0	92,3	95,4

Таблица 2-102. Коэффициенты преломления кристаллов

В таблице даны значения коэффициентов преломления некоторых кристаллов при 18° С для лучей видимой части спектра, длины волн которых отвечают определенным спектральным линиям. Элементы, которым принадлежат эти линии, указываются; указаны также приближенные значения длин волн λ этих линий в единицах Ангстрема; более точные значения их длин волн даны в табл. 2-97.

λ (Å)	Известковый шпат		Плавиковый шпат	Каменная соль	Сильвин
	обыкн. л.	необыкн. л.			
6708 (Li, кр. л.)	1,6537	1,4843	1,4323	1,5400	1,4866
6563 (H, кр. л.)	6544	4846	4325	5407	4872
6438 (Cd, кр. л.)	6550	4847	4327	5412	4877
5893 (Na, ж. л.)	6584	4864	4339	5443	4904
5461 (Hg, з. л.)	6616	4879	4350	5475	4931
5086 (Cd, з. л.)	6653	4895	4362	5509	4961
4861 (H, з. л.)	6678	4907	4371	5534	4983
4800 (Cd, с. л.)	6686	4911	4379	5541	4990
4047 (Hg, ф. л)	6813	4969	4415	5665	5097

Таблица 2-103. Коэффициенты преломления оптических стекол

В таблице даны значения коэффициентов преломления линий *C*, *D* и *F* (стр. 370), длины волн которых приближенно равны: 0,6563 μ, 0,5893 μ и 0,4861 μ (табл. 2-98).

	Обозначение	n_C	n_D	n_F
Боросиликатный крон . . .	516/641	1,5139	1,5163	1,5220
Крон	518/589	1,5155	1,5181	1,5243
Легкий флинт	548/459	1,5445	1,5480	1,5565
Баритовый крон	659/560	1,5658	1,5688	1,5759
» »	572/576	1,5697	1,5726	1,5796
Легкий флинт	575/413	1,5709	1,5749	1,5848
Баритовый легкий флинт	579/539	1,5763	1,5795	1,5871
Тяжелый крон	589/612	1,5862	1,5891	1,5959
» »	612/586	1,6095	1,6126	1,6200
Флинт	512/369	1,6081	1,6129	1,6247
»	617/365	1,6120	1,6169	1,6290
»	619/363	1,6150	1,6199	1,6321
»	624/359	1,6192	1,6242	1,6366
Тяжелый баритовый флинт	626/391	1,6213	1,6259	1,6379
Тяжелый флинт	647/339	1,6421	1,6475	1,6612
» »	672/322	1,6666	1,6725	1,6874
» »	755/275	1,7473	1,7550	1,7747

Таблица 2-104. Коэффициенты преломления кварца в видимой части спектра

В таблице даны значения коэффициентов преломления лучей обыкновенного (n_0) и необыкновенного (n_e) для интервала спектра приближенно от 0,4 до 0,70 μ.

λ (μ)	n_0	n_e	Плавленый кварц	λ (μ)	n_0	n_e	Плавленый кварц
0,404656	1,557356	1,56671	1,46968	0,533852	1,546799	1,555996	1,46067
0,434047	1,553963	1,563405	1,46690	0,546072	1,546174	1,555350	1,46013
0,435834	1,553790	1,563225	1,46675	0,58929	1,544246	1,553355	1,45845
0,467815	1,551027	1,560368	1,46435	0,643874	1,542288	1,551332	1,45674
0,479991	1,550118	1,559428	1,46355	0,656278	1,541899	1,550929	1,45640
0,486133	1,549683	1,558979	1,46318	0,706520	1,540488	1,549472	1,45517
0,508582	1,548229	1,557475	1,46191				

Таблицы 2-105 а и б. Коэффициенты преломления жидкостей

В таблице 2-105а даны значения коэффициентов преломления *n* жидкостей для луча с длиной волны, приближенно равной 0,5893 μ (желтая линия натрия); температура жидкости, при которой производились измерения *n*, указывается.

В таблице 2-105б даны значения коэффициентов преломления n водных растворов сахара (при 20° С) в зависимости от концентрации c раствора (c показывает весовой процент сахара в растворе).

Таблица 2-105а

Жидкость	t (°С)	n	Жидкость	t (°С)	n
Аллиловый спирт	20	1,41345	Нитротолуол (орто-)	20,4	1,54739
Амиловый спирт (н.)	13	1,414	Паральдегид	20	1,40486
Анизол	22	1,5150	Пентан (норм.)	20	1,3575
Анилин	20	1,5863	Пентан (изо-)	20	1,3537
Ацетальдегид	20	1,3316	Пропиловый спирт (норм.)	20	1,38543
Ацетон	19,4	1,35886	Сероуглерод	18	1,62950
Бензол	20	1,50112	Толуол	20	1,49693
Бромоформ	19	1,5980	Фурфурол	20	1,52608
Бутиловый спирт (н.)	20	1,39931	Хлорбензол	20	1,52479
Глицерин	20	1,4730	Хлороформ	18	1,44643
Диацетил	18	1,39331	Хлорпикрин	23	1,46075
Ксилол (мета-)	20	1,49722	Четыреххлористый углерод	15	1,46305
Ксилол (орто-)	20	1,50545	Этил бромистый	20	1,42386
Ксилол (пара-)	20	1,49582	Этил иодистый	20	1,5168
Метилен хлористый	24	1,4237	Этилацетат	18	1,37216
Метиловый спирт	14,5	1,33118	Этилбензол	20	1,4959
Муравьиная кислота	20	1,37137	Этилен бромистый	20	1,53789
Нитробензол	20	1,55291	Этиловый спирт	18,2	1,36242
			Этиловый эфир	20	1,3538

Таблица 2-105б

c (%)	n	c (%)	n	c (%)	n	c (%)	n
0	1,3330	10	1,3479	35	1,3902	60	1,4418
2	1,3359	15	1,3557	40	1,3997	65	1,4532
4	1,3388	20	1,3639	45	1,4096	70	1,4651
6	1,3418	25	1,3723	50	1,4200	75	1,4774
8	1,3448	30	1,3811	55	1,4307	80	1,4901

Таблица 2-106. **Коэффициенты преломления воды**

В таблице даны значения коэффициентов преломления n воды при температуре 20° С в интервале длин волн приближенно от 0,3 до 1 μ.

λ (μ)	n	λ (μ)	n	λ (μ)	n
0,3082	1,3567	0,4861	1,3371	0,6562	1,3311
0,3611	1,3474	0,5460	1,3345	0,7682	1,3289
0,4341	1,3403	0,5893	1,3330	1,028	1,3245

Таблица 2-107. Коэффициенты преломления газов

В таблице даны значения коэффициентов преломления n газов при нормальных условиях для линии D (стр. 370), длина волны которой приближенно равна 0,5893 μ.

Газ	n	Газ	n	Газ	n
Азот . . .	1,000298	Кислород . .	1,000271	Сероводород	1,000641
Аммиак	1,000379	Неон	1,000067	Углекислота	1,000451
Аргон . .	1,000281	Окись углерода . . .	1,000334	Хлор	1,000768
Водород .	1,000132	Сернистый газ	1,000686	Этилен . . .	1,000719
Воздух . .	1,000292			Водяной пар	1,000255
Гелий . .	1,000035				

Таблица 2-108. Вращение плоскости поляризации в растворах

В таблице даны значения удельного вращения [α] плоскости поляризации прямолинейно поляризованных лучей в растворах некоторых органических тел. Значения [α] определяются выражением

$$[\alpha] = \alpha / bc, \qquad (2\text{-}70)$$

где α обозначает угол поворота плоскости поляризации в данном растворе; b — толщина его слоя, выраженная в дециметрах; c — концентрация, т. е. число граммов растворенного тела в 100 $см^3$ раствора. Значения [α] в таблице относятся к средним комнатным температурам.

Раствор и его концентрация	λ (μ)	[α]°	Раствор и его концентрация	λ (μ)	[α]°
Глюкоза + вода, $c = 5{,}5$	0,447	96,62	Винная кислота + вода, c=28,62	0,275	— 296,8
	0,479	83,88		0,300	— 166,0
	0,508	73,61		0,350	— 16,8
	0,535	65,35		0,400	— 6,0
	0,589	52,76		0,450	+ 6,6
	0,656	41,89		0,500	+ 7,5
				0,550	+ 8,4
				0,589	+ 9,82
Тростниковый сахар + вода, $c = 26$	0,4047	452,8	Камфора + этиловый спирт, $c = 34{,}70$		
	0,4208	139,9			
	0,4358	128,8		0,334	612,5
	0,4678	109,9		0,350	378,3
	0,4800	103,05		0,400	158,6
	0,5086	91,43		0,450	109,8
	0,5209	86,80		0,500	81,7
	0,5780	69,36		0,550	62,0
	0,6438	55,70		0,589	52,4
	0,6708	50,45			

Таблица 2-109. Вращение плоскости поляризации в кварце

В таблице даны значения углов поворота α плоскости поляризации при прохождении лучей различной длины волны через пластинку кварца в направлении, параллельном его оптической оси. Толщина пластинки предполагается равной 1 *мм*, длина волны лучей выражена в микронах.

λ (μ)	α	λ (μ)	α	λ (μ)	α	λ (μ)	α
0,1854	370,9	0,2174	226,91	0,3726	58,89	0,6563	17,32
0,1857	368,6	0,2194	220,7	0,4047	48,93	0,6708	16,54
0,1862	356,6	0,2571	143,3	0,4359	41,54	1,040	6,69
0,1930	325,31	0,2747	121,1	0,4916	31,98	1,450	3,41
0,1935	322,76	0,3286	78,58	0,5086	29,72	1,770	2,28
0,1990	295,65	0,3441	70,59	0,5895	21,72	2,140	1,55

Таблица 2-110. Магнитное вращение плоскости поляризации

Магнитное вращение плоскости поляризации наблюдается во всех телах, внесенных в магнитное поле, если через них проходит прямолинейно поляризованный луч в направлении, параллельном магнитным силовым линиям. Величина магнитного вращения плоскости поляризации χ определяется выражением

$$\chi = clH, \tag{2-71}$$

где l и H обозначают путь светового луча в теле и напряженность магнитного поля; c — коэффициент пропорциональности, который называется *удельным магнитным вращением* или *постоянной Верде*. Величины l и H измеряют в сантиметрах и эрстедах, а χ и c обычно дают в дуговых минутах.

В таблице даны значения c для некоторых твердых и жидких тел при температурах, которые указываются; световой луч имеет длину волны, равную 0,5893 μ (желтая линия натрия).

	t (°C)	c (дуг. мин.)		t (°C)	c (дуг. мин.)
Бензол	15	2,062	Спирт пропиловый . . .	15,6	0,9139
Вода	20	0,013	» этиловый	16,8	0,8637
Кварц ⊥ оси . . .	20	0,0166	Стекло: крон . .	18	0,0161
Кислота муравьиная . . .	20,8	0,7990	Флинт (тяжелый)	18	0,0888
» уксусная	21,0	0,7976	Этил бромистый	19,7	1,395
Сероуглерод . . .	0	0,0435	» иодистый	18,1	2,251
Спирт изоамиловый	19,9	0,9888	» хлористый	5,0	1,035

§ 2-21. Строение атома и ядерные процессы

Таблица 2-111. **Спектр водорода**

Спектр водорода рассчитывается по формуле Бора:

$$\nu = R\left(\frac{1}{m^2} - \frac{1}{n^2}\right).$$

При $m = 1$ и $n = 2, 3$ и 4 имеем три линии серии Лаймана, при $m = 2$ и $n = 3, 4, 5 \ldots$ имеем более тридцати линий серии Бальмера, при $m = 3$ и $n = 4, 5, 6 \ldots$ 10 имеем восемь линий серии Пашена, при $m = 4$ и $n = 5$ и 6 — две линии серии Брекета и при $m = 5$ и $n = 6$ — одну линию серии Пфунда. В таблице сопоставлены длины волн линий водородного спектра, полученные из опыта ($\lambda_{оп}$) с их теоретическими значениями ($\lambda_{теор}$). Для серий Лаймана, Бальмера и Пашена длины волн линий даны в единицах Ангстрема (Å), для серий Брекета и Пфунда — в микронах (μ).

Серия	n	$\lambda_{оп}$	$\lambda_{теор}$
Лаймана $\nu = R\left(\frac{1}{1^2} - \frac{1}{n^2}\right)$ (1906 г.)	2	1 215,7	1 216,68
	3	1 026,0	1 025,73
	4	972,7	972,54
Бальмера $\nu = R\left(\frac{1}{2^2} - \frac{1}{n^2}\right)$ (1885 г. и сл.)	3	6 562,8473 6 562,7110	6 562,793
	4	4 861,3578 4 861,2800	4 861,327
	5	4 340,497 4 340,429	4 340,466
	6	4 101,7346	4 101,738
	7	3 970,0740	3 970,075
	8	3 889,0575	3 889,052
	9	3 835,397	3 835,387
	10	3 797,910	3 797,900
Пашена $\nu = R\left(\frac{1}{3^2} - \frac{1}{n^2}\right)$ (1908 г.)	4	18 751,3	18 751,1
	5	12 817,6	12 818,1
	6	1,09 μ	10 938,1
	7	10 049,8	10 049,4
	8	9 546,2	9 546,0
	9	9 929,7	9 229,1
	10	9 015,3	9 014,9
	11	8 863,4	8 862,9
Брекета $\nu = R\left(\frac{1}{4^2} - \frac{1}{n^2}\right)$ (1922 г.)	5	4,05	4,051
	6	2,63	2,625
Пфунда $\nu = R\left(\frac{1}{5^2} - \frac{1}{n^2}\right)$ (1924 г.)	6	7,40	7,458

Таблица 2-112. Распределение электронов в атомах

Энергетическое состояние и расположение электронов в оболочках или слоях атомов (стр. 260) определяют четырьмя числами, которые называются *квантовыми* и обычно обозначаются символами n, l, s и j; квантовые числа имеют прерывный, или дискретный, характер, т. е. могут получать только отдельные, дискретные, значения, целые или полуцелые.

По отношению к квантовым числам n, l, s и j необходимо еще иметь в виду следующее:

1. Квантовое число n называется *главным;* оно общее для всех электронов, входящих в состав одной и той же электронной оболочки; иначе говоря, каждой из электронных оболочек атома отвечает определенное значение главного квантового числа, а именно: для электронных оболочек K, L, M, N, O, P и Q главные квантовые числа равны соответственно 1, 2, 3, 4, 5, 6 и 7. В случае одноэлектронного атома (атом водорода) главное квантовое число служит для определения орбиты электрона и одновременно энергии атома при стационарном состоянии.

2. Квантовое число l называется *побочным,* или орбитальным, и определяет момент количества движения электрона, вызванного его вращением вокруг атомного ядра. Побочное квантовое число может иметь значения 0, 1, 2, 3, . . . , а в общем виде обозначается символами s, p, d, f, . . . Электроны, имеющие одно и то же побочное квантовое число, образуют подгруппу, или, как часто говорят, находятся на одном и том же энергетическом подуровне.

3. Квантовое число s часто называют *спиновым,* так как оно определяет момент количества движения электрона, вызванного его собственным вращением *(момент спина).*

4. Квантовое число j называется *внутренним* и определяется суммой векторов l и s.

Распределение электронов в атомных оболочках следует также некоторым общим положениям, из них необходимо указать:

1. *Принцип Паули,* согласно которому в атоме не может быть больше одного электрона с одинаковыми значениями всех четырех квантовых чисел, т. е. два электрона в одном и том же атоме должны различаться между собой значением хотя бы одного квантового числа.

2. *Принцип энергетический,* согласно которому в основном состоянии атома все его электроны должны находиться на наиболее низких энергетических уровнях.

3. *Принцип количества (числа) электронов* в оболочках, согласно которому предельное число электронов в оболочках не может превышать $2n^2$, где n — главное квантовое число данной оболочки. Если число электронов в некоторой оболочке достигает предельного значения, то оболочка оказывается заполненной и в следующих элементах начинает формироваться новая электронная оболочка.

В соответствии с тем, что было сказано, в табл. 2-112а даны: 1) буквенные обозначения электронных оболочек; 2) соответствующие значения главных и побочных квантовых чисел; 3) символы подгрупп; 4) теоретически рассчитанное наибольшее число электронов как в отдельных подгруппах, так и в оболочках в целом. Необходимо указать, что в оболочках K, L и M число электронов и их распределение по подгруппам, определенные из опыта, вполне отвечают теоретическим вычислениям, но в следующих оболочках наблюдаются значительные расхождения: число электронов в подгруппе f достигает предельного значения только

в оболочке N, в следующей оболочке оно уменьшается, а затем исчезает и вся подгруппа f, как это можно видеть из табл. 2-112б.

В табл. 2-112б даны число электронов в оболочках и их распределение по подгруппам для всех химических элементов, в том числе и трансурановых (стр. 263 и 398). Числовые данные этой таблицы были установлены в результате очень тщательных спектроскопических исследований.

Таблица 2-112а

Оболочка	K	L		M			N				O					P						Q						
n	1	2		3			4				5					6						7						
l	0	0	1	0	1	2	0	1	2	3	0	1	2	3	4	0	1	2	3	4	5	0	1	2	3	4	5	6
Подгруппа	s	s	p	s	p	d	s	p	d	f	s	p	d	f	g	s	p	d	f	g	h	s	p	d	f	g	h	i
Число электронов в подгруппе	2	2	6	2	6	10	2	6	10	14	2	6	10	14	18	2	6	10	14	18	22	2	6	10	14	18	22	26
Число электронов в оболочке ($2n^2$)	2	8		18			32				50					72						98						

Таблица 2-112б

Z	Элемент	K	L	M	N	O	P	Q
		0	0 1	0 1 2	0 1 2 3	0 1 2 3	0 1 2	
	1-й период							
1	H	1						
2	He	2						
	2-й период							
3	Li	2	1					
4	Be	2	2					
5	B	2	2 1					
6	C	2	2 2					
7	N	2	2 3					
8	O	2	2 4					
9	F	2	2 5					
10	Ne	2	2 6					
	3-й период							
11	Na	2	2 6	1				
12	Mg	2	2 6	2				
13	Al	2	2 6	2 1				
14	Si	2	2 6	2 2				
15	P	2	2 6	2 3				
16	S	2	2 6	2 4				
17	Cl	2	2 6	2 5				
18	Ar	2	2 6	2 6				
	4-й период							
19	K	2	2 6	2 6	1			
20	Ca	2	2 6	2 6	2			
21	Sc	2	2 6	2 6 1	2			
22	Ti	2	2 6	2 6 2	2			
23	V	2	2 6	2 6 3	2			
24	Cr	2	2 6	2 6 5	1			
25	Mn	2	2 6	2 6 5	2			
26	Fe	2	2 6	2 6 6	2			
27	Co	2	2 6	2 6 7	2			
28	Ni	2	2 6	2 6 8	2			
29	Cu	2	2 6	2 6 10	1			
30	Zn	2	2 6	2 6 10	2			
31	Ga	2	2 6	2 6 10	2 1			
32	Ge	2	2 6	2 6 10	2 2			
33	As	2	2 6	2 6 10	2 3			
34	Se	2	2 6	2 6 10	2 4			
35	Br	2	2 6	2 6 10	2 5			
36	Kr	2	2 6	2 6 10	2 6			
	5-й период							
37	Rb	2	2 6	2 6 10	2 6	1		
38	Sr	2	2 6	2 6 10	2 6	2		

Продолжение

Z	Элемент	K	L	M		N				O			P		Q
		0	0	1	2	0	1	2	3	0	1	2 3	0	1 2	
39	Y	2	2	6	10	2	1	1		2					
40	Zr	2	2	6	10	2	6	2		2					
41	Nb	2	2	6	10	2	6	4		1					
42	Mo	2	2	6	10	2	6	5		1					
43	Tc	2	2	6	10	2	6	6		1					
44	Ru	2	2	6	10	2	6	7		1					
45	Rh	2	2	6	10	2	6	8		1					
46	Pd	2	2	6	10	2	6	10							
47	Ag	2	2	6	10	2	6	10		1					
48	Cd	2	2	6	10	2	6	10		2					
49	In	2	2	6	10	2	6	10		2	1				
50	Sn	2	2	6	10	2	6	10		2	2				
51	Sb	2	2	6	10	2	6	10		2	3				
52	Te	2	2	6	10	2	6	10		2	4				
53	Y	2	2	6	10	2	6	10		2	5				
54	Xe	2	2	6	10	2	6	10		2	6				
	6-й период														
55	Cs	2	2	6	10	2	6	10		2	6		1		
56	Ba	2	2	6	10	2	6	10		2	6		2		
57	La	2	2	6	10	2	6	10		2	6	1	2		
58	Ce	2	2	6	10	2	6	10	1	2	6	1	2		
59	Rr	2	2	6	10	2	6	10	2	2	6	1	2		
60	Nd	2	2	6	10	2	6	10	3	2	6	1	2		
61	Pm	2	2	6	10	2	6	10	4	2	6	1	2		
62	Sm	2	2	6	10	2	6	10	5	2	6	1	2		
63	Eu	2	2	6	10	2	6	10	6	2	6	1	2		
64	Gd	2	2	6	10	2	6	10	7	2	6	1	2		
65	Tb	2	2	6	10	2	6	10	8	2	6	1	2		
66	Dy	2	2	6	10	2	6	10	9	2	6	1	2		
67	Ho	2	2	6	10	2	6	10	10	2	6	1	2		
68	Er	2	2	6	10	2	6	10	11	2	6	1	2		
69	Tu	2	2	6	10	2	6	10	12	2	6	1	2		
70	Yb	2	2	6	10	2	6	10	13	2	6	1	2		
71	Lu	2	2	6	10	2	6	10	14	2	6	1	2		
72	Hf	2	2	6	10	2	6	10	14	2	6	2	2		
73	Ta	2	2	6	10	2	6	10	14	2	6	3	2		
74	W	2	2	6	10	2	6	10	14	2	6	4	2		
75	Re	2	2	6	10	2	6	10	14	2	6	5	2		
76	Os	2	2	6	10	2	6	10	14	2	6	6	2		
77	Ir	2	2	6	10	2	6	10	14	2	6	7	2		
78	Pt	2	2	6	10	2	6	10	14	2	6	8	2		
79	Au	2	2	6	10	2	6	10	14	2	6	10	1		
80	Hg	2	2	6	10	2	6	10	14	2	6	10	2		
81	Tl	2	2	6	10	2	6	10	14	2	6	10	2	1	
82	Pb	2	2	6	10	2	6	10	14	2	6	10	2	2	
83	Bi	2	2	6	10	2	6	10	14	2	6	10	2	3	
84	Po	2	2	6	10	2	6	10	14	2	6	10	2	4	
85	At	2	2	6	10	2	6	10	14	2	6	10	2	5	
86	Rn	2	2	6	10	2	6	10	14	2	6	10	2	6	

Продолжение

Z	Элемент	K	L	M		N				O			P		Q
		0	0	1	0	1	2	0	1	2	3	0	1	2 3	0	1 2	
	7-й период																
87	Fr	2	2	6	2	6	10	2	6	10	14	2	6	10	2	6	1
88	Ra	2	2	6	2	6	10	2	6	10	14	2	6	10	2	6	2
89	Ac	2	2	6	2	6	10	2	6	10	14	2	6	10	2	6 1	2
90	Th	2	2	6	2	6	10	2	6	10	14	2	6	10 1	2	6 1	2
91	Pa	2	2	6	2	6	10	2	6	10	14	2	6	10 2	2	6 1	2
92	U	2	2	6	2	6	10	2	6	10	14	2	6	10 3	2	6 1	2
93	Np	2	2	6	2	6	10	2	6	10	14	2	6	10 4	2	6 1	2
94	Pu	2	2	6	2	6	10	2	6	10	14	2	6	10 5	2	6 1	2
95	Am	2	2	6	2	6	10	2	6	10	14	2	6	10 6	2	6 1	2
96	Cm	2	2	6	2	6	10	2	6	10	14	2	6	10 7	2	6 1	2
97	Bk	2	2	6	2	6	10	2	6	10	14	2	6	10 8	2	6 1	2
98	Cf	2	2	6	2	6	10	2	6	10	14	2	6	10 8	2	6 2	2
99	En	2	2	6	2	6	10	2	6	10	14	2	6	10 8	2	6 3	2
100	Fm	2	2	6	2	6	10	2	6	10	14	2	6	10 8	2	6 4	2
101	Mv	2	2	6	2	6	10	2	6	10	14	2	6	10 8	2	6 5	2

Таблица 2-113. Ионизационные потенциалы элементов

В таблице даны значения первых ионизационных потенциалов некоторых элементов, выраженные в электроновольтах (стр. 243); указаны также порядковые номера и символы элементов.

Z		Иониз. потен.	Z		Иониз. потен.	Z		Иониз. потен.	Z		Иониз. потен.
1	H	13,54	14	Si	8,15	34	Se	9,75	53	J	10,44
2	He	24,56	16	S	10,31	36	Kr	13,94	54	Xe	12,13
3	Li	5,39	18	Ar	15,71	37	Rb	4,18	55	Cs	3,88
4	Be	9,32	19	K	4,32	38	Sr	5,69	56	Ba	5,21
5	B	8,30	20	Ca	6,11	42	Mo	7,18	57	La	5,61
6	C	11,27	24	Cr	6,76	44	Ru	7,50	74	W	7,98
7	N	14,52	25	Mn	7,40	45	Rh	7,70	78	Pt	8,96
8	O	13,56	26	Fe	7,90	46	Pd	8,33	79	Au	9,19
10	Ne	21,48	27	Co	7,81	47	Ag	7,57	80	Hg	10,39
11	Na	5,14	28	Ni	7,63	48	Cd	8,99	82	Pb	7,38
12	Mg	7,64	29	Cu	7,70	50	Sn	7,32	83	Bi	7,25
13	Al	5,98	30	Zn	9,38	51	Sb	8,53	88	Ra	5,25

Таблица 2-114. Термоэлектронная эмиссия

В таблице даны значения постоянных A и b в уравнении для плотности j термоэлектронного тока

$$j = AT^2 e^{-b/T}, \tag{2-72}$$

где T обозначает абсолютную температуру. Если I измерено в $a/см^2$, то A измеряется в $a/см^2 \cdot град^2$.

Вещество	A	b	Вещество	A	b
Вольфрам . . .	60—100	$5{,}24 \cdot 10^4$	Никель	$1{,}38 \cdot 10^3$	$5{,}84 \cdot 10^4$
Молибден . . .	60	$5{,}15 \cdot 10^4$	Железо	—	$5{,}53 \cdot 10^4$
	55	$4{,}82 \cdot 10^4$	Медь	65	$5{,}02 \cdot 10^4$
Тантал	60,2	$4{,}72 \cdot 10^4$	Серебро . . .	60,2	$4{,}70 \cdot 10^4$
	37,2	$4{,}76 \cdot 10^4$	Золото	40	$5{,}00 \cdot 10^4$
Палладий . . .	60	$5{,}80 \cdot 10^4$	Цезий	1,62	$2{,}10 \cdot 10^4$
Торий	60—70	$3{,}89 \cdot 10^4$	Кальций . . .	60	$2{,}60 \cdot 10^4$
Платина . . .	$1{,}7 \cdot 10^4$	$7{,}25 \cdot 10^4$	CaO	—	$2{,}05 \cdot 10^4$
Цирконий . .	330	$4{,}79 \cdot 10^4$	SrO	—	$1{,}47 \cdot 10^4$
Гафний	14,5	$4{,}10 \cdot 10^4$	BaO	—	$1{,}15 \cdot 10^4$
Ниобий	57	$4{,}60 \cdot 10^4$	MgO	—	$1{,}18 \cdot 10^4$

Таблицы 2-115 а и б. Лучи Рентгена

В табл. 2-115а даны длины волн λ линий α_1 и α_2 наиболее жесткой K-серии характеристического рентгеновского излучения для некоторых элементов. Согласно *закону Мозли* длины волн линий характеристического излучения уменьшаются по мере увеличения порядкового номера элементов. Значения λ даны в единицах X (стр. 228), для элементов указаны порядковые номера Z и химические символы.

Поглощение рентгеновских лучей различными телами подчиняется общему закону, который выражается формулой

$$I = I_0 e^{-\mu d}, \qquad (2\text{-}73)$$

где I_0 и I обозначают интенсивность рентгеновских лучей до и после прохождения поглощения слоя; d — его толщину и μ — коэффициент поглощения лучей. Частное от деления μ на плотность поглощающего тела ρ, т. е. величина μ/ρ, называется массовым коэффициентом поглощения рентгеновских лучей и обыкновенно обозначается $\bar{\mu}$. В табл. 2-115б даны: 1) значения массового коэффициента поглощения $\bar{\mu}$ рентгеновских лучей различной жесткости некоторыми телами; 2) толщина слоя d этих тел в сантиметрах, которая вызывает ослабление лучей в два раза. Жесткость лучей определяется в таблице их длиной волны λ, измеренной в единицах Ангстрема.

Таблица 2-115а

Z	Элемент	λ		Z	Элемент	λ	
		α_1	α_2			α_1	α_2
12	Mg	9869,0		42	Mo	712,1	707,8
13	Al	8320,5		47	Ag	562,7	558,3
19	K	3737,1	3733,7	51	Sb	473,9	469,3
20	Ca	3355,0	3351,7	56	Ba	389,0	384,4
22	Ti	2746,8	2743,2	57	La	374,7	370,0
23	V	2502,1	2498,3	73	Ta	219,7	214,9
24	Cr	2288,9	2285,0	74	W	213,4	208,6
25	Mn	2101,5	2097,5	77	Ir	195,5	190,6
26	Fe	1936,0	1932,1	78	Pt	190,0	182,2
27	Co	1789,2	1785,3	79	Au	184,8	185,1
28	Ni	1658,3	1654,4	83	Bi	165,2	160,4
29	Cu	1541,2	1537,4	92	U	130,7	125,6

Таблица 2-115б

λ (Å)	Воздух		Вода		Алюминий		Медь		Свинец	
	$\bar{\mu}$	d	$\bar{\mu}$	d	$\bar{\mu}$	d	$\bar{\mu}$	d	$\bar{\mu}$	d
0,1			0,16	4,3	0,16	1,6	0,36	0,21	3,8	0,016
0,2			0,18	3,9	0,28	0,92	1,5	0,051	4,9	0,013
0,3			0,29	2,4	0,47	0,55	4,3	0,018	14	0,0044
0,4			0,44	1,6	1,1	0,23	9,8	0,0078	31	0,0020
0,5	0,48	1 120	0,66	1,1	2,0	0,13	19	0,0040	54	0,0011
0,6	0,75	720	1,0	0,69	3,4	0,076	32	0,0024	90	0,0007
0,7	1,3	410	1,5	0,46	5,1	0,050	48	0,0016	139	0,0004
0,8	1,6	340	2,1	0,33	7,4	0,035	70	0,0011		
0,9	2,1	260	2,8	0,25	11	0,023	98	0,0008		
1,0	2,6	210	3,8	0,18	15	0,017	131	0,0006		
1,5	8,7	62	12	0,058	46	0,006	49	0,0016		
2,0	21	26	28	0,025	102	0,002	108	0,0007		
2,5	39	14	51	0,014	194	0,001	198	0,0004		

Таблицы 2-116а, б и в. Радиоактивные ряды урана, актиния и тория

Основной закон радиоактивного распада определяется формулой

$$N = N_0 e^{-\lambda t}, \qquad (2\text{-}74)$$

где N_0 и N обозначают начальное число атомов радиоактивного вещества и их число в момент времени t, а λ — постоянный для данного тела коэффициент, который называется *постоянной распада*. Кроме постоянной распада λ, очень часто радиоактивный распад характеризуют так называемым *периодом полураспада* T, т. е. тем промежутком времени, в течение которого распадается половина начального числа атомов. Период полураспада T, связанный с постоянной распада соотношением $T = 0{,}693/\lambda$, для радиоактивных тел изменяется в чрезвычайно широких пределах; в силу этого его принято измерять в различных единицах времени, т. е. в годах, днях, часах, минутах и секундах.

В табл. 2-116 а, б и в даны для рядов урана, радия, актиния и тория, кроме названия, химического символа, порядкового номера Z и массового числа A всех звеньев распада, еще: 1) их периоды полураспада T; 2) вид излучения; 3) длина пробега α-лучей (l_α) в воздухе при нормальных условиях; 4) энергия α-лучей E_α, измеренная в *Мэв* (стр. 243).

Таблица 2-116а

Ряд урана — радия

Название	Символ	Z	A	T	Изл.	l_α (*см*)	E_α (*Мэв*)
Уран I	UI	92	238	$4{,}49 \cdot 10^9$ лет	α	2,653	4,18
Уран X_1	UX_1	90	234	24,1 дня	β	—	—
Уран X_2	UX_2	91	234	1,14 *мин*	β	—	—
Уран Z	UZ	91	234	6,7 часа	β	—	—
Уран II	UII	92	234	$2{,}52 \cdot 10^5$ лет	α	3,211	4,78

Продолжение

Название	Символ	Z	A	T	Изл.	l_α (*см*)	E_α (*Мэв*)
Ионий	—	90	230	$8{,}3\cdot10^4$ лет	α	3,176	4,682
Радий	Ra	88	226	1590 лет	α	3,30	4,791
Радон [1]	Rn	86	222	3,82 дня	α	4,051	5,4860
Радий A	RaA	84	218	3,05 *мин*	α	4,657	5,9981
Радий B	RaB	82	214	26,8 *мин*	β	—	—
Астатин [2]	At	85	218	1,5—2 *сек*	α	—	6,57
Радий C	RaC	83	214	19,7 *мин*	β	—	5,5048
Радон 218 [3]	^{218}Rn	86	218	$1{,}9\cdot10^{-2}$ *сек*	α	—	7,12
Радий C'	RaC'	84	214	$1{,}55\cdot10^{-4}$ *сек*	α	6,907	7,6802
Радий C''	RaC''	81	210	1,32 *мин*	β	—	—
Радий D	RaD	82	210	22 года	β	—	—
Радий E	RaE	83	210	5,0 дня	β	—	—
Полоний	Po	84	206	140 дней	α	3,842	5,2984
Таллий	^{206}Tl	81	206	4,23 *мин*	β	—	—
Радий G	RaG	82	206	Стабильн.		—	—

Примечания к табл. 2-116а. [1]) Раньше назывался эманацией радия, это название иногда применяется и в настоящее время. [2]) Изотоп астатина 218. [3]) Содержится в радоне в количестве около 0,1%.

Таблица 2-116б

Ряд актиния

Название	Символ	Z	A	T	Изл.	l_α (*см*)	E_α (*Мэв*)
Актиноуран	AcU	92	235	$7{,}13\cdot10^8$ лет	α	3,02	4,52
Уран Y . .	UY	90	231	25,51 часа	β	—	—
Протактиний . . .	Pa	91	231	$3{,}2\cdot10^4$ лет	α	3,51	5,05
Актиний . .	Ac	89	227	21,7 года	α, β	3,46	4,95
Радиоактиний . . .	RaAc	90	223	18,9 дня	α	4,71	6,03
Франций [1])	Fr	87	223	21 *мин*	β	—	—
Актиний . .	AcX	88	223	11,4 дня	α	4,32	5,72
Актинон [2]) .	An	86	219	3,92 *сек*	α	5,69	6,82
Актиний A	AcA	84	215	$1{,}83\cdot10^{-3}$ *сек*	α, β	6,46	7,37
Актиний B	AcB	82	211	36,1 *мин*	β	—	—
Астатин [3]) .	At	85	215	$\approx 10^{-4}$ *сек*	α	—	8,00
Актиний C	AcC	83	211	2,16 *мин*	α, β	5,43	6,62
Актиний C'	AcC'	84	211	$\approx 5\cdot10^{-3}$ *сек*	α	6,55	7,43
Актиний C''	AcC''	81	207	4,76 *мин*	β	—	—
Актиний D	AcD	82	207	Стабильн.		—	—

Примечания к табл. 2-116б. [1]) Иначе *актиний* K; содержится в радиоактинии в количестве около 1,2%. [2]) Раньше назывался эманацией актиния. [3]) Изотоп *астатина* 215.

Таблица 2-116в

Ряд тория

Название	Символ	Z	A	T	Изл.	l_α (*см*)	E_α (MeV)
Торий . . .	Th	90	232	$1{,}39 \cdot 10^{10}$ лет	α	2,70	4,20
Мезоторий 1	$MsTh_1$	88	228	6,7 года	β	—	—
Мезоторий 2	$MsTh_2$	89	228	6,13 часа	β	—	—
Радиоторий	RdTh	90	228	1,90 года	α	3,98	5,42
Торий X . .	ThX	88	224	3,64 дня	α	4,28	5,68
Торон [1] . .	Tn	86	220	54,5 *сек*	α	4,00	6,28
Торий A . .	ThA	84	216	0,16 *сек*	α, β	5,64	6,77
Торий B . .	ThB	82	212	10,6 часа	β	—	—
Астатин [2] .	At	85	216	$3 \cdot 10^{-4}$ *сек*	α	—	7,79
Торий C . .	ThC	83	212	60,5 *мин*	α, β	4,73	6,05
Торий C' . .	ThC'	84	212	$2{,}2 \cdot 10^{-7}$ *сек*	α	8,57	8,78
Торий C'' . .	ThC''	81	208	3,1 *мин*	β	—	—
Торий D . .	ThD''	82	208	Стабильн.		—	—

Примечания к табл. 2-116в. [1]) Раньше назывался эманацией тория. [2]) Изотоп астатина 216.

Таблица 2-117. **Естественная радиоактивность других элементов**

Систематические исследования всех элементов периодической системы Д. И. Менделеева показали, что, кроме элементов, образующих радиоактивные семейства, еще пять элементов обнаруживают очень слабую, но несомненную естественную радиоактивность. При этом оказалось во всех случаях, что среди изотопов этих элементов только один обнаруживает естественно-радиоактивные свойства, а остальные изотопы являются стабильными.

Эти естественно-радиоактивные элементы указаны в таблице, где даны:

1) их названия и порядковый номер Z;

2) массовое число A и обозначение естественно-радиоактивного изотопа;

3) его период полураспада T;

4) вид излучения.

Значения T следует рассматривать как весьма приближенные.

Элемент	Z	A	Обозначение	T	Изл.
Калий	19	40	^{40}K	$13{,}1 \cdot 10^8$ лет	β
Рубидий . .	37	87	^{87}Rb	$6{,}0 \cdot 10^{10}$ »	β
Самарий . .	62	152	^{152}Sm	$3{,}4 \cdot 10^{11}$ »	α
Лютеций . .	71	176	^{176}Lu	$2{,}4 \cdot 10^{10}$ »	β
Рений	75	187	^{187}Re	$4 \cdot 10^{12}$ »	β

Таблицы 2-118 а и б. Распад радона и его активного осадка

Основной закон радиоактивного распада, определяемый формулой (2-74) (стр. 383), можно проверять на опыте, наблюдая: 1) распад эманации радия (радона) и 2) распад радия А, Б и С (стр. 383), образующих так называемый активный осадок (налет) радона. В таблицах даны:

1) В таблице 2-118а значения величины $e^{-\lambda t}$ для радона через определенные промежутки времени t (до 30 суток); начальное количество радона условно принято за единицу, постоянная распада радона λ принята равной $2{,}093 \cdot 10^{-6}$ *сек*$^{-1}$.

2) В таблице 2-118б значения величины $e^{-\lambda_1 t}$, $e^{-\lambda_2 t}$ и $e^{-\lambda_3 t}$ соответственно для RaA, RaB и RaC, начальные количества которых также условно приняты равными единице, а их постоянные распада приняты равными: λ_1, (RaA) $= 3{,}79 \cdot 10^{-3}$ *сек*$^{-1}$, λ_2 (RaA) $= 4{,}31 \cdot 10^{-4}$ *сек*$^{-1}$ и λ_3 (RaC) $= 5{,}86 \cdot 10^{-4}$ *сек*$^{-1}$.

Таблица 2-118а

t	$e^{-\lambda t}$	t	$e^{-\lambda t}$	t	$e^{-\lambda t}$
0 час.	1,0000	18 час.	0,8729	13 суток	0,09481
1 »	0,9925	19 »	0,8662	14 »	0,07910
2 »	0,9850	20 »	0,8597	15 »	0,06599
3 »	0,9776	21 »	0,8533	16 »	0,05505
4 »	0,9703	22 »	0,8468	17 »	0,04592
5 »	0,9629	23 »	0,8405	18 »	0,03831
6 »	0,9557	1 сутки	0,8343	19 »	0,03196
7 »	0,9485	2 »	0,6960	20 »	0,02667
8 »	0,9414	3 »	0,5806	21 »	0,02225
9 »	0,9343	4 »	0,4844	22 »	0,01856
10 »	0,9273	5 »	0,4041	23 »	0,01548
11 »	0,9203	6 »	0,3371	24 »	0,01292
12 »	0,9134	7 »	0,2812	25 »	0,01078
13 »	0,9064	8 »	0,2346	26 »	0,00899
14 »	0,8997	9 »	0,1957	27 »	0,00750
15 »	0,8929	10 »	0,1633	28 »	0,00626
16 »	0,8861	11 »	0,1362	29 »	0,00522
17 »	0,8795	12 »	0,1136	30 »	0,00435

Таблица 2-118б

t (*мин*)	$e^{-\lambda_1 t}$ (RaA)	$e^{-\lambda_2 t}$ (RaB)	$e^{-\lambda_3 t}$ (RaC)	t (*мин*)	$e^{-\lambda_1 t}$ (RaA)	$e^{-\lambda_2 t}$ (RaB)	$e^{-\lambda_3 t}$ (RaC)
0	1,0000	1,0000	1,0000	35	0,0004	0,4129	0,3002
3	0,5057	0,9254	0,8998	40	0,0001	0,3554	0,2448
5	0,3208	0,8787	0,8387	50	—	0,2744	0,1722
10	0,1033	0,7721	0,7034	60	—	0,2119	0,1211
15	0,0331	0,6784	0,5899	90	—	0,0975	0,0421
20	0,0106	0,5961	0,4948	120	—	0,0449	0,0147
25	0,0034	0,5238	0,4149	150	—	0,0207	0,0051
30	0,0011	0,4603	0,3480	180	—	0,0095	0,0018

Таблица 2-119. Эффективные нейтронные сечения некоторых ядер

При исследовании таких процессов взаимодействия частиц, как упругое и неупругое рассеяние, захват и пр., принято оперировать с *эффективным сечением* σ частиц, которое определяется площадью описанного около частицы круга такого радиуса, что при попадании в эту площадь второй такой же взаимодействующей частицы данный процесс неизменно происходит. Так устанавливают для ядер различных элементов при их взаимодействии с нейтронами сечения захвата σ_a, сечение рассеяния σ_s и пр. Сумма этих величин обычно называется *полным сечением* σ данного ядра.

В таблице даны эффективные сечения ядер некоторых элементов при их взаимодействии с нейтронами: 1) быстрыми (б. н., энергия 3—10 *Мэв*) и 2) тепловыми (т. н., энергия $\leq 0{,}025$ *эв*). Для быстрых нейтронов даны полные эффективные сечения ($\sigma_{полн}$), для тепловых — сечения рассеяния ($\sigma_{расс}$) и сечения захвата ($\sigma_{погл}$); для тепловых нейтронов $\sigma_{полн} = \sigma_{расс} + \sigma_{погл}$. Все значения σ, данные в барнах (стр. 241), вычислены как средние из результатов различных авторов.

Элемент	Б. н.	Т. н.		Элемент	Б. н.	Т. н.	
	$\sigma_{полн}$	$\sigma_{расс}$	$\sigma_{погл}$		$\sigma_{полн}$	$\sigma_{расс}$	$\sigma_{погл}$
$_1$H	0,9	38 (H_2)	0,33	$_{24}$Cr	3	4	2,9
$_1$D	1,0	7	0,0006	$_{25}$Mn	3,0	2,1	13,3
$_2$He	1,4	0,8	$\sim$0	$_{26}$Fe	3,0	11,4	2,53
$_3$Li	1,5	1,2	71	$_{27}$Co	3,2	6	36
$_4$Be	1,7	7,5	0,010	$_{28}$Ni	3,2	17,5	4,6
$_5$B	1,4	4,4	755	$_{29}$Cu	3,2	7,8	3,7
$_6$C	1,3	5	0,003	$_{30}$Zn	3,5	4	1,1
$_7$N	1,4	11	1,88 $<$0,0002	$_{38}$Sr	4,9—3,7	10	1,2
$_8$O	1,3	4,2		$_{47}$Ag	4,3	6	62
$_{11}$Na	2,4	3,4	0,51	$_{48}$Cd	4,3	7	2600
$_{12}$Mg	1,6	3,6	0,06	$_{50}$Sn	4,4	5	0,6
$_{13}$Al	1,7	1,4	0,23	$_{51}$Sb	4,3	4,1	5,0
$_{16}$S	2,0	1,2	0,49	$_{52}$Te	4,4	4,4	4,5
$_{19}$K	$\sim$2,4	2,0	2,0	$_{74}$W	4,9	6	19
$_{20}$Ca	$\sim$2,3	3,0	0,43	$^{235}_{92}$U	1,3	—	687

Таблица 2-120. Ядерные свойства элементов и их стабильных изотопов

В таблице перечислены элементы и их стабильные изотопы и указаны некоторые свойства их ядер, а именно, кроме порядкового номера Z и символов элементов и их изотопов (второй и последний столбец таблицы), еще даны: 1) массовое число A; 2) число нейтронов в ядре N 3) процентное содержание изотопов при естественном состоянии элемента; 4) значение спина i, выраженное в единицах $\hbar = h/2\pi$; 5) значение магнитного момента ядра μ, выраженное в ядерных магнетонах Из нестабильных элементов в таблицу введены только естественно радиоактивные элементы с очень продолжительным периодом полураспада, перечислены также трансурановые элементы.

Z	Символ	A	N	% содержания	Спин i	μ	Изотопы (стаб.)
0	n	1	1	—	$^1/_2$	— 1,9130	^1n
1	H D	1 2	0 1	99,98 (5) 0,01 (5)	$^1/_2$ 1	+ 2,7927 + 0,8574	^{1}H ^{2}H
2	He	3 4	1 2	$1{,}3 \cdot 10^{-4}$ ≈ 100	$^1/_2$ 0	(—) 2,1275 —	^{3}He ^{4}He
3	Li	6 7	3 4	7,30 92,70	1 $^3/_2$	+ 0,8213 + 3,2561	^{6}Li ^{7}Li
4	Be	9	5	100	$^3/_2$	(—) 1,1774	^{9}Be
5	B	10 11	5 6	18,83 81,17	3 $^3/_2$	+ 1,8008 + 2,6884	^{10}B ^{11}B
6	C	12 13	6 7	98,892 1,108	0 $^1/_2$	— + 0,7023	^{12}C ^{13}C
7	N	14 15	7 8	99,65 0,35	1 $^1/_2$	+ 0,40370 — 0,2831	^{14}N ^{15}N
8	O	16 17 18	8 9 10	99,759 0,037 0,204	0 $^1/_2$ или $^3/_2$? —	— — —	^{16}O ^{17}O ^{18}O

Продолжение

Z	Символ	A	N	% содержания	Спин i	μ	Изотопы (стаб.)
9	F	19	10	100	$^1/_2$	$+2{,}6289$	^{19}F
10	Ne	20 21 22	10 11 12	90,92 0,257 8,823	— ($^3/_2$) —	— (отриц.) —	^{20}Ne ^{21}Ne ^{22}Ne
11	Na	23	12	100	$^3/_2$	$+2{,}2174$	^{23}Na
12	Mg	24 25 26	12 13 14	79,98 10,05 10,97	— $^5/_2$ —	— ($-0{,}97$) —	^{24}Mg ^{25}Mg ^{26}Mg
13	Al	27	14	100	$^5/_2$	$+3{,}6412$	^{27}Al
14	Si	28 29 30	14 15 16	92,28 4,67 3,05	0 $^1/_2$ 0	— — —	^{28}Si ^{29}Si ^{30}Si
15	P	31	16	100	$^1/_2$	$+1{,}1316$	^{31}P
16	S	32 33 34 36	16 17 18 20	95,018 0,750 4,215 0,017	0 $^3/_2$ 0 0	— (0,632) — —	^{32}S ^{33}S ^{34}S ^{36}S
17	Cl	35 37	18 20	75,4 24,6	$^3/_2$ $^3/_2$	$+0{,}8210$ $+0{,}6833$	^{35}Cl ^{37}Cl
18	Ar	36 38 40	18 20 22	0,337 0,063 99,600	— — —	— — —	^{36}Ar ^{38}Ar ^{40}Ar
19	K	39 40 41	20 21 22	93,08 0,0119 6,9081	$^3/_2$ 4 $^3/_2$	$+0{,}3915$ $-1{,}290$ $+0{,}215$	^{39}K ^{40}K ^{41}K

Продолжение

Z	Символ	A	N	% содержания	Спин i	μ	Изотопы (стаб.)
20	Ca	40	20	96,92	—	—	^{40}Ca
		42	22	0,64	—	—	^{42}Ca
		43	23	0,129	—	—	^{43}Ca
		44	24	2,13	—	—	^{44}Ca
		46	26	0,003	—	—	^{46}Ca
		48	28	0,178	—	—	^{48}Ca
21	Sc	45	24	100	$^7/_2$	$+4{,}7563$	^{45}Sc
22	Ti	46	24	7,95	—	—	^{46}Ti
		47	25	7,75	—	—	^{47}Ti
		48	26	73,45	—	—	^{48}Ti
		49	27	5,51	—	—	^{49}Ti
		50	28	5,34	—	—	^{50}Ti
23	V	50	27	0,23	—	—	^{50}V
		51	28	99,77	$(^7/_2)$	$+5{,}1481$	^{51}V
24	Cr	50	26	4,31	—	—	^{50}Cr
		52	28	83,76	—	—	^{52}Cr
		53	29	9,55	—	—	^{53}Cr
		54	30	2,38	—	—	^{54}Cr
25	Mn	55	30	100	$^5/_2$	$+3{,}4680$	^{55}Mn
26	Fe	54	28	5,81	—	—	^{54}Fe
		56	30	91,64	—	—	^{56}Fe
		57	31	2,21	—	$\mu \approx 0$	^{57}Fe
		58	32	0,34	—	—	^{58}Fe
27	Co	59	32	100	$^7/_2$	$+4{,}6485$	^{59}Co
28	Ni	58	30	67,77	—	—	^{58}Ni
		60	32	26,16	—	—	^{60}Ni
		61	33	1,25	—	$\mu \leqslant 0{,}25$	^{61}Ni
		62	34	3,66	—	—	^{62}Ni
		64	36	1,16	—	—	^{64}Ni
29	Cu	63	34	68,94	$^3/_2$	$+2{,}2259$	^{63}Cu
		65	36	31,06	$^3/_2$	$+2{,}3843$	^{65}Cu

Продолжение

Z	Символ	A	N	% содержания	Спин i	μ	Изотопы (стаб.)
30	Zn	64	34	48,89	—	—	^{64}Zn
		66	36	27,81	—	—	^{66}Zn
		67	37	4,07	$^5/_2$	+ 0,9	^{67}Zn
		68	38	18,61	—	—	^{68}Zn
		70	40	0,62	—	—	^{70}Zn
31	Ga	69	38	60,16	$^3/_2$	+ 2,0165	^{69}Ga
		71	40	39,84	$^3/_2$	+ 2,5611	^{71}Ga
32	Ge	70	38	20,65	0	—	^{70}Ge
		72	40	27,43	0	—	^{72}Ge
		73	41	7,86	$^9/_2$	—	^{73}Ge
		74	42	36,34	0	—	^{74}Ge
		76	44	7,72	0	—	^{76}Ge
33	As	75	42	100	$^3/_2$	+ 1,5	^{75}As
34	Se	74	40	0,87	—	—	^{74}Se
		76	42	9,02	—	—	^{76}Se
		77	43	7,58	$^1/_2$	—	^{77}Se
		78	44	23,52	—	—	^{78}Se
		80	46	49,82	0	—	^{80}Se
		82	48	9,19	—	—	^{82}Se
35	Br	79	44	50,53	$^3/_2$	+ 2,1059	^{79}Br
		81	46	49,47	$^3/_2$	+ 2,2702	^{81}Br
36	Kr	78	42	0,354	—	—	^{78}Kr
		80	44	2,266	—	—	^{80}Kr
		82	46	11,56	—	—	^{82}Kr
		83	47	11,55	$^9/_2$	− 0,967	^{83}Kr
		84	48	56,90	—	—	^{84}Kr
		86	50	17,37	—	—	^{86}Kr
37	Rb	85	48	72,2	$^5/_2$	+ 1,3530	^{85}Rb
		87	50	27,8	$^3/_2$	+ 2,7503	^{87}Rb

Продолжение

Z	Символ	A	N	% содержания	Спин i	μ	Изотопы (стаб.)
38	Sr	84	46	0,55	—	—	^{84}Sr
		86	48	9,75	—	—	^{86}Sr
		87	49	6,96	$^9/_2$	— 1,1	^{87}Sr
		88	50	82,74	—	—	^{88}Sr
39	Y	89	50	100	$^1/_2$	— 0,14	^{89}Y
40	Zr	90	50	51,46	—	—	^{90}Zr
		91	51	11,23	$^5/_2$	—	^{91}Zr
		92	52	17,11	—	—	^{92}Zr
		94	54	17,40	—	—	^{94}Zr
		96	56	2,80	—	—	^{96}Zr
41	Nb	93	52	100	$^9/_2$	+ 6,167	^{93}Nb
42	Mo	92	50	15,84	—	—	^{92}Mo
		94	52	9,04	—	—	^{94}Mo
		95	53	15,72	($^5/_2$)	— (0,9135)	^{95}Mo
		96	54	16,53	—	—	^{96}Mo
		97	55	9,46	($^5/_2$)	— (0,9327)	^{97}Mo
		98	56	23,78	—	—	^{98}Mo
		100	58	9,63	—	—	^{100}Mo
43	Te	—	—	—	—	—	
44	Ru	96	52	5,68	—	—	^{96}Ru
		98	54	2,22	—	—	^{98}Ru
		99	55	12,81	—	—	^{99}Ru
		100	56	12,70	—	—	^{100}Ru
		101	57	16,98	—	—	^{101}Ru
		102	58	31,34	—	—	^{102}Ru
		104	60	18,27	—	—	^{104}Ru
45	Rh	103	58	100	$^1/_2$	— 0,11	^{103}Rh
46	Pd	102	56	0,8	—	—	^{102}Pd
		104	58	9,3	—	—	^{104}Pd
		105	59	22,6	—	—	^{105}Pd
		106	60	27,1	—	—	^{106}Pd
		108	62	26,7	—	—	^{108}Pd
		110	64	13,5	—	—	^{110}Pd

Продолжение

Z	Символ	A	N	% содержания	Спин i	μ	Изотопы (стаб.)
47	Ag	107	60	51,92	$^1/_2$	— 0,086	^{107}Ag
		109	62	48,08	$^1/_2$	— 0,159	^{109}Ag
48	Cd	106	58	1,215	—	—	^{106}Cd
		108	60	0,875	—	—	^{108}Cd
		110	62	12,39	—	—	^{110}Cd
		111	63	12,75	$^1/_2$	— 0,5949	^{111}Cd
		112	64	24,07	—	—	^{112}Cd
		113	65	12,26	$^1/_2$	— 0,6224	^{113}Cd
		114	66	28,86	—	—	^{114}Cd
		116	68	7,58	—	—	^{116}Cd
49	In	113	64	4,23	$^9/_2$	+ 5,5227	^{113}In
		115	66	95,77	$^9/_2$	+ 5,5343	^{115}In
50	Sn	112	62	0,94	—	—	^{112}Sn
		114	64	0,65	—	—	^{114}Sn
		115	65	0,33	$^1/_2$	0,9177	^{115}Sn
		116	66	14,36	—	—	^{116}Sn
		117	67	7,51	$^1/_2$	— 0,9998	^{117}Sn
		118	68	24,21	—	—	^{118}Sn
		119	69	8,45	$^1/_2$	— 1,0460	^{119}Sn
		120	70	33,11	—	—	^{120}Sn
		122	72	4,61	—	—	^{122}Sn
		124	74	5,83	—	—	^{124}Sn
51	Sb	121	70	57,25	$^5/_2$	+ 3,3590	^{121}Sb
		123	72	42,45	$^7/_2$	+ 2,5465	^{123}Sb

Продолжение

Z	Символ	A	N	% содержания	Спин i	μ	Изотопы (стаб.)
52	Te	120	68	0,09	—	—	^{120}Te
		122	70	2,43	—	—	^{122}Te
		123	71	0,85	$^1/_2$	—	^{123}Te
		124	72	4,59	—	—	^{124}Te
		125	73	6,98	$^1/_2$	—	^{125}Te
		126	74	18,70	—	—	^{126}Te
		128	76	31,85	—	—	^{128}Te
		130	78	34,51	—	—	^{130}Te
53	J	127	74	100	$^5/_2$	+ 2,8083	^{127}J
54	Xe	124	70	0,096	—	—	^{124}Xe
		126	72	0,090	—	—	^{126}Xe
		128	74	1,919	—	—	^{128}Xe
		129	75	26,44	$^1/_2$	− 0,7767	^{129}Xe
		130	76	4,075	—	—	^{130}Xe
		131	77	21,18	$^3/_2$	+ 0,700	^{131}Xe
		132	78	26,89	—	—	^{132}Xe
		134	80	10,44	—	—	^{134}Xe
		136	82	8,87	—	—	^{136}Xe
55	Cs	133	78	100	$^7/_2$	+ 2,574	^{133}Cs
56	Ba	130	74	0,102	—	—	^{130}Ba
		132	76	0,098	—	—	^{132}Ba
		134	78	2,42	—	—	^{134}Ba
		135	79	6,59	$^3/_2$	+ 0,8363	^{135}Ba
		136	80	7,81	—	—	^{136}Ba
		137	81	11,32	$^3/_2$	+ 0,9354	^{137}Ba
		138	82	71,66	—	—	^{138}Ba
57	La	138	81	0,089	—	—	^{138}La
		139	82	99,911	$^7/_2$	+ 2,7779	^{139}La
58	Ce	136	78	0,19	—	—	^{136}Ce
		138	80	0,25	—	—	^{138}Ce
		140	82	88,49	—	—	^{140}Ce
		142	84	11,07	—	—	^{142}Ce
59	Pr	141	82	100	$^5/_2$	+ 4,591	^{141}Pr

Продолжение

Z	Символ	A	N	% содержания	Спин i	μ	Изотопы (стаб.)
60	Nd	142	82	26,80	—	—	^{142}Nd
		143	83	12,12	$^7/_2$	—	^{143}Nd
		144	84	23,91	—	—	^{144}Nd
		145	85	8,35	$^7/_2$	—	^{145}Nd
		146	86	17,35	—	—	^{146}Nd
		148	88	5,78	—	—	^{148}Nd
		150	90	5,69	—	—	^{150}Nd
61	Pm	—	—	—	—	—	—
62	Sm	144	82	2,95	—	—	^{144}Sm
		147	85	14,62	$\geqslant {}^9/_2$	—	^{147}Sm
		148	86	10,97	—	—	^{148}Sm
		149	87	13,56	$\geqslant {}^9/_2$	—	^{149}Sm
		150	88	7,27	—	—	^{150}Sm
		152	90	27,34	—	—	^{152}Sm
		154	92	23,29	—	—	^{154}Sm
63	Eu	151	88	47,77	$^5/_2$	$+3{,}4$	^{151}Eu
		153	90	52,23	$^5/_2$	$+1{,}5$	^{153}Eu
64	Gd	152	88	0,20	—	—	^{152}Gd
		154	90	2,16	—	—	^{154}Gd
		155	91	14,68	—	—	^{155}Gd
		156	92	20,36	—	—	^{156}Gd
		157	93	15,64	—	—	^{157}Gd
		158	94	24,95	—	—	^{158}Gd
		160	96	22,01	—	—	^{160}Gd
65	Tb	159	94	100	$^3/_2$	—	^{159}Tb
66	Dy	156	90	0,0525	—	—	^{156}Dy
		158	92	0,0905	—	—	^{158}Dy
		160	94	2,297	—	—	^{160}Dy
		161	95	18,88	—	—	^{161}Dy
		162	96	25,53	—	—	^{162}Dy
		163	97	24,97	—	—	^{163}Dy
		164	98	28,18	—	—	^{164}Dy

Продолжение

Z	Символ	A	N	% содержания	Спин i	μ	Изотопы (стаб.)
67	Ho	165	98	100	$^7/_2$	—	^{165}Ho
68	Er	162	94	0,154	—	—	^{162}Er
		164	96	1,606	—	—	^{164}Er
		166	98	33,36	—	—	^{166}Er
		167	99	22,82	—	—	^{167}Er
		168	100	27,02	—	—	^{168}Er
		170	102	15,04	—	—	^{170}Er
69	Tu	169	100	100	$^1/_2$	—	^{169}Tu
70	Yb	168	98	0,13	—	—	^{168}Yb
		170	100	3,03	—	—	^{170}Yb
		171	101	14,27	$^1/_2$	+ 0,45	^{171}Yb
		172	102	21,77	—	—	^{172}Yb
		173	103	16,08	$^5/_2$	— 0,65	^{173}Yb
		174	104	31,92	—	—	^{174}Yb
		176	106	12,80	—	—	^{176}Yb
71	Lu	175	104	97,4	$^7/_2$	+ 2,6	^{175}Lu
		176	105	2,60	$\geqslant 7$	+ 3,8	^{176}Lu
72	Hf	174	102	0,18	—	—	^{174}Hf
		176	104	5,30	—	—	^{176}Hf
		177	105	18,47	$\leqslant ^9/_2$	—	^{177}Hf
		178	106	27,10	—	—	^{178}Hf
		179	107	13,84	$\leqslant ^9/_2$	—	^{179}Hf
		180	108	35,11	—	—	^{180}Hf
73	Ta	181	108	100	$^7/_2$	+ 2,1	^{181}Ta
74	W	180	106	0,16	—	—	^{180}W
		182	108	26,35	—	—	^{182}W
		183	109	14,32	$^1/_2$	—	^{183}W
		184	110	30,68	—	—	^{184}W
		186	112	28,49	—	—	^{186}W

Продолжение

Z	Символ	A	N	% содержания	Спин I	μ	Изотопы (стаб.)
75	Re	185	110	37,07	$^5/_2$	$+3{,}3$	^{185}Re
		187	112	62,93	$^5/_2$	$+3{,}3$	^{187}Re
76	Os	184	108	0,018	—	—	^{184}Os
		186	110	1,582	—	—	^{186}Os
		187	111	1,64	—	—	^{187}Os
		188	112	13,27	—	—	^{188}Os
		189	113	16,14	$(^1/_2)$	—	^{189}Os
		190	114	26,38	—	—	^{190}Os
		192	116	40,97	—	—	^{192}Os
77	Ir	191	114	38,5	$(^3/_2)$	—	^{191}Ir
		193	116	61,5	$^3/_2$	—	^{193}Ir
78	Pt	190	112	0,01	—	—	^{190}Pt
		192	114	0,8	—	—	^{192}Pt
		194	116	30,2	—	—	^{194}Pt
		195	117	35,2	$^1/_2$	$+0{,}6059$	^{195}Pt
		196	118	26,6	—	—	^{196}Pt
		198	120	7,19	—	—	^{198}Pt
79	Au	197	118	100	$^3/_2$	$+0{,}3$	^{197}Au
80	Hg	196	116	0,15	—	—	^{196}Hg
		198	118	10,12	—	—	^{198}Hg
		199	119	17,04	$^1/_2$	$+0{,}5041$	^{199}Hg
		200	120	23,25	—	—	^{200}Hg
		201	121	13,18	$^3/_2$	$-0{,}5590$	^{201}Hg
		202	122	29,54	—	—	^{202}Hg
		204	124	6,72	—	—	^{204}Hg
81	Tl	203	122	29,46	$^1/_2$	$+1{,}6117$	^{203}Tl
		205	124	70,54	$^1/_2$	$+1{,}6276$	^{205}Tl

Продолжение

Z	Символ	A	N	% содержания	Спин i	μ	Изотопы (стаб.)
82	Pb	204 206 207 208	122 124 125 126	1,54 22,62 22,62 53,22	— — $^1/_2$ —	— — + 0,5894 —	^{204}Pb ^{206}Pb ^{207}Pb ^{208}Pb
83	Bi	209	126	100	$^9/_2$	+ 4,0796	^{209}Bi
84	Po						
85	At						
86	Rn						
87	Fr						
88	Ra						
89	Ac						
90	Th	232	142	100	—	—	^{232}Th
91	Pa	231	140	100	$^3/_2$	—	^{231}Pa
92	U	234 235 238	142 142 146	0,006 0,720 99,274	— ($^5/_2$) —	— — —	^{234}U ^{235}U ^{238}U
93	Np						
94	Pu						
95	Am						
96	Cm						
97	Bk						
98	Cf						
99	En						
100	Fm						
101	Mv						

Таблица 2-121. Ядерные реакции и их энергия

В таблице приведены некоторые ядерные реакции и их энергия Q, выраженная в *Мэв*. Реакции даны в сокращенной записи, принятой в настоящее время, которую следует читать так: 1) символ перед скобками и символ за скобками обозначают ядро, подвергающееся бомбардировке, и ядро, получающееся в результате реакции; 2) буквы в скобках обозначают: первая — бомбардирующую частицу и вторая — частицу, вылетающую из ядра в результате реакции. Для обозначения частиц вводятся сокращения: p — протон, n — нейтрон, d — дейтрон, α — α-частица и γ — квантовое излучение. Энергия Q при ядерных реакциях может как выделяться, так и поглощаться. В первом случае перед значением Q ставится знак «+», во втором случае — знак «—».

Реакция	Q (*Мэв*)	Реакция	Q (*Мэв*)
$^{1}_{1}\mathrm{H}\,(n,\,\gamma)^{2}_{1}\mathrm{D}$	$+2{,}23\pm0{,}01$	$^{16}_{8}\mathrm{O}\,(d,\,\alpha)^{14}_{7}\mathrm{N}$	$+3{,}1\pm0{,}1$
$^{2}_{1}\mathrm{D}\,(\gamma,\,n)^{1}_{1}\mathrm{H}$	$-2{,}20\pm0{,}05$	$^{19}_{9}\mathrm{F}\,(n,\,p)^{19}_{8}\mathrm{O}$	$-3{,}56\pm0{,}07$
$^{2}_{1}\mathrm{D}\,(n,\,\gamma)^{3}_{1}\mathrm{H}$	$+6{,}25\pm0{,}01$	$^{19}_{9}\mathrm{F}\,(p,\,\alpha)\,^{16}_{8}\mathrm{O}$	$+8{,}06\pm0{,}04$
$^{3}_{2}\mathrm{He}\,(d,\,p)^{4}_{2}\mathrm{He}$	$+18{,}5\pm0{,}2$	$^{20}_{10}\mathrm{Ne}\,(d,\,p)^{21}_{10}\mathrm{Ne}$	$+4{,}50\pm0{,}09$
$^{6}_{3}\mathrm{Li}\,(n,\,\alpha)^{3}_{1}\mathrm{H}$	$+4{,}70\pm0{,}07$	$^{23}_{11}\mathrm{Na}\,(p,\,n)^{23}_{12}\mathrm{Mg}$	$-4{,}6\pm0{,}3$
$^{6}_{3}\mathrm{Li}\,(d,\,\alpha)^{4}_{2}\mathrm{He}$	$+22{,}20\pm0{,}04$	$^{23}_{11}\mathrm{Na}\,(d,\,\alpha)^{21}_{10}\mathrm{Ne}$	$+6{,}7\pm0{,}1$
$^{7}_{3}\mathrm{Li}\,(p,\,\alpha)^{4}_{2}\mathrm{He}$	$+17{,}28\pm0{,}03$	$^{24}_{12}\mathrm{Mg}\,(\gamma,\,n)^{23}_{12}\mathrm{Mg}$	$-16{,}4\pm0{,}3$
$^{9}_{4}\mathrm{Be}\,(p,\,\alpha)^{6}_{3}\mathrm{Li}$	$+2{,}12\pm0{,}01$	$^{25}_{12}\mathrm{Mg}\,(d,\,n)^{26}_{13}\mathrm{Al}$	$+5{,}6\pm0{,}1$
$^{9}_{4}\mathrm{Be}(\alpha_1,\,n)^{12}_{6}\,\mathrm{C}$	$+5{,}78$	$^{27}_{13}\mathrm{Al}\,(p,\,\alpha)^{24}_{12}\mathrm{Mg}$	$+1{,}58+0{,}01$
$^{10}_{5}\mathrm{B}(n,\,\alpha)^{7}_{3}\mathrm{Li}$	$+2{,}79\pm0{,}03$	$^{27}_{13}\mathrm{Al}\,(\alpha,\,n)^{30}_{15}\mathrm{P}$	$-2{,}9\pm0{,}2$
$^{11}_{5}\mathrm{B}\,(p,\,n)^{11}_{6}\mathrm{C}$	$-2{,}76\pm0{,}01$	$^{28}_{14}\mathrm{Si}\,(d,\,n)^{29}_{15}\mathrm{P}$	$-0{,}8\pm0{,}1$
$^{11}_{5}\mathrm{B}\,(p,\,\alpha)^{8}_{4}\mathrm{Be}$	$+8{,}6\pm0{,}1$	$^{31}_{15}\mathrm{P}\,(n,\,p)^{31}_{14}\mathrm{Si}$	$-0{,}9\pm0{,}1$
$^{13}_{6}\mathrm{C}\,(p,\,n)^{13}_{7}\mathrm{N}$	$-3{,}003\pm0{,}003$	$^{32}_{16}\mathrm{S}\,(n,\,p)^{32}_{15}\mathrm{P}$	$-0{,}9\pm0{,}1$
$^{13}_{6}\mathrm{C}\,(d,\,p)^{14}_{6}\mathrm{C}$	$+5{,}95\pm0{,}01$	$^{35}_{17}\mathrm{Cl}\,(n,\,p)^{35}_{16}\mathrm{S}$	$+0{,}52\pm0{,}4$
$^{14}_{7}\mathrm{N}\,(n,\,\gamma)^{15}_{7}\mathrm{N}$	$+10{,}82\pm0{,}01$	$^{37}_{17}\mathrm{Cl}\,(p,\,n)^{37}_{18}\mathrm{Ar}$	$-1{,}596\pm0{,}003$
$^{14}_{7}\mathrm{N}\,(d,\,\alpha)^{12}_{6}\mathrm{C}$	$+13{,}39\pm0{,}08$		
$^{15}_{7}\mathrm{N}\,(d,\,n)^{16}_{8}\mathrm{O}$	$+10{,}9\pm0{,}5$	$^{39}_{19}\mathrm{K}\,(d_1,\,p)^{40}_{19}\,\mathrm{K}$	$+5{,}48\mp0$

Продолжение

Реакция	Q (*Мэв*)	Реакция	Q (*Мэв*)
$^{48}_{22}\mathrm{Ti}(\alpha, p)^{51}_{23}\mathrm{V}$	$+1{,}1\pm0{,}5$	$^{81}_{35}\mathrm{Br}(\gamma, n)^{80}_{35}\mathrm{Br}$	$-10{,}3\pm0{,}2$
$^{51}_{23}\mathrm{V}(p, n)^{51}_{24}\mathrm{Cr}$	$-1{,}533\pm0{,}003$	$^{92}_{42}\mathrm{Mo}(\gamma, n)^{91}_{42}\mathrm{Mo}$	$-13{,}3\pm0{,}1$
$^{51}_{23}\mathrm{V}(d, p)^{52}_{23}\mathrm{V}$	$+7{,}8\pm0{,}3$	$^{113}_{48}\mathrm{Cd}(\gamma, n)^{112}_{48}\mathrm{Cd}$	$-6{,}4\pm0{,}1$
$^{50}_{24}\mathrm{Cr}(\gamma, n)^{49}_{24}\mathrm{Cr}$	$+5{,}48$	$^{120}_{50}\mathrm{Sn}(p, n)^{120}_{51}\mathrm{Sb}$	$-9{,}3\pm0{,}2$
$^{55}_{25}\mathrm{Mn}(p, n)^{55}_{26}\mathrm{Fe}$	$-5{,}0\pm0{,}2$	$^{121}_{51}\mathrm{Sb}(\gamma, n)^{120}_{51}\mathrm{Sb}$	$-9{,}3\pm0{,}2$
$^{54}_{26}\mathrm{Fe}(\gamma, n)^{53}_{26}\mathrm{Fe}$	$-13{,}4\pm0{,}2$	$^{197}_{79}\mathrm{Au}(\gamma, n)^{196}_{79}\mathrm{Au}$	$-8{,}0\pm0{,}1$
$^{59}_{27}\mathrm{Co}(d, p)^{60}_{27}\mathrm{Co}$	$-1{,}16\pm0{,}01$	$^{201}_{80}\mathrm{Hg}(\gamma, n)^{200}_{80}\mathrm{Hg}$	$-6{,}2\pm0{,}2$
$^{60}_{28}\mathrm{Ni}(p, n)^{60}_{29}\mathrm{Cu}$	$-13{,}8\pm2{,}0$	$^{207}_{82}\mathrm{Pb}(\gamma, n)^{206}_{82}\mathrm{Pb}$	$-6{,}9\pm0{,}2$
$^{65}_{29}\mathrm{Cu}(p, n)^{65}_{30}\mathrm{Zn}$	$-2{,}13\pm0{,}01$	$^{209}_{83}\mathrm{Bi}(\gamma, n)^{208}_{83}\mathrm{Bi}$	$-7{,}3\pm0{,}2$

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ТАБЛИЦЫ

1. Некоторые часто встречающиеся постоянные

Величина	n	$\lg n$	Величина	n	$\lg n$
π	3,14159	0,49715	e	2,71828	0,43429
2π	6,28319	0,79818	e^2	7,38906	0,86859
3π	9,42478	0,97427	$\sqrt{e}$	1,61872	0,21715
4π	12,56637	1,09921	$\sqrt[3]{e}$	1,39561	0,14476
6π	18,84956	1,27530	$1:e$	0,36788	$\bar{1}$,56571
$4\pi:3$	4,18879	0,62209	$1:e^2$	0,13533	$\bar{1}$,13141
$\pi:2$	1,57080	0,19612	$\sqrt{1:e}$	0,60653	$\bar{1}$,78285
$\pi:3$	1,04720	0,02003	$\sqrt[3]{1:e}$	0,71653	$\bar{1}$,85524
$\pi:4$	0,78540	$\bar{1}$,89509	$\lg e$	0,43429	$\bar{1}$,63778
$\pi:6$	0,52360	$\bar{1}$,71900	$\ln 10$	2,30258	0,36222
$\pi:180$	0,01745	$\bar{2}$,24188	$\ln \pi$	1,14473	0,05870
$2:\pi$	0,63662	$\bar{1}$,80388	g*)	9,81	0,99167
$180:\pi$	57,29578	1,75812	g^2	96,2361	1,98334
$10800:\pi$	3437,747	3,53627	$\sqrt{g}$	3,13209	0,49583
$648000:\pi$	206264,81	5,31443	$\sqrt{2g}$	4,42945	0,64635
$1:\pi$	0,31831	$\bar{1}$,50825	$1:g$	0,10194	$\bar{1}$,00833
$1:2\pi$	0,15916	$\bar{1}$,20182	$1:2g$	0,05097	$\bar{2}$,70730
$1:3\pi$	0,10610	$\bar{1}$,02573	$\pi\sqrt{g}$	9,83976	0,99298
$1:4\pi$	0,07958	$\bar{2}$,90079	$\pi\sqrt{2g}$	13,91552	1,14350
π^2	9,86960	0,99430	$2!$	2	
$2\pi^2$	19,73921	1,29533	$3!$	6	
$\sqrt{\pi}$	1,77245	0,24857	$4!$	24	
$\sqrt[3]{\pi}$	1,46459	0,16572	$5!$	120	
$1:\pi^2$	0,10132	$\bar{1}$,00570	$6!$	720	
$1:\sqrt{\pi}$	0,56419	$\bar{1}$,75143	$7!$	5040	
			$8!$	40320	
			$9!$	362880	
$\sqrt{2\pi}$	2,50663	0,39909	$10!$	3628800	
$\sqrt{\pi:2}$	1,25331	0,09806	$11!$	39916800	
$\sqrt{2:\pi}$	0,79788	$\bar{1}$,90194	$12!$	479001600	
			C**)	0,57722	1,76134

*) Здесь дано округленное значение g ($м/сек^2$) на уровне моря на широте 45—50°.

**) C — постоянная Эйлера.

2. Квадраты, кубы, корни, логарифмы, πn, $\frac{1}{4}\pi n^2$, обратные величины

n	n^2	n^3	$\sqrt{n}$	$\sqrt[3]{n}$	lg n	πn	$\frac{1}{4}\pi n^2$	$\frac{1}{n}$	n	n^2	n^3	$\sqrt{n}$	$\sqrt[3]{n}$	lg n	πn	$\frac{1}{4}\pi n^2$	$\frac{1}{n}$
1	1	1	1,000	1,000	0,000	3,142	0,785	1,000	31	961	29791	5,568	3,141	1,491	97,39	754,8	0,032
2	4	8	1,414	1,260	0,301	6,283	3,142	0,500	32	1024	32768	5,657	3,175	1,505	100,5	804,2	0,031
3	9	27	1,732	1,442	0,477	9,425	7,069	0,333	33	1089	35937	5,745	3,208	1,519	103,7	855,3	0,030
4	16	64	2,000	1,587	0,602	12,57	12,57	0,250	34	1156	39304	5,831	3,240	1,531	106,8	907,9	0,029
5	25	125	2,236	1,710	0,699	15,71	19,63	0,200	35	1225	42875	5,916	3,271	1,544	110,0	962,1	0,029
6	36	216	2,449	1,817	0,778	18,85	28,27	0,167	36	1296	46656	6,000	3,302	1,556	113,1	1018	0,028
7	49	343	2,646	1,913	0,845	21,99	38,18	0,143	37	1369	50653	6,083	3,332	1,568	116,2	1075	0,027
8	64	512	2,828	2,000	0,903	25,13	50,27	0,125	38	1444	54872	6,164	3,362	1,580	119,4	1134	0,026
9	81	729	3,000	2,080	0,954	28,27	63,62	0,111	39	1521	59319	6,245	3,391	1,591	122,5	1195	0,026
10	100	1000	3,162	2,154	1,000	31,42	78,54	0,100	**40**	1600	64000	6,325	3,420	1,602	125,7	1257	0,025
11	121	1331	3,317	2,224	1,041	34,56	95,03	0,091	41	1681	68921	6,403	3,448	1,613	128,8	1320	0,024
12	144	1728	3,464	2,289	1,079	37,70	113,1	0,083	42	1764	74088	6,481	3,476	1,623	131,9	1385	0,024
13	169	2197	3,606	2,351	1,114	40,84	132,7	0,077	43	1849	79507	6,557	3,503	1,633	135,1	1452	0,023
14	196	2744	3,742	2,410	1,146	43,98	153,9	0,071	44	1936	85184	6,633	3,530	1,643	138,2	1521	0,023
15	225	3375	3,873	2,466	1,176	47,12	176,7	0,067	45	2025	91125	6,708	3,557	1,653	141,4	1590	0,022
16	256	4096	4,000	2,520	1,204	50,27	201,1	0,062	46	2116	97336	6,782	3,583	1,663	144,5	1662	0,022
17	289	4913	4,123	2,571	1,230	53,41	227,0	0,059	47	2209	103823	6,856	3,609	1,672	147,7	1735	0,021
18	324	5832	4,243	2,621	1,255	56,55	254,5	0,056	48	2304	110592	6,928	3,634	1,681	150,8	1810	0,021
19	361	6859	4,359	2,668	1,279	59,69	283,5	0,053	49	2401	117649	7,000	3,659	1,690	153,9	1886	0,020
20	400	8000	4,472	2,714	1,301	62,83	314,2	0,050	**50**	2500	125000	7,071	3,684	1,699	157,1	1963	0,020
21	441	9261	4,583	2,759	1,322	65,97	346,4	0,048	51	2601	132651	7,141	3,708	1,708	160,2	2043	0,020
22	484	10648	4,690	2,802	1,342	69,12	380,1	0,045	52	2704	140608	7,211	3,733	1,716	163,4	2124	0,019
23	529	12167	4,796	2,844	1,362	72,26	415,5	0,043	53	2809	148877	7,280	3,756	1,724	166,5	2206	0,019
24	576	13824	4,899	2,884	1,380	75,40	452,4	0,042	54	2916	157464	7,348	3,780	1,732	169,7	2290	0,019
25	625	15625	5,000	2,924	1,398	78,54	490,9	0,010	55	3025	166375	7,416	3,803	1,740	172,8	2376	0,018
26	676	17576	5,099	2,962	1,415	81,68	530,9	0,038	56	3136	175616	7,483	3,826	1,748	175,9	2463	0,018
27	729	19683	5,196	3,000	1,431	84,82	572,6	0,037	57	3249	185193	7,550	3,849	1,756	179,1	2552	0,018
28	784	21952	5,292	3,037	1,447	87,97	615,8	0,036	58	3364	195112	7,616	3,871	1,763	182,2	2642	0,017
29	841	24389	5,385	3,072	1,462	91,11	660,5	0,034	59	3481	205379	7,681	3,893	1,771	185,4	2734	0,017
30	900	27000	5,477	3,107	1,477	94,25	706,9	0,033	**60**	3600	216000	7,746	3,915	1,778	188,5	2827	0,017

n	n^2	n^3	$\sqrt{n}$	$\sqrt[3]{n}$	$\lg n$	πn	$\frac{1}{4}\pi n^2$	$\frac{1}{n}$	n	n^2	n^3	$\sqrt{n}$	$\sqrt[3]{n}$	$\lg n$	πn	$\frac{1}{4}\pi n^2$	$\frac{1}{n}$
61	3721	226981	7,810	3,936	1,785	191,6	2922	0,0164	91	8281	753571	9,539	4,498	1,959	285,9	6504	0,0110
62	3844	238328	7,874	3,958	1,792	194,8	3019	0,0161	92	8464	778688	9,592	4,514	1,964	289,0	6648	0,0109
63	3969	250047	7,937	3,979	1,799	197,9	3117	0,0159	93	8649	804357	9,644	4,531	1,968	292,2	6793	0,0108
64	4096	262144	8,000	4,000	1,806	201,1	3217	0,0156	94	8836	830584	9,695	4,547	1,973	295,3	6940	0,0106
65	4225	274625	8,062	4,021	1,813	204,2	3318	0,0154	95	9025	857375	9,747	4,563	1,978	298,5	7088	0,0105
66	4356	287496	8,124	4,041	1,820	207,4	3421	0,0152	96	9216	884736	9,798	4,579	1,982	301,6	7238	0,0104
67	4489	300763	8,185	4,062	1,826	210,5	3526	0,0149	97	9409	912673	9,849	4,595	1,987	304,7	7390	0,0103
68	4624	314432	8,246	4,082	1,833	213,6	3632	0,0147	98	9604	941192	9,899	4,610	1,991	307,9	7543	0,0102
69	4761	328509	8,307	4,102	1,839	216,8	3739	0,0145	99	9801	970299	9,950	4,626	1,996	311,0	7698	0,0101
70	4900	343000	8,367	4,121	1,845	219,9	3848	0,0143	**100**	$n^2:10$	$n^3:1000$	10,00	4,642	2,000	314,2	7854	0,0100
71	5041	357911	8,426	4,141	1,851	223,1	3959	0,0141	101	1020	1030	10,05	4,657	2,004	317,3	8012	0,0099
72	5184	373248	8,485	4,160	1,857	226,2	4072	0,0139	102	1040	1061	10,10	4,672	2,009	320,4	8171	0,0098
73	5329	389017	8,544	4,179	1,863	229,3	4185	0,0137	103	1061	1093	10,15	4,688	2,013	323,6	8332	0,0097
74	5476	405224	8,602	4,198	1,869	232,5	4301	0,0135	104	1082	1125	10,20	4,703	2,017	326,7	8495	0,0096
75	5625	421875	8,660	4,217	1,875	235,6	4418	0,0133	105	1102	1158	10,25	4,718	2,021	329,9	8659	0,0095
76	5776	438976	8,718	4,236	1,881	238,8	4536	0,0132	106	1124	1191	10,30	4,733	2,025	333,0	8825	0,0094
77	5929	456533	8,775	4,254	1,886	241,9	4657	0,0130	107	1145	1225	10,34	4,747	2,029	336,2	8992	0,0093
78	6084	474552	8,832	4,273	1,892	245,0	4778	0,0128	108	1166	1260	10,39	4,762	2,033	339,3	9161	0,0093
79	6241	493039	8,888	4,291	1,898	248,2	4902	0,0127	109	1188	1295	10,44	4,777	2,037	342,4	9331	0,0092
80	6400	512000	8,944	4,309	1,903	251,3	5027	0,0125	**110**	1210	1331	10,49	4,791	2,041	345,6	9503	0,0091
81	6561	531441	9,000	4,327	1,908	254,5	5153	0,0123	111	1232	1368	10,54	4,806	2,045	348,7	9677	0,0090
82	6724	551368	9,055	4,344	1,914	257,6	5281	0,0122	112	1254	1405	10,58	4,820	2,049	351,9	9852	0,0089
83	6889	571787	9,110	4,362	1,919	260,8	5411	0,0120	113	1277	1443	10,63	4,835	2,053	355,0	10029	0,0088
84	7056	592704	9,165	4,380	1,924	263,9	5542	0,0119	114	1300	1482	10,68	4,849	2,057	358,1	10207	0,0088
85	7225	614125	9,220	4,397	1,929	267,0	5675	0,0118	115	1322	1521	10,72	4,863	2,061	361,3	10387	0,0087
86	7396	636056	9,274	4,414	1,940	270,2	5809	0,0116	116	1346	1561	10,77	4,877	2,064	364,4	10568	0,0086
87	7569	658503	9,327	4,431	1,939	273,3	5945	0,0115	117	1369	1602	10,82	4,891	2,068	367,6	10751	0,0085
88	7744	681472	9,381	4,448	1,944	276,5	6082	0,0114	118	1392	1643	10,86	4,905	2,072	370,7	10936	0,0085
89	7921	704969	9,434	4,465	1,949	279,6	6221	0,0112	119	1416	1685	10,91	4,919	2,076	373,8	11122	0,0084
90	8100	729000	9,487	4,481	1,954	282,7	6362	0,0111	**120**	1440	1728	10,95	4,932	2,079	377,0	11310	0,0083

Квадраты, кубы, корни, логарифмы, πn, $\frac{1}{4}\pi n^2$, обратные величины *Продолжение*

n	$\frac{n^2}{10}$	$\frac{n^3}{1000}$	$\sqrt{n}$	$\sqrt[3]{n}$	$\lg n$	πn	$\frac{\frac{1}{4}\pi n^2}{10}$	$\frac{1}{n}$	n	$\frac{n^2}{10}$	$\frac{n^3}{1000}$	$\sqrt{n}$	$\sqrt[3]{n}$	$\lg n$	πn	$\frac{\frac{1}{4}\pi n^2}{10}$	$\frac{1}{n}$
121	1461	1772	11,00	4,946	2,083	380,1	1150	0,0083	151	2280	3443	12,29	5,325	2,179	474,4	1791	0,0066
122	1488	1816	11,05	4,960	2,086	383,3	1169	0,0082	152	2310	3512	12,33	5,337	2,182	477,5	1815	0,0066
123	1513	1861	11,09	4,973	2,090	386,4	1188	0,0081	153	2341	3582	12,37	5,348	2,185	480,7	1839	0,0065
124	1538	1907	11,14	4,987	2,093	389,6	1208	0,0081	154	2372	3652	12,41	5,360	2,188	483,8	1863	0,0065
125	1562	1953	11,18	5,000	2,097	392,7	1227	0,0080	155	2402	3724	12,45	5,372	2,190	486,9	1887	0,0065
126	1588	2000	11,22	5,013	2,100	395,8	1247	0,0079	156	2434	3796	12,49	5,383	2,193	490,1	1911	0,0064
127	1613	2048	11,27	5,027	2,104	399,0	1267	0,0079	157	2465	3870	12,53	5,395	2,196	493,2	1936	0,0064
128	1638	2097	11,31	5,040	2,107	402,1	1287	0,0078	158	2496	3944	12,57	5,406	2,199	496,4	1961	0,0063
129	1664	2147	11,36	5,053	2,111	405,3	1307	0,0078	159	2528	4020	12,61	5,418	2,201	499,5	1986	0,0063
130	1690	2197	11,40	5,066	2,114	408,4	1327	0,0077	**160**	2560	4096	12,65	5,429	2,204	502,7	2011	0,0062
131	1716	2248	11,45	5,079	2,117	411,5	1348	0,0076	161	2592	4173	12,69	5,440	2,207	505,8	2036	0,0062
132	1742	2300	11,49	5,092	2,121	414,7	1368	0,0076	162	2624	4252	12,73	5,451	2,210	508,9	2061	0,0062
133	1769	2353	11,53	5,104	2,124	417,8	1389	0,0075	163	2657	4331	12,77	5,463	2,212	512,1	2087	0,0061
134	1796	2406	11,58	5,117	2,127	421,0	1410	0,0075	164	2690	4411	12,81	5,474	2,215	515,2	2112	0,0061
135	1822	2460	11,62	5,130	2,130	424,1	1431	0,0074	165	2722	4492	12,85	5,485	2,217	518,4	2138	0,0061
136	1850	2515	11,66	5,143	2,134	427,3	1453	0,0074	166	2756	4574	12,88	5,496	2,220	521,5	2164	0,0060
137	1877	2571	11,70	5,155	2,137	430,4	1474	0,0073	167	2789	4657	12,92	5,507	2,223	524,6	2190	0,0060
138	1904	2628	11,75	5,168	2,140	433,5	1496	0,0072	168	2822	4742	12,96	5,518	2,225	527,8	2217	0,0060
139	1932	2686	11,79	5,180	2,143	436,7	1517	0,0072	169	2856	4827	13,00	5,529	2,228	530,9	2243	0,0059
140	1960	2744	11,83	5,192	2,146	439,8	1539	0,0071	**170**	2890	4913	13,04	5,540	2,230	534,1	2270	0,0059
141	1988	2803	11,87	5,205	2,149	443,0	1561	0,0071	171	2924	5000	13,08	5,550	2,233	537,2	2297	0,0058
142	2016	2863	11,92	5,217	2,152	446,1	1584	0,0070	172	2958	5088	13,11	5,561	2,236	540,4	2324	0,0058
143	2045	2924	11,96	5,229	2,155	449,2	1606	0,0070	173	2993	5178	13,15	5,572	2,238	543,5	2351	0,0058
144	2074	2986	12,00	5,241	2,158	452,4	1629	0,0069	174	3028	5268	13,19	5,583	2,241	546,6	2378	0,0057
145	2102	3049	12,04	5,254	2,161	455,5	1651	0,0069	175	3062	5359	13,23	5,593	2,243	549,8	2405	0,0057
146	2132	3112	12,08	5,266	2,164	458,7	1674	0,0068	176	3098	5452	13,27	5,604	2,246	552,9	2433	0,0057
147	2161	3177	12,12	5,278	2,167	461,8	1697	0,0068	177	3133	5545	13,30	5,615	2,248	556,1	2461	0,0056
148	2190	3242	12,17	5,290	2,170	465,0	1720	0,0068	178	3168	5640	13,34	5,625	2,250	559,2	2488	0,0056
149	2220	3308	12,21	5,301	2,173	468,1	1744	0,0067	179	3204	5735	13,38	5,636	2,253	562,3	2516	0,0056
150	2250	3375	12,25	5,313	2,176	471,2	1767	0,0067	**180**	3240	5832	13,42	5,646	2,255	565,5	2545	0,0056

n	$\frac{n^2}{10}$	$\frac{n^3}{1000}$	$\sqrt{n}$	$\sqrt[3]{n}$	$\lg n$	πn	$\frac{\frac{1}{4}\pi n^2}{10}$	$\frac{1}{[n]}$	n	$\frac{n^2}{10}$	$\frac{n^3}{10000}$	$\sqrt{n}$	$\sqrt[3]{n}$	$\lg n$	πn	$\frac{\frac{1}{4}\pi n^2}{10}$	$\cdot\frac{1}{n}$
181	3276	5930	13,45	5,657	2,258	568,6	2573	0,0055	211	4452	939	14,53	5,953	2,324	662,9	3497	0,0048
182	3312	6029	13,49	5,667	2,260	571,8	2602	0,0055	212	4494	953	14,56	5,963	2,326	666,0	3530	0,0047
183	3348	6128	13,53	5,677	2,262	574,9	2630	0,0055	213	4537	966	14,59	5,972	2,328	669,2	3563	0,0047
184	3386	6230	13,56	5,688	2,265	578,1	2659	0,0054	214	4580	980	14,63	5,981	2,330	672,3	3597	0,0047
185	3422	6332	13,60	5,698	2,267	581,2	2688	0,0054	215	4622	994	14,66	5,991	2,332	675,4	3631	0,0047
186	3460	6435	13,64	5,708	2,270	584,3	2717	0,0054	216	4666	1008	14,70	6,000	2,334	678,6	3664	0,0046
187	3497	6539	13,67	5,718	2,272	587,5	2746	0,0053	217	4709	1022	14,73	6,009	2,336	681,7	3698	0,0046
188	3534	6645	13,71	5,729	2,274	590,6	2776	0,0053	218	4752	1036	14,76	6,018	2,338	684,9	3733	0,0046
189	3572	6751	13,75	5,739	2,276	593,8	2806	0,0053	219	4796	1050	14,80	6,028	2,340	688,0	3767	0,0046
190	3610	6859	13,78	5,749	2,279	596,9	2835	0,0053	**220**	4840	1065	14,83	6,037	2,342	691,2	3801	0,0045
191	3648	6968	13,82	5,759	2,281	600,0	2865	0,0052	221	4884	1079	14,87	6,046	2,344	694,3	3836	0,0045
192	3686	7078	13,86	5,769	2,283	603,2	2895	0,0052	222	4928	1094	14,90	6,055	2,346	697,4	3871	0,0045
193	3725	7189	13,89	5,779	2,286	606,3	2926	0,0052	223	4973	1109	14,93	6,064	2,348	700,6	3906	0,0045
194	3764	7301	13,93	5,789	2,288	609,5	2956	0,0052	224	5018	1124	14,97	6,073	2,350	703,7	3941	0,0045
195	3802	7415	13,96	5,799	2,290	612,6	2986	0,0051	225	5062	1139	15,00	6,082	2,352	706,9	3976	0,0044
196	3842	7530	14,00	5,809	2,292	615,8	3017	0,0051	226	5108	1154	15,03	6,091	2,354	710,0	4011	0,0044
197	3881	7645	14,04	5,819	2,294	618,9	3048	0,0051	227	5153	1170	15,07	6,100	2,356	713,1	4047	0,0044
198	3920	7762	14,07	5,828	2,297	622,0	3079	0,0051	228	5198	1185	15,10	6,109	2,358	716,3	4083	0,0044
199	3960	7881	14,11	5,838	2,299	625,2	3110	0,0050	229	5244	1201	15,13	6,118	2,360	719,4	4119	0,0044
200	4000	8000	14,14	5,848	2,301	628,3	3142	0,0050	**230**	5290	1217	15,17	6,127	2,362	722,6	4155	0,0043
201	4040	8121	14,18	5,858	2,303	631,5	3173	0,0050	231	5336	1233	15,20	6,136	2,364	725,7	4191	0,0043
202	4080	8242	14,21	5,867	2,305	634,6	3205	0,0050	232	5382	1249	15,23	6,145	2,365	728,8	4227	0,0043
203	4121	8365	14,25	5,877	2,307	637,7	3237	0,0049	233	5429	1265	15,26	6,153	2,367	732,0	4264	0,0043
204	4162	8490	14,28	5,887	2,310	640,9	3269	0,0049	234	5476	1281	15,30	6,162	2,369	735,1	4301	0,0043
205	4202	8615	14,32	5,896	2,312	644,0	3301	0,0049	235	5522	1298	15,33	6,171	2,371	738,3	4337	0,0043
206	4244	8742	14,35	5,906	2,314	647,2	3333	0,0049	236	5570	1314	15,36	6,180	2,373	741,4	4374	0,0042
207	4285	8870	14,39	5,916	2,316	650,3	3365	0,0048	237	5617	1331	15,39	6,188	2,375	744,6	4412	0,0042
208	4326	8999	14,42	5,925	2,318	653,5	3398	0,0048	238	5664	1348	15,43	6,197	2,377	747,7	4449	0,0042
209	4368	9129	14,46	5,934	2,320	656,6	3431	0,0048	239	5712	1365	15,46	6,206	2,378	750,8	4486	0,0042
210	4410	9261	14,49	5,944	2,322	659,7	3464	0,0048	**240**	5760	1382	15,49	6,214	2,380	754,0	4524	0,0042

Квадраты, кубы, корни, логарифмы, πn, $\frac{1}{4}\pi n^2$, обратные величины *Продолжение*

n	$\frac{n^2}{10}$	$\frac{n^3}{10000}$	$\sqrt{n}$	$\sqrt[3]{n}$	$\lg n$	πn	$\frac{\frac{1}{4}\pi n^2}{10}$	$\frac{1}{n}$	n	$\frac{n^2}{10}$	$\frac{n^3}{10000}$	$\sqrt{n}$	$\sqrt[3]{n}$	$\lg n$	πn	$\frac{\frac{1}{4}\pi n^2}{10}$	$\frac{1}{n}$
241	5808	1400	15,52	6,223	2,382	757,1	4562	0,0041	271	7344	1990	16,46	6,471	2,433	851,4	5768	0,0037
242	5856	1417	15,56	6,232	2,384	760,3	4600	0,0041	272	7398	2012	16,49	6,479	2,435	854,5	5811	0,0037
243	5905	1435	15,59	6,240	2,386	763,4	4638	0,0041	273	7453	2035	16,52	6,487	2,436	857,7	5853	0,0037
244	5954	1453	15,62	6,249	2,387	766,5	4676	0,0041	274	7508	2057	16,55	6,495	2,438	860,8	5896	0,0036
245	6002	1471	15,65	6,257	2,389	769,7	4714	0,0041	275	7562	2080	16,58	6,503	2,439	863,9	5940	0,0036
246	6052	1489	15,68	6,266	2,391	772,8	4753	0,0041	276	7618	2102	16,61	6,511	2,441	867,1	5983	0,0036
247	6101	1507	15,72	6,274	2,393	776,0	4792	0,0040	277	7673	2125	16,64	6,519	2,442	870,2	6026	0,0036
248	6150	1525	15,75	6,283	2,394	779,1	4831	0,0040	278	7728	2148	16,67	6,527	2,444	873,4	6070	0,0036
249	6200	1544	15,78	6,291	2,396	782,3	4870	0,0040	279	7784	2172	16,70	6,534	2,446	876,5	6114	0,0036
250	6250	1562	15,81	6,300	2,398	785,4	4909	0,0040	**280**	7840	2195	16,73	6,542	2,447	879,6	6158	0,0036
251	6300	1581	15,84	6,308	2,400	788,5	4948	0,0040	281	7896	2219	16,76	6,550	2,449	882,8	6202	0,0036
252	6350	1600	15,87	6,316	2,401	791,7	4988	0,0040	282	7952	2243	16,79	6,558	2,450	885,9	6246	0,0035
253	6401	1619	15,91	6,325	2,403	794,8	5027	0,0040	283	8009	2267	16,82	6,565	2,452	889,1	6290	0,0035
254	6452	1639	15,94	6,333	2,405	798,0	5067	0,0039	284	8066	2291	16,85	6,573	2,453	892,2	6335	0,0035
255	6502	1658	15,97	6,341	2,407	801,1	5107	0,0039	285	8122	2315	16,88	6,581	2,455	895,4	6379	0,0035
256	6554	1678	16,00	6,350	2,408	804,2	5147	0,0039	286	8180	2339	16,91	6,589	2,456	898,5	6424	0,0035
257	6605	1697	16,03	6,358	2,410	807,4	5187	0,0039	287	8237	2364	16,94	6,596	2,458	901,6	6469	0,0035
258	6656	1717	16,06	6,366	2,412	810,5	5228	0,0039	288	8294	2389	16,97	6,604	2,459	904,8	6514	0,0035
259	6708	1737	16,09	6,374	2,413	813,7	5269	0,0039	289	8352	2414	17,00	6,611	2,461	907,9	6560	0,0035
260	6760	1758	16,12	6,383	2,415	816,8	5309	0,0038	**290**	8410	2439	17,03	6,619	2,462	911,1	6605	0,0034
261	6812	1778	16,16	6,391	2,417	820,0	5350	0,0038	291	8468	2464	17,06	6,627	2,464	914,2	6651	0,0034
262	6864	1798	16,19	6,399	2,418	823,1	5391	0,0038	292	8526	2490	17,09	6,634	2,465	917,3	6697	0,0034
263	6917	1819	16,22	6,407	2,420	826,2	5433	0,0038	293	8585	2515	17,12	6,642	2,467	920,5	6743	0,0034
264	6970	1840	16,25	6,415	2,422	829,4	5474	0,0038	294	8644	2541	17,15	6,649	2,468	923,6	6789	0,0034
265	7022	1861	16,28	6,423	2,423	832,5	5515	0,0038	295	8702	2567	17,18	6,657	2,470	926,8	6835	0,0034
266	7076	1882	16,31	6,431	2,425	835,7	5557	0,0038	296	8762	2593	17,20	6,664	2,471	929,9	6881	0,0034
267	7129	1903	16,34	6,439	2,427	838,8	5599	0,0037	297	8821	2620	17,23	6,672	2,473	933,1	6928	0,0034
268	7182	1925	16,37	6,447	2,428	841,9	5641	0,0037	298	8880	2646	17,26	6,679	2,474	936,2	6975	0,0034
269	7236	1947	16,40	6,455	2,430	845,1	5683	0,0037	299	8940	2673	17,29	6,687	2,476	939,3	7022	0,0033
270	7290	1968	16,43	6,463	2,431	848,2	5726	0,0037	**300**	9000	2700	17,32	6,694	2,477	942,5	7069	0,0033

n	$\frac{n^2}{10}$	$\frac{n^3}{10000}$	$\sqrt{n}$	$\sqrt[3]{n}$	$\lg n$	πn	$\frac{\frac{1}{4}\pi n^2}{10}$	$\frac{1}{n}$	n	$\frac{n^2}{100}$	$\frac{n^3}{10000}$	$\sqrt{n}$	$\sqrt[3]{n}$	$\lg n$	πn	$\frac{\frac{1}{4}\pi n^2}{10}$	$\frac{1}{n}$
301	9060	2727	17,35	6,702	2,479	945,6	7116	0,00332	331	1096	3626	18,19	6,917	2,520	1040	8605	0,00302
302	9120	2754	17,38	6,709	2,480	948,8	7163	0,00331	332	1102	3659	18,22	6,924	2,521	1043	8657	0,00301
303	9181	2782	17,41	6,717	2,481	951,9	7211	0,00330	333	1109	3693	18,25	6,931	2,522	1046	8709	0,00300
304	9242	2809	17,44	6,724	2,483	955,0	7258	0,00329	334	1116	3726	18,28	6,938	2,524	1049	8762	0,00299
305	9302	2837	17,46	6,731	2,484	958,2	7306	0,00328	335	1122	3760	18,30	6,945	2,525	1052	8814	0,00299
306	9364	2865	17,49	6,739	2,486	961,3	7354	0,00327	336	1129	3793	18,33	6,952	2,526	1056	8867	0,00298
307	9425	2893	17,52	6,746	2,487	964,5	7402	0,00326	337	1136	3827	18,36	6,959	2,528	1059	8920	0,00297
308	9486	2922	17,55	6,753	2,489	967,6	7451	0,00325	338	1142	3861	18,38	6,966	2,529	1062	8973	0,00296
309	9548	2950	17,58	6,761	2,490	970,8	7499	0,00324	339	1149	3896	18,41	6,973	2,530	1065	9026	0,00295
310	9610	2979	17,61	6,768	2,491	973,9	7548	0,00323	**340**	1156	3930	18,44	6,980	2,531	1068	9079	0,00294
311	9672	3008	17,64	6,775	2,493	977,0	7596	0,00322	341	1163	3965	18,47	6,986	2,533	1071	9133	0,00293
312	9734	3037	17,66	6,782	2,494	980,2	7645	0,00321	342	1170	4000	18,49	6,993	2,534	1074	9186	0,00292
313	9797	3066	17,69	6,790	2,496	983,3	7694	0,00319	343	1176	4035	18,52	7,000	2,535	1078	9240	0,00292
314	9860	3096	17,72	6,797	2,497	986,5	7744	0,00318	344	1183	4071	18,55	7,007	2,537	1081	9294	0,00291
315	9922	3126	17,75	6,804	2,498	989,6	7793	0,00317	345	1190	4106	18,57	7,014	2,538	1084	9348	0,00290
316	9986	3155	17,78	6,811	2,500	992,7	7843	0,00316	346	1197	4142	18,60	7,020	2,539	1087	9102	0,00289
317	10049	3186	17,80	6,818	2,501	995,9	7892	0,00315	347	1204	4178	18,63	7,027	2,540	1090	9157	0,00288
318	10112	3216	17,83	6,826	2,502	999,0	7942	0,00314	348	1211	4214	18,65	7,034	2,542	1093	9511	0,00287
319	10176	3246	17,86	6,833	2,504	1002	7992	0,00313	349	1218	4251	18,68	7,041	2,543	1096	9566	0,00287
320	10240	3277	17,89	6,840	2,505	1005	8042	0,00312	350	1225	4287	18,71	7,047	2,544	1100	9621	0,00286
321	10304	3308	17,92	6,847	2,507	1008	8093	0,00312	351	1232	4324	18,73	7,054	2,545	1103	9676	0,00285
322	10368	3339	17,94	6,854	2,508	1012	8143	0,00311	352	1239	4361	18,76	7,061	2,547	1106	9731	0,00284
323	10433	3370	17,97	6,861	2,509	1015	8194	0,00310	353	1246	4399	18,79	7,067	2,548	1109	9787	0,00283
324	10498	3401	18,00	6,868	2,511	1018	8245	0,00309	354	1253	4436	18,81	7,074	2,549	1112	9842	0,00282
325	10562	3433	18,03	6,875	2,512	1021	8296	0,00308	355	1260	4474	18,84	7,081	2,550	1115	9898	0,00282
326	10628	3465	18,06	6,882	2,513	1024	8347	0,00307	356	1267	4512	18,87	7,087	2,551	1118	9954	0,00281
327	10693	3497	18,08	6,889	2,515	1027	8398	0,00306	357	1274	4550	18,89	7,094	2,553	1122	10010	0,00280
328	10758	3529	18,11	6,896	2,516	1030	8450	0,00305	358	1282	4588	18,92	7,101	2,554	1125	10066	0,00279
329	10824	3561	18,14	6,903	2,517	1034	8501	0,00304	359	1289	4627	18,95	7,107	2,556	1128	10122	0,00279
330	10890	3594	18,17	6,910	2,519	1037	8553	0,00303	**360**	1296	4666	18,97	7,114	2,556	1131	10179	0,00278

Квадраты, кубы, корни, логарифмы, πn, $\frac{1}{4}\pi n^2$, обратные величины

Продолжение

n	$\frac{n^2}{100}$	$\frac{n^3}{10000}$	$\sqrt{n}$	$\sqrt[3]{n}$	$\lg n$	πn	$\frac{\frac{1}{4}\pi n^2}{100}$	$\frac{1}{n}$	n	$\frac{n^2}{100}$	$\frac{n^3}{10000}$	$\sqrt{n}$	$\sqrt[3]{n}$	$\lg n$	πn	$\frac{\frac{1}{4}\pi n^2}{100}$	$\frac{1}{n}$
361	1303	4706	19,00	7,120	2,558	1134	1024	0,00277	391	1529	5978	19,77	7,312	2,592	1228	1201	0,00256
362	1310	4744	19,03	7,127	2,559	1137	1029	0,00276	392	1537	6024	19,80	7,319	2,593	1232	1207	0,00255
363	1318	4783	19,05	7,133	2,560	1140	1035	0,00275	393	1544	6070	19,82	7,325	2,594	1235	1213	0,00254
364	1325	4823	19,08	7,140	2,561	1144	1041	0,00275	394	1552	6116	19,85	7,331	2,595	1238	1219	0,00254
365	1332	4863	19,10	7,147	2,562	1147	1046	0,00274	395	1560	6163	19,87	7,337	2,597	1241	1225	0,00253
366	1340	4903	19,13	7,153	2,563	1150	1052	0,00273	396	1568	6210	19,90	7,343	2,598	1244	1232	0,00253
367	1347	4943	19,16	7,160	2,565	1153	1058	0,00272	397	1576	6257	19,92	7,350	2,599	1247	1238	0,00252
368	1354	4984	19,18	7,166	2,566	1156	1064	0,00272	398	1584	6304	19,95	7,356	2,600	1250	1244	0,00251
369	1362	5024	19,21	7,173	2,567	1159	1069	0,00271	399	1592	6352	19,97	7,362	2,601	1253	1250	0,00251
370	1369	5065	19,24	7,179	2,568	1162	1075	0,00270	**400**	1600	6400	20,00	7,368	2,602	1257	1257	0,00250
371	1376	5106	19,26	7,186	2,569	1166	1081	0,00270	401	1608	6448	20,02	7,374	2,603	1260	1263	0,00249
372	1384	5148	19,29	7,192	2,571	1169	1087	0,00269	402	1616	6496	20,05	7,380	2,604	1263	1269	0,00249
373	1391	5190	19,31	7,198	2,572	1172	1093	0,00268	403	1624	6545	20,07	7,386	2,605	1266	1276	0,00248
374	1399	5231	19,34	7,205	2,573	1175	1099	0,00267	404	1632	6594	20,10	7,393	2,606	1269	1282	0,00248
375	1406	5273	19,36	7,211	2,574	1178	1104	0,00267	405	1640	6643	20,12	7,399	2,607	1272	1288	0,00247
376	1414	5316	19,39	7,218	2,575	1181	1110	0,00266	406	1648	6692	20,15	7,405	2,609	1275	1295	0,00246
377	1421	5358	19,42	7,224	2,576	1184	1116	0,00265	407	1656	6742	20,17	7,411	2,610	1279	1301	0,00246
378	1429	5401	19,44	7,230	2,577	1188	1122	0,00265	408	1665	6792	20,20	7,417	2,611	1282	1307	0,00245
379	1436	5444	19,47	7,237	2,579	1191	1128	0,00264	409	1673	6842	20,22	7,423	2,612	1285	1314	0,00244
380	1444	5487	19,49	7,243	2,580	1194	1134	0,00263	**410**	1681	6892	20,25	7,429	2,613	1288	1320	0,00244
381	1452	5531	19,52	7,250	2,581	1197	1140	0,00262	411	1689	6943	20,27	7,435	2,614	1291	1327	0,00243
382	1459	5574	19,54	7,256	2,582	1200	1146	0,00262	412	1697	6993	20,30	7,441	2,615	1294	1333	0,00243
383	1467	5618	19,57	7,262	2,583	1203	1152	0,00261	413	1706	7044	20,32	7,447	2,616	1297	1340	0,00242
384	1475	5662	19,60	7,268	2,584	1206	1158	0,00260	414	1714	7096	20,35	7,453	2,617	1301	1346	0,00242
385	1482	5707	19,62	7,275	2,585	1210	1164	0,00260	415	1722	7147	20,37	7,459	2,618	1304	1353	0,00241
386	1490	5751	19,65	7,281	2,587	1213	1170	0,00259	416	1731	7199	20,40	7,465	2,619	1307	1359	0,00240
387	1498	5796	19,67	7,287	2,588	1216	1176	0,00258	417	1739	7251	20,42	7,471	2,620	1310	1366	0,00240
388	1505	5841	19,70	7,294	2,589	1219	1182	0,00258	418	1747	7303	20,45	7,477	2,621	1313	1372	0,00239
389	1513	5886	19,72	7,300	2,590	1222	1188	0,00257	419	1756	7356	20,47	7,483	2,622	1316	1379	0,00239
390	1521	5932	19,75	7,306	2,591	1225	1195	0,00256	**420**	1764	7409	20,49	7,489	2,623	1319	1385	0,00238

n	$\frac{n^2}{100}$	$\frac{n^3}{10000}$	$\sqrt{n}$	$\sqrt[3]{n}$	$\lg n$	πn	$\frac{\frac{1}{4}\pi n^2}{100}$	$\frac{1}{n}$	n	$\frac{n^2}{100}$	$\frac{n^3}{100000}$	$\sqrt{n}$	$\sqrt[3]{n}$	$\lg n$	πn	$\frac{\frac{1}{4}\pi n^2}{100}$	$\frac{1}{n}$
421	1772	7462	20,52	7,495	2,624	1323	1392	0,00238	451	2034	9173	21,24	7,669	2,654	1417	1598	0,00222
422	1781	7515	20,54	7,501	2,625	1326	1399	0,00237	452	2043	9235	21,26	7,674	2,655	1420	1605	0,00221
423	1789	7569	20,57	7,507	2,626	1329	1405	0,00236	453	2052	9296	21,28	7,680	2,656	1423	1612	0,00221
424	1798	7623	20,59	7,513	2,627	1332	1412	0,00236	454	2061	9358	21,31	7,686	2,657	1426	1619	0,00220
425	1806	7677	20,62	7,518	2,628	1335	1419	0,00235	455	2070	9420	21,33	7,691	2,658	1429	1626	0,00220
426	1815	7731	20,64	7,524	2,629	1338	1425	0,00235	456	2079	9482	21,35	7,697	2,659	1433	1633	0,00219
427	1823	7785	20,66	7,530	2,630	1341	1432	0,00234	457	2088	9544	21,38	7,703	2,660	1436	1640	0,00219
428	1832	7840	20,69	7,536	2,631	1345	1439	0,00234	458	2098	9607	21,40	7,708	2,661	1439	1647	0,00218
429	1840	7895	20,71	7,542	2,632	1348	1445	0,00233	459	2107	9670	21,42	7,714	2,662	1442	1655	0,00218
430	1849	7951	20,74	7,548	2,633	1351	1452	0,00233	**460**	2116	9734	21,45	7,719	2,663	1445	1662	0,00217
431	1858	8006	20,76	7,554	2,634	1354	1459	0,00232	461	2125	9797	21,47	7,725	2,664	1448	1669	0,00217
432	1866	8062	20,78	7,560	2,635	1357	1466	0,00231	462	2134	9861	21,49	7,731	2,665	1451	1676	0,00216
433	1875	8118	20,81	7,565	2,636	1360	1473	0,00231	463	2144	9925	21,52	7,736	2,666	1455	1684	0,00216
434	1884	8175	20,83	7,571	2,637	1363	1479	0,00230	464	2153	9990	21,54	7,742	2,667	1458	1691	0,00216
435	1892	8231	20,86	7,577	2,638	1367	1486	0,00230	465	2162	10054	21,56	7,747	2,667	1461	1698	0,00215
436	1901	8288	20,88	7,583	2,639	1370	1493	0,00229	466	2172	10119	21,59	7,753	2,668	1464	1706	0,00215
437	1910	8345	20,90	7,589	2,640	1373	1500	0,00229	467	2181	10185	21,61	7,758	2,669	1467	1713	0,00214
438	1918	8403	20,93	7,594	2,641	1376	1507	0,00228	468	2190	10250	21,63	7,764	2,670	1470	1720	0,00214
439	1927	8460	20,95	7,600	2,642	1379	1514	0,00228	469	2200	10316	21,66	7,769	2,671	1473	1728	0,00213
440	1936	8518	20,98	7,606	2,643	1382	1521	0,00227	**470**	2209	10382	21,68	7,775	2,672	1477	1735	0,00213
441	1945	8577	21,00	7,612	2,644	1385	1527	0,00227	471	2218	10449	21,70	7,780	2,673	1480	1742	0,00212
442	1954	8635	21,02	7,617	2,645	1389	1534	0,00226	472	2228	10515	21,73	7,786	2,674	1483	1750	0,00212
443	1962	8694	21,05	7,623	2,646	1392	1541	0,00226	473	2237	10582	21,75	7,791	2,675	1486	1757	0,00211
444	1971	8753	21,07	7,629	2,647	1395	1548	0,00225	474	2247	10650	21,77	7,797	2,676	1489	1765	0,00211
445	1980	8812	21,10	7,635	2,648	1398	1555	0,00225	475	2256	10717	21,79	7,802	2,677	1492	1772	0,00211
446	1989	8872	21,12	7,640	2,649	1401	1562	0,00224	476	2266	10785	21,82	7,808	2,678	1495	1780	0,00210
447	1998	8931	21,14	7,646	2,650	1404	1569	0,00224	477	2275	10853	21,84	7,813	2,679	1499	1787	0,00210
448	2007	8992	21,17	7,652	2,651	1407	1576	0,00223	478	2285	10922	21,86	7,819	2,679	1502	1795	0,00209
449	2016	9052	21,19	7,657	2,652	1411	1583	0,00223	479	2294	10990	21,89	7,824	2,680	1505	1802	0,00209
450	2025	9112	21,21	7,663	2,653	1414	1590	0,00222	**480**	2304	11059	21,91	7,830	2,681	1508	1810	0,00208

Квадраты, кубы, корни, логарифмы, πn, $\frac{1}{4}\pi n^2$, обратные величины

Продолжение

n	$\frac{n^2}{100}$	$\frac{n^3}{100000}$	$\sqrt{n}$	$\sqrt[3]{n}$	$\lg n$	πn	$\frac{\frac{1}{4}\pi n^2}{100}$	$\frac{1}{n}$	n	$\frac{n^2}{100}$	$\frac{n^3}{100000}$	$\sqrt{n}$	$\sqrt[3]{n}$	$\lg n$	πn	$\frac{\frac{1}{4}\pi n^2}{100}$	$\frac{1}{n}$
481	2314	1113	21,93	7,835	2,682	1511	1817	0,00208	511	2611	1334	22,61	7,995	2,708	1605	2051	0,00196
482	2323	1120	21,95	7,841	2,683	1514	1825	0,00207	512	2621	1342	22,63	8,000	2,709	1608	2059	0,00195
483	2333	1127	21,98	7,846	2,684	1517	1832	0,00207	513	2632	1350	22,65	8,005	2,710	1612	2067	0,00195
484	2343	1134	22,00	7,851	2,685	1521	1840	0,00207	514	2642	1358	22,67	8,010	2,711	1615	2075	0,00195
485	2352	1141	22,02	7,857	2,686	1524	1847	0,00206	515	2652	1366	22,69	8,016	2,712	1618	2083	0,00194
486	2362	1148	22,05	7,862	2,687	1527	1855	0,00206	516	2663	1374	22,72	8,021	2,713	1621	2091	0,00194
487	2372	1155	22,07	7,868	2,688	1530	1863	0,00205	517	2673	1382	22,74	8,026	2,713	1624	2099	0,00193
488	2381	1162	22,09	7,873	2,689	1533	1870	0,00205	518	2683	1390	22,76	8,031	2,714	1627	2107	0,00193
489	2391	1169	22,11	7,878	2,689	1536	1878	0,00204	519	2694	1398	22,78	8,036	2,715	1630	2116	0,00193
490	2401	1176	22,14	7,884	2,690	1539	1886	0,00204	**520**	2704	1406	22,80	8,041	2,716	1634	2124	0,00192
491	2411	1184	22,16	7,889	2,691	1543	1893	0,00204	521	2714	1414	22,83	8,047	2,717	1637	2132	0,00192
492	2421	1191	22,18	7,894	2,692	1546	1901	0,00203	522	2725	1422	22,85	8,052	2,718	1640	2140	0,00192
493	2430	1198	22,20	7,900	2,693	1549	1909	0,00203	523	2735	1431	22,87	8,057	2,719	1643	2148	0,00191
494	2440	1206	22,23	7,905	2,694	1552	1917	0,00202	524	2746	1439	22,89	8,062	2,719	1646	2157	0,00191
495	2450	1213	22,25	7,910	2,695	1555	1924	0,00202	525	2756	1447	22,91	8,067	2,720	1649	2165	0,00190
496	2460	1220	22,27	7,916	2,695	1558	1932	0,00202	526	2767	1455	22,93	8,072	2,721	1652	2173	0,00190
497	2470	1228	22,29	7,921	2,696	1561	1940	0,00201	527	2777	1464	22,96	8,077	2,722	1656	2181	0,00190
498	2480	1235	22,32	7,926	2,697	1565	1948	0,00201	528	2788	1472	22,98	8,082	2,723	1659	2190	0,00189
499	2490	1243	22,34	7,932	2,698	1568	1956	0,00200	529	2798	1480	23,00	8,088	2,723	1662	2198	0,00189
500	2500	1250	22,36	7,937	2,699	1571	1963	0,00200	**530**	2809	1489	23,02	8,093	2,724	1665	2206	0,00189
501	2510	1258	22,38	7,942	2,700	1574	1971	0,00200	531	2820	1497	23,04	8,098	2,725	1668	2215	0,00188
502	2520	1265	22,41	7,948	2,701	1577	1979	0,00199	532	2830	1506	23,07	8,103	2,726	1671	2223	0,00188
503	2530	1273	22,43	7,953	2,702	1580	1987	0,00199	533	2841	1514	23,09	8,108	2,727	1674	2231	0,00188
504	2540	1280	22,45	7,958	2,702	1583	1995	0,00198	534	2852	1523	23,11	8,113	2,728	1678	2240	0,00187
505	2550	1288	22,47	7,963	2,703	1587	2003	0,00198	535	2862	1531	23,13	8,118	2,728	1681	2248	0,00187
506	2560	1296	22,49	7,969	2,704	1590	2011	0,00198	536	2873	1540	23,15	8,123	2,729	1684	2256	0,00187
507	2570	1303	22,52	7,974	2,705	1593	2019	0,00197	537	2884	1549	23,17	8,128	2,730	1687	2265	0,00186
508	2581	1311	22,54	7,979	2,706	1596	2027	0,00197	538	2894	1557	23,19	8,133	2,731	1690	2273	0,00186
509	2591	1319	22,56	7,984	2,707	1599	2035	0,00196	539	2905	1566	23,22	8,138	2,732	1693	2282	0,00186
510	2601	1327	22,58	7,990	2,708	1602	2043	0,00196	**540**	2916	1575	23,24	8,143	2,732	1696	2290	0,00185

n	$\frac{n^2}{100}$	$\frac{n^3}{100000}$	$\sqrt{n}$	$\sqrt[3]{n}$	lg n	πn	$\frac{\frac{1}{4}\pi n^2}{100}$	$\frac{1}{n}$	n	$\frac{n^2}{100}$	$\frac{n^3}{100000}$	$\sqrt{n}$	$\sqrt[3]{n}$	lg n	πn	$\frac{\frac{1}{4}\pi n^2}{100}$	$\frac{1}{n}$
541	2927	1583	23,26	8,148	2,733	1700	2299	0,00185	571	3260	1862	23,90	8,296	2,757	1794	2561	0,00175
542	2938	1592	23,28	8,153	2,734	1703	2307	0,00185	572	3272	1871	23,92	8,301	2,757	1797	2570	0,00175
543	2948	1601	23,30	8,158	2,735	1706	2316	0,00184	573	3283	1881	23,94	8,306	2,758	1800	2579	0,00175
544	2959	1610	23,32	8,163	2,736	1709	2324	0,00184	574	3295	1891	23,96	8,311	2,759	1803	2588	0,00174
545	2970	1619	23,35	8,168	2,736	1712	2333	0,00183	575	3306	1901	23,98	8,316	2,760	1806	2597	0,00174
546	2981	1628	23,37	8,173	2,737	1715	2341	0,00183	576	3318	1911	24,00	8,320	2,760	1810	2606	0,00174
547	2992	1637	23,39	8,178	2,738	1718	2350	0,00183	577	3329	1921	24,02	8,325	2,761	1813	2615	0,00173
548	3003	1646	23,41	8,183	2,739	1722	2359	0,00182	578	3341	1931	24,04	8,330	2,762	1816	2624	0,00173
549	3014	1655	23,43	8,188	2,740	1725	2367	0,00182	579	3352	1941	24,06	8,335	2,763	1819	2633	0,00173
550	3025	1664	23,45	8,193	2,740	1728	2376	0,00182	**580**	3364	1951	24,08	8,340	2,763	1822	2642	0,00172
551	3036	1673	23,47	8,198	2,741	1731	2384	0,00181	581	3376	1961	24,10	8,344	2,764	1825	2651	0,00172
552	3047	1682	23,49	8,203	2,742	1734	2393	0,00181	582	3387	1971	24,12	8,349	2,765	1828	2660	0,00172
553	3058	1691	23,52	8,208	2,743	1737	2402	0,00181	583	3399	1982	24,15	8,354	2,766	1832	2669	0,00172
554	3069	1700	23,54	8,213	2,744	1740	2411	0,00181	584	3411	1992	24,17	8,359	2,766	1835	2679	0,00171
555	3080	1710	23,56	8,218	2,744	1744	2419	0,00180	585	3422	2002	24,19	8,363	2,767	1838	2688	0,00171
556	3091	1719	23,58	8,223	2,745	1747	2428	0,00180	586	3434	2012	24,21	8,368	2,768	1841	2697	0,00171
557	3102	1728	23,60	8,228	2,746	1750	2437	0,00180	587	3446	2023	24,23	8,373	2,769	1844	2706	0,00170
558	3114	1737	23,62	8,233	2,747	1753	2445	0,00179	588	3457	2033	24,25	8,378	2,769	1847	2715	0,00170
559	3125	1747	23,64	8,238	2,747	1756	2454	0,00179	589	3469	2043	24,27	8,382	2,770	1850	2725	0,00170
560	3136	1756	23,66	8,243	2,748	1759	2463	0,00179	**590**	3481	2054	24,29	8,387	2,771	1854	2734	0,00169
561	3147	1766	23,69	8,247	2,749	1762	2472	0,00178	591	3493	2064	24,31	8,392	2,772	1857	2743	0,00169
562	3158	1775	23,71	8,252	2,750	1766	2481	0,00178	592	3505	2075	24,33	8,397	2,772	1860	2753	0,00169
563	3170	1785	23,73	8,257	2,751	1769	2489	0,00178	593	3516	2085	24,35	8,401	2,773	1863	2762	0,00169
564	3181	1794	23,75	8,262	2,751	1772	2498	0,00177	594	3528	2096	24,37	8,406	2,774	1866	2771	0,00168
565	3192	1804	23,77	8,267	2,752	1775	2507	0,00177	595	3540	2106	24,39	8,411	2,775	1869	2781	0,00168
566	3204	1813	23,79	8,272	2,753	1778	2516	0,00177	596	3552	2117	24,41	8,416	2,775	1872	2790	0,00168
567	3215	1823	23,81	8,277	2,754	1781	2525	0,00176	597	3564	2128	24,43	8,420	2,776	1876	2799	0,00168
568	3226	1833	23,83	8,282	2,754	1784	2534	0,00176	598	3576	2138	24,45	8,425	2,777	1879	2809	0,00167
569	3238	1842	23,85	8,286	2,755	1788	2543	0,00176	599	3588	2149	24,47	8,430	2,777	1882	2818	0,00167
570	3249	1852	23,87	8,291	2,756	1791	2552	0,00175	**600**	3600	2160	24,49	8,434	2,778	1885	2827	0,00167

Квадраты, кубы, корни, логарифмы, πn, $\frac{1}{4}\pi n^2$, обратные величины *Продолжение*

n	$\frac{n^2}{100}$	$\frac{n^3}{100000}$	$\sqrt{n}$	$\sqrt[3]{n}$	$\lg n$	πn	$\frac{\frac{1}{4}\pi n^2}{100}$	$\frac{1}{n}$	n	$\frac{n^2}{100}$	$\frac{n^3}{100000}$	$\sqrt{n}$	$\sqrt[3]{n}$	$\lg n$	πn	$\frac{\frac{1}{4}\pi n^2}{100}$	$\frac{1}{n}$
601	3612	2171	24,52	8,439	2,779	1888	2837	0,00166	631	3982	2512	25,12	8,577	2,800	1982	3127	0,00158
602	3624	2182	24,54	8,444	2,780	1891	2846	0,00166	632	3994	2524	25,14	8,582	2,801	1985	3137	0,00158
603	3636	2193	24,56	8,448	2,780	1894	2856	0,00166	633	4007	2536	25,16	8,586	2,801	1989	3147	0,00158
604	3648	2203	24,58	8,453	2,781	1898	2865	0,00166	634	4020	2548	25,18	8,591	2,802	1992	3157	0,00158
605	3660	2214	24,60	8,458	2,782	1901	2875	0,00165	635	4032	2560	25,20	8,595	2,803	1995	3167	0,00157
606	3672	2225	24,62	8,462	2,782	1904	2884	0,00165	636	4045	2573	25,22	8,600	2,803	1998	3177	0,00157
607	3684	2236	24,64	8,467	2,783	1907	2894	0,00165	637	4058	2585	25,24	8,604	2,804	2001	3187	0,00157
608	3697	2248	24,66	8,472	2,784	1910	2903	0,00164	638	4070	2597	25,26	8,609	2,805	2004	3197	0,00157
609	3709	2259	24,68	8,476	2,785	1913	2913	0,00164	639	4083	2609	25,28	8,613	2,806	2007	3207	0,00156
610	3721	2270	24,70	8,481	2,785	1916	2922	0,00164	**610**	4096	2621	25,30	8,618	2,806	2011	3217	0,00156
611	3733	2281	24,72	8,486	2,786	1920	2932	0,00164	641	4109	2634	25,32	8,622	2,807	2014	3227	0,00156
612	3745	2292	24,74	8,490	2,787	1923	2942	0,00163	642	4122	2646	25,34	8,627	2,808	2017	3237	0,00156
613	3758	2303	24,76	8,495	2,787	1926	2951	0,00163	643	4134	2658	25,36	8,631	2,808	2020	3247	0,00156
614	3770	2315	24,78	8,499	2,788	1929	2961	0,00163	644	4147	2671	25,38	8,636	2,809	2023	3257	0,00155
615	3782	2326	24,80	8,504	2,789	1932	2971	0,00163	645	4160	2683	25,40	8,640	2,810	2026	3267	0,00155
616	3795	2337	24,82	8,509	2,790	1935	2980	0,00162	646	4173	2696	25,42	8,645	2,810	2029	3278	0,00155
617	3807	2349	24,84	8,513	2,790	1938	2990	0,00162	647	4186	2708	25,44	8,649	2,811	2033	3288	0,00155
618	3819	2360	24,86	8,518	2,791	1942	3000	0,00162	648	4199	2721	25,46	8,653	2,812	2036	3298	0,00154
619	3832	2372	24,88	8,522	2,792	1945	3009	0,00162	649	4212	2734	25,48	8,658	2,812	2039	3308	0,00154
620	3844	2383	24,90	8,527	2,792	1948	3019	0,00161	**650**	4225	2746	25,50	8,662	2,813	2042	3318	0,00154
621	3856	2395	24,92	8,532	2,793	1951	3029	0,00161	651	4238	2759	25,51	8,667	2,814	2045	3329	0,00154
622	3869	2406	24,94	8,536	2,794	1954	3039	0,00161	652	4251	2772	25,53	8,671	2,814	2048	3339	0,00153
623	3881	2418	24,96	8,541	2,794	1957	3048	0,00161	653	4264	2784	25,55	8,676	2,815	2051	3349	0,00153
624	3894	2430	24,98	8,545	2,795	1960	3058	0,00160	654	4277	2797	25,57	8,680	2,816	2055	3359	0,00153
625	3906	2441	25,00	8,550	2,796	1964	3068	0,00160	655	4290	2810	25,59	8,685	2,816	2058	3370	0,00153
626	3919	2453	25,02	8,554	2,797	1967	3078	0,00160	656	4303	2823	25,61	8,689	2,817	2061	3380	0,00152
627	3931	2465	25,04	8,559	2,797	1970	3088	0,00159	657	4316	2836	25,63	8,693	2,818	2064	3390	0,00152
628	3944	2487	25,06	8,564	2,798	1973	3097	0,00159	658	4330	2849	25,65	8,698	2,818	2067	3400	0,00152
629	3956	2407	25,08	8,568	2,799	1976	3107	0,00159	659	4343	2862	25,67	8,702	2,819	2070	3411	0,00152
630	3969	2509	25,10	8,573	2,799	1979	3117	0,00159	**660**	4356	2875	25,69	8,707	2,820	2073	3421	0,00152

n	$\frac{n^2}{100}$	$\frac{n^3}{100000}$	$\sqrt{n}$	$\sqrt[3]{n}$	$\lg n$	πn	$\frac{1}{4}\pi n^2$ / 100	$\frac{1}{n}$	n	$\frac{n^2}{100}$	$\frac{n^3}{100000}$	$\sqrt{n}$	$\sqrt[3]{n}$	$\lg n$	πn	$\frac{1}{4}\pi n^2$ / 100	$\frac{1}{n}$
661	4369	2888	25,71	8,711	2,820	2077	3432	0,00151	691	4775	3299	26,29	8,841	2,839	2171	3750	0,00145
662	4382	2901	25,73	8,715	2,821	2080	3442	0,00151	692	4789	3314	26,31	8,845	2,840	2174	3761	0,00145
663	4396	2914	25,75	8,720	2,822	2083	3452	0,00151	693	4802	3328	26,32	8,849	2,841	2177	3772	0,00144
664	4409	2928	25,77	8,724	2,822	2086	3463	0,00151	694	4816	3343	26,34	8,854	2,841	2180	3783	0,00144
665	4422	2941	25,79	8,729	2,823	2089	3473	0,00150	695	4830	3357	26,36	8,858	2,842	2183	3794	0,00144
666	4436	2954	25,81	8,733	2,823	2092	3484	0,00150	696	4844	3372	26,38	8,862	2,843	2187	3805	0,00144
667	4449	2967	25,83	8,737	2,824	2095	3494	0,00150	697	4858	3386	26,40	8,866	2,843	2190	3816	0,00143
668	4462	2981	25,85	8,742	2,825	2099	3505	0,00150	698	4872	3401	26,42	8,871	2,844	2193	3826	0,00143
669	4476	2994	25,87	8,746	2,825	2102	3515	0,00149	699	4886	3415	26,44	8,875	2,844	2196	3837	0,00143
670	4489	3008	25,88	8,750	2,826	2105	3526	0,00149	**700**	4900	3430	26,46	8,879	2,845	2199	3848	0,00143
671	4502	3021	25,90	8,755	2,827	2108	3536	0,00149	701	4914	3445	26,48	8,883	2,846	2202	3859	0,00143
672	4516	3035	25,92	8,759	2,827	2111	3547	0,00149	702	4928	3459	26,50	8,887	2,846	2205	3870	0,00142
673	4529	3048	25,94	8,763	2,828	2114	3557	0,00149	703	4942	3474	26,51	8,892	2,847	2209	3882	0,00142
674	4543	3062	25,96	8,768	2,829	2117	3568	0,00148	704	4956	3489	26,53	8,896	2,848	2212	3893	0,00142
675	4556	3075	25,98	8,772	2,829	2121	3578	0,00148	705	4970	3504	26,55	8,900	2,848	2215	3904	0,00142
676	4570	3089	26,00	8,776	2,830	2124	3589	0,00148	706	4984	3519	26,57	8,904	2,849	2218	3915	0,00142
677	4583	3103	26,02	8,781	2,831	2127	3600	0,00148	707	4998	3534	26,59	8,909	2,849	2221	3926	0,00141
678	4597	3117	26,04	8,785	2,831	2130	3610	0,00147	708	5013	3549	26,61	8,913	2,850	2224	3937	0,00141
679	4610	3130	26,06	8,789	2,832	2133	3621	0,00147	709	5027	3564	26,63	8,917	2,851	2227	3948	0,00141
680	4624	3144	26,08	8,794	2,833	2136	3632	0,00147	**710**	5041	3579	26,65	8,921	2,851	2231	3959	0,00141
681	4638	3158	26,10	8,798	2,833	2139	3642	0,00147	711	5055	3594	26,66	8,925	2,852	2234	3970	0,00141
682	4651	3172	26,12	8,802	2,834	2143	3653	0,00147	712	5069	3609	26,68	8,929	2,852	2237	3982	0,00140
683	4665	3186	26,13	8,807	2,834	2146	3664	0,00146	713	5084	3625	26,70	8,934	2,853	2240	3993	0,00140
684	4679	3200	26,15	8,811	2,835	2149	3675	0,00146	714	5098	3640	26,72	8,938	2,854	2243	4004	0,00140
685	4692	3214	26,17	8,815	2,836	2152	3685	0,00146	715	5112	3655	26,74	8,942	2,854	2246	4015	0,00140
686	4706	3228	26,19	8,819	2,836	2155	3696	0,00146	716	5127	3671	26,76	8,946	2,855	2249	4026	0,00140
687	4720	3242	26,21	8,824	2,837	2158	3707	0,00146	717	5141	3686	26,78	8,950	2,856	2253	4038	0,00139
688	4733	3257	26,23	8,828	2,838	2161	3718	0,00145	718	5155	3701	26,80	8,955	2,856	2256	4049	0,00139
689	4747	3271	26,25	8,832	2,838	2165	3728	0,00145	719	5170	3717	26,81	8,959	2,857	2259	4060	0,00139
690	4761	3285	26,27	8,837	2,839	2168	3739	0,00145	**720**	5184	3732	26,83	8,963	2,857	2262	4072	0,00139

Квадраты, кубы, корни, логарифмы, πn, $\frac{1}{4}\pi n^2$, обратные величины

Продолжение

n	$\frac{n^2}{100}$	$\frac{n^3}{100000}$	$\sqrt{n}$	$\sqrt[3]{n}$	$\lg n$	πn	$\frac{\frac{1}{4}\pi n^2}{100}$	$\frac{1}{n}$	n	$\frac{n^2}{100}$	$\frac{n^3}{100000}$	$\sqrt{n}$	$\sqrt[3]{n}$	$\lg n$	πn	$\frac{\frac{1}{4}\pi n^2}{100}$	$\frac{1}{n}$
721	5198	3748	26,85	8,967	2,858	2265	4083	0,00139	751	5640	4236	27,40	9,090	2,876	2359	4430	0,00133
722	5213	3764	26,87	8,971	2,859	2268	4094	0,00139	752	5655	4253	27,42	9,094	2,876	2362	4441	0,00133
723	5227	3779	26,89	8,975	2,859	2271	4106	0,00138	753	5670	4270	27,44	9,098	2,877	2366	4453	0,00133
724	5242	3795	26,91	8,979	2,860	2275	4117	0,00138	754	5685	4287	27,46	9,102	2,877	2369	4465	0,00133
725	5256	3811	26,93	8,984	2,860	2278	4128	0,00138	755	5700	4304	27,48	9,106	2,878	2372	4477	0,00132
726	5271	3827	26,94	8,988	2,861	2281	4140	0,00138	756	5715	4321	27,50	9,110	2,879	2375	4489	0,00132
727	5285	3842	26,96	8,992	2,862	2284	4151	0,00138	757	5730	4338	27,51	9,114	2,879	2378	4501	0,00132
728	5300	3858	26,98	8,996	2,862	2287	4162	0,00137	758	5746	4355	27,53	9,118	2,880	2381	4513	0,00132
729	5314	3874	27,00	9,000	2,863	2290	4174	0,00137	759	5761	4372	27,55	9,122	2,880	2384	4525	0,00132
730	5329	3890	27,02	9,004	2,863	2293	4185	0,00137	**760**	5776	4390	27,57	9,126	2,881	2388	4536	0,00132
731	5344	3906	27,04	9,008	2,864	2297	4197	0,00137	761	5791	4407	27,59	9,130	2,881	2391	4548	0,00131
732	5358	3922	27,06	9,012	2,865	2300	4208	0,00137	762	5806	4425	27,60	9,134	2,882	2394	4560	0,00131
733	5373	3938	27,07	9,016	2,865	2303	4220	0,00136	763	5822	4442	27,62	9,138	2,883	2397	4572	0,00131
734	5388	3954	27,09	9,021	2,866	2306	4231	0,00136	764	5837	4459	27,64	9,142	2,883	2400	4584	0,00131
735	5402	3971	27,11	9,025	2,866	2309	4243	0,00136	765	5852	4477	27,66	9,146	2,884	2403	4596	0,00131
736	5417	3987	27,13	9,029	2,867	2312	4254	0,00136	766	5868	4495	27,68	9,150	2,884	2406	4608	0,00131
737	5432	4003	27,15	9,033	2,867	2315	4266	0,00136	767	5883	4512	27,69	9,154	2,885	2410	4620	0,00130
738	5446	4019	27,17	9,037	2,868	2319	4278	0,00136	768	5898	4530	27,71	9,158	2,885	2413	4632	0,00130
739	5461	4036	27,18	9,041	2,869	2322	4289	0,00135	769	5914	4548	27,73	9,162	2,886	2416	4645	0,00130
740	5476	4052	27,20	9,045	2,869	2325	4301	0,00135	**770**	5929	4565	27,75	9,166	2,886	2419	4657	0,00130
741	5491	4069	27,22	9,049	2,870	2328	4312	0,00135	771	5944	4583	27,77	9,170	2,887	2422	4669	0,00130
742	5506	4085	27,24	9,053	2,870	2331	4324	0,00135	772	5960	4601	27,78	9,174	2,888	2425	4681	0,00130
743	5520	4102	27,26	9,057	2,871	2334	4336	0,00135	773	5975	4619	27,80	9,178	2,888	2428	4693	0,00129
744	5535	4118	27,28	9,061	2,872	2337	4347	0,00134	774	5991	4637	27,82	9,182	2,889	2432	4705	0,00129
745	5550	4135	27,29	9,065	2,872	2340	4359	0,00134	775	6006	4655	27,84	9,185	2,889	2435	4717	0,00129
746	5565	4152	27,31	9,069	2,873	2344	4371	0,00134	776	6022	4673	27,86	9,189	2,890	2438	4729	0,00129
747	5580	4168	27,33	9,073	2,873	2347	4383	0,00134	777	6037	4691	27,87	9,193	2,890	2441	4742	0,00129
748	5595	4185	27,35	9,078	2,874	2350	4394	0,00134	778	6053	4709	27,89	9,197	2,891	2444	4754	0,00129
749	5610	4202	27,37	9,082	2,874	2353	4406	0,00134	779	6068	4727	27,91	9,201	2,892	2447	4766	0,00128
750	5625	4219	27,39	9,086	2,875	2356	4418	0,00133	**780**	6084	4746	27,93	9,205	2,892	2450	4778	0,00128

n	$\frac{n^2}{100}$	$\frac{n^3}{100000}$	$\sqrt{n}$	$\sqrt[3]{n}$	$\lg n$	πn	$\frac{\frac{1}{4}\pi n^2}{100}$	$\frac{1}{n}$	n	$\frac{n^2}{100}$	$\frac{n^3}{100000}$	$\sqrt{n}$	$\sqrt[3]{n}$	$\lg n$	πn	$\frac{\frac{1}{4}\pi n^2}{100}$	$\frac{1}{n}$
781	6100	4764	27,95	9,209	2,893	2454	4791	0,00128	811	6577	5334	28,48	9,326	2,909	2548	5166	0,00123
782	6115	4782	27,96	9,213	2,893	2457	4803	0,00128	812	6593	5354	28,50	9,329	2,910	2551	5178	0,00123
783	6131	4800	27,98	9,217	2,894	2460	4815	0,00128	813	6610	5374	28,51	9,333	2,910	2554	5191	0,00123
784	6147	4819	28,00	9,221	2,894	2463	4827	0,00128	814	6626	5392	28,53	9,337	2,911	2557	5204	0,00123
785	6162	4837	28,02	9,225	2,895	2466	4840	0,00127	815	6642	5413	28,55	9,341	2,911	2560	5217	0,00123
786	6178	4856	28,04	9,229	2,895	2469	4852	0,00127	816	6659	5433	28,57	9,345	2,912	2564	5230	0,00123
787	6194	4874	28,05	9,233	2,896	2472	4865	0,00127	817	6675	5453	28,58	9,348	2,912	2567	5242	0,00122
788	6209	4893	28,07	9,237	2,897	2476	4877	0,00127	818	6691	5473	28,60	9,352	2,913	2570	5255	0,00122
789	6225	4912	28,09	9,240	2,897	2479	4889	0,00127	819	6708	5494	28,62	9,356	2,913	2573	5268	0,00122
790	6241	4930	28,11	9,244	2,898	2482	4902	0,00127	**820**	6724	5514	28,64	9,360	2,914	2576	5281	0,00122
791	6257	4949	28,12	9,248	2,898	2485	4914	0,00126	821	6740	5534	28,65	9,364	2,914	2579	5294	0,00122
792	6273	4968	28,14	9,252	2,899	2488	4927	0,00126	822	6757	5554	28,67	9,368	2,915	2582	5307	0,00121
793	6288	4987	28,16	9,256	2,899	2491	4939	0,00126	823	6773	5574	28,69	9,371	2,915	2586	5320	0,00121
794	6304	5006	28,18	9,260	2,900	2494	4951	0,00126	824	6790	5595	28,71	9,375	2,916	2589	5333	0,00121
795	6320	5025	28,20	9,264	2,900	2498	4964	0,00126	825	6806	5615	28,72	9,379	2,916	2592	5346	0,00121
796	6336	5044	28,21	9,268	2,901	2501	4976	0,00126	826	6823	5636	28,74	9,383	2,917	2595	5359	0,00121
797	6352	5063	28,23	9,272	2,901	2504	4989	0,00125	827	6839	5656	28,76	9,386	2,918	2598	5372	0,00121
798	6368	5082	28,25	9,275	2,902	2507	5001	0,00125	828	6856	5677	28,77	9,390	2,918	2601	5385	0,00121
799	6384	5101	28,27	9,279	2,903	2510	5014	0,00125	829	6872	5697	28,79	9,394	2,919	2604	5398	0,00121
800	6400	5120	28,28	9,283	2,903	2513	5027	0,00125	**830**	6889	5718	28,81	9,398	2,919	2608	5411	0,00120
801	6416	5139	28,30	9,287	2,904	2516	5039	0,00125	831	6906	5739	28,83	9,402	2,920	2611	5424	0,00120
802	6432	5158	28,32	9,291	2,904	2520	5052	0,00125	832	6922	5759	28,84	9,405	2,920	2614	5437	0,00120
803	6448	5178	28,34	9,295	2,905	2523	5064	0,00125	833	6939	5780	28,86	9,409	2,921	2617	5450	0,00120
804	6464	5197	28,35	9,299	2,905	2526	5077	0,00124	834	6956	5801	28,88	9,413	2,921	2620	5463	0,00120
805	6480	5217	28,37	9,302	2,906	2529	5090	0,00124	835	6972	5822	28,90	9,417	2,922	2623	5476	0,00120
806	6496	5236	28,39	9,306	2,906	2532	5102	0,00124	836	6989	5843	28,91	9,420	2,922	2626	5489	0,00120
807	6512	5256	28,41	9,310	2,907	2535	5115	0,00124	837	7006	5864	28,93	9,424	2,923	2630	5502	0,00119
808	6529	5275	28,43	9,314	2,907	2538	5128	0,00124	838	7022	5885	28,95	9,428	2,923	2633	5515	0,00119
809	6545	5295	28,44	9,318	2,908	2542	5140	0,00124	839	7039	5906	28,97	9,432	2,924	2636	5529	0,00119
810	6561	5314	28,46	9,322	2,908	2545	5153	0,00123	**840**	7056	5927	28,98	9,435	2,924	2639	5542	0,00119

Квадраты, кубы, корни, логарифмы, πn, $\frac{1}{4}\pi n^2$, обратные величины

Продолжение

n	$\frac{n^2}{100}$	$\frac{n^3}{100000}$	$\sqrt{n}$	$\sqrt[3]{n}$	$\lg n$	πn	$\frac{\frac{1}{4}\pi n^2}{100}$	$\frac{1}{n}$	n	$\frac{n^2}{100}$	$\frac{n^3}{100000}$	$\sqrt{n}$	$\sqrt[3]{n}$	$\lg n$	πn	$\frac{\frac{1}{4}\pi n^2}{100}$	$\frac{1}{n}$
841	7073	59'8	29,00	9,439	2,925	2642	5555	0,00119	871	7586	6608	29,51	9,550	2,940	2736	5958	0,00115
842	7090	5969	29,02	9,443	2,925	2645	5568	0,00119	872	7604	6631	29,53	9,554	2,941	2739	5972	0,00115
843	7106	5991	29,03	9,447	2,926	2648	5581	0,00119	873	7621	6653	29,55	9,557	2,941	2743	5986	0,00115
844	7123	6012	29,05	9,450	2,926	2652	5595	0,00118	874	7639	6676	29,56	9,561	2,942	2746	5999	0,00114
845	7140	6034	29,07	9,454	2,927	2655	5608	0,00118	875	7656	6699	29,58	9,565	2,942	2749	6013	0,00114
846	7157	6055	29,09	9,458	2,927	2658	5621	0,00118	876	7674	6722	29,60	9,568	2,943	2752	6027	0,00114
847	7174	6076	29,10	9,462	2,928	2661	5635	0,00118	877	7691	6745	29,61	9,572	2,943	2755	6041	0,00114
848	7194	6098	29,12	9,465	2,928	2664	5648	0,00118	878	7709	6768	29,63	9,576	2,943	2758	6055	0,00114
849	7208	6120	29,14	9,469	2,929	2667	5661	0,00118	879	7726	6792	29,65	9,579	2,944	2761	6068	0,00114
850	7225	6141	29,15	9,473	2,929	2670	5675	0,00118	**880**	7744	6815	29,66	9,583	2,944	2765	6082	0,00114
851	7242	6163	29,17	9,476	2,930	2674	5688	0,00118	881	7762	6838	29,68	9,586	2,945	2768	6096	0,00114
852	7259	6185	29,19	9,480	2,930	2677	5701	0,00117	882	7779	6861	29,70	9,590	2,945	2771	6110	0,00113
853	7276	6207	29,21	9,484	2,931	2680	5715	0,00117	883	7797	6885	29,72	9,594	2,946	2774	6124	0,00113
854	7293	6228	29,22	9,488	2,931	2683	5728	0,00117	884	7815	6908	29,73	9,597	2,946	2777	6138	0,00113
855	7310	6250	29,24	9,491	2,932	2686	5741	0,00117	885	7832	6932	29,75	9,601	2,947	2780	6151	0,00113
856	7327	6272	29,26	9,495	2,932	2689	5755	0,00117	886	7850	6955	29,77	9,605	2,947	2783	6165	0,00113
857	7344	6294	29,27	9,499	2,933	2692	5768	0,00117	887	7868	6979	29,78	9,608	2,948	2787	6179	0,00113
858	7362	6316	29,29	9,502	2,933	2695	5782	0,00117	888	7885	7002	29,80	9,612	2,948	2790	6193	0,00113
859	7379	6338	29,31	9,506	2,934	2699	5795	0,00116	889	7903	7026	29,82	9,615	2,949	2793	6207	0,00112
860	7396	6361	29,33	9,510	2,934	2702	5809	0,00116	**890**	7921	7050	29,83	9,619	2,949	2796	6221	0,00112
861	7413	6383	29,34	9,513	2,935	2705	5822	0,00116	891	7939	7073	29,85	9,623	2,950	2799	6235	0,00112
862	7430	6405	29,36	9,517	2,936	2708	5836	0,00116	892	7957	7097	29,87	9,626	2,950	2802	6249	0,00112
863	7448	6427	29,38	9,521	2,936	2711	5849	0,00116	893	7974	7121	29,88	9,630	2,951	2805	6263	0,00112
864	7465	6450	29,39	9,524	2,937	2714	5863	0,00116	894	7992	7145	29,90	9,633	2,951	2809	6277	0,00112
865	7482	6472	29,41	9,528	2,937	2717	5877	0,00116	895	8010	7169	29,92	9,637	2,952	2812	6291	0,00112
866	7500	6495	29,43	9,532	2,938	2721	5890	0,00115	896	8028	7193	29,93	9,641	2,952	2815	6305	0,00112
867	7517	6517	29,44	9,535	2,938	2724	5904	0,00115	897	8046	7217	29,95	9,644	2,953	2818	6319	0,00111
868	7534	6540	29,46	9,539	2,939	2727	5917	0,00115	898	8064	7242	29,97	9,648	2,953	2821	6333	0,00111
869	7552	6562	29,48	9,543	2,939	2730	5931	0,00115	899	8082	7266	29,98	9,651	2,954	2824	6348	0,00111
870	7569	6585	29,50	9,546	2,940	2733	5945	0,00115	**900**	8100	7290	30,00	9,655	2,954	2827	6362	0,00111

n	$\frac{n^2}{100}$	$\frac{n^3}{100000}$	$\sqrt{n}$	$\sqrt[3]{n}$	$\lg n$	πn	$\frac{\frac{1}{4}\pi n^2}{100}$	$\frac{1}{n}$	n	$\frac{n^2}{100}$	$\frac{n^3}{100000}$	$\sqrt{n}$	$\sqrt[3]{n}$	$\lg n$	πn	$\frac{\frac{1}{4}\pi n^2}{100}$	$\frac{1}{n}$
901	8118	7314	30,02	9,658	2,955	2831	6376	0,00111	931	8668	8070	30,51	9,764	2,969	2925	6808	0,00107
902	8136	7339	30,03	9,662	2,955	2834	6390	0,00111	932	8686	8096	30,53	9,768	2,969	2928	6822	0,00107
903	8154	7363	30,05	9,666	2,956	2837	6404	0,00111	933	8705	8122	30,55	9,771	2,970	2931	6837	0,00107
904	8172	7388	30,07	9,669	2,956	2840	6418	0,00111	934	8724	8148	30,56	9,775	2,970	2934	6851	0,00107
905	8190	7412	30,08	9,673	2,957	2843	6433	0,00110	935	8742	8174	30,58	9,778	2,971	2937	6866	0,00107
906	8208	7437	30,10	9,676	2,957	2846	6447	0,00110	936	8761	8200	30,59	9,782	2,971	2941	6881	0,00107
907	8226	7461	30,12	9,680	2,958	2849	6461	0,00110	937	8780	8227	30,61	9,785	2,972	2944	6896	0,00107
908	8245	7486	30,13	9,683	2,958	2853	6475	0,00110	938	8798	8253	30,63	9,789	2,972	2947	6910	0,00107
909	8263	7511	30,15	9,687	2,959	2856	6490	0,00110	939	8817	8279	30,64	9,792	2,973	2950	6925	0,00106
910	8281	7536	30,17	9,691	2,959	2859	6504	0,00110	**940**	8836	8306	30,66	9,796	2,973	2953	6940	0,00106
911	8299	7561	30,18	9,694	2,960	2862	6518	0,00110	941	8855	8332	30,68	9,799	2,974	2956	6955	0,00106
912	8317	7586	30,20	9,698	2,960	2865	6533	0,00110	942	8874	8359	30,69	9,803	2,974	2959	6969	0,00106
913	8336	7610	30,22	9,701	2,960	2868	6547	0,00110	943	8892	8386	30,71	9,806	2,975	2963	6984	0,00106
914	9354	7636	30,23	9,705	2,961	2871	6561	0,00109	944	8911	8412	30,72	9,810	2,975	2966	6999	0,00106
915	8372	7661	30,25	9,708	2,961	2875	6576	0,00109	945	8930	8439	30,74	9,813	2,975	2969	7014	0,00106
916	8391	7686	30,27	9,712	2,962	2878	6590	0,00109	946	8949	8466	30,76	9,817	2,976	2972	7029	0,00106
917	8409	7711	30,28	9,715	2,962	2881	6604	0,00109	947	8968	8493	30,77	9,820	2,976	2975	7044	0,00106
918	8427	7736	30,30	9,719	2,963	2884	6619	0,00109	948	8987	8520	30,79	9,824	2,977	2978	7058	0,00105
919	8446	7762	30,31	9,722	2,963	2887	6633	0,00109	949	9006	8547	30,81	9,827	2,977	2981	7073	0,00105
920	8464	7787	30,33	9,726	2,964	2890	6648	0,00109	**950**	9025	8574	30,82	9,830	2,978	2985	7088	0,00105
921	8482	7812	30,35	9,729	2,964	2893	6662	0,00109	951	9044	8601	30,84	9,834	2,978	2988	7103	0,00105
922	8501	7838	30,36	9,733	2,965	2897	6677	0,00108	952	9063	8628	30,85	9,837	2,979	2991	7118	0,00105
923	8519	7863	30,38	8,736	2,965	2900	6691	0,00108	953	9082	8655	30,87	9,841	2,979	2994	7133	0,00105
924	8538	7889	30,40	9,740	2,966	2903	6706	0,00108	954	9101	8683	30,89	9,844	2,980	2997	7148	0,00105
925	8556	7915	30,41	9,743	2,966	2906	6720	0,00108	955	9120	8710	30,90	9,848	2,980	3000	7163	0,00105
926	8575	7940	30,43	9,747	2,967	2909	6735	0,00108	956	9139	8737	30,92	9,851	2,980	3003	7178	0,00105
927	8593	7966	30,45	9,750	2,967	2912	6749	0,00108	957	9158	8765	30,94	9,855	2,981	3007	7193	0,00104
928	8612	7992	30,46	9,754	2,968	2915	6764	0,00108	958	9178	8792	30,95	9,858	2,981	3010	7208	0,00104
929	8630	8018	30,48	9,758	2,968	2919	6778	0,00108	959	9197	8820	30,97	9,861	2,982	3013	7223	0,00104
930	8649	8044	30,50	9,761	2,968	2922	6793	0,00108	**960**	9216	8847	30,98	9,865	2,982	3016	7238	0,00104

Квадраты, кубы, корни, логарифмы, πn, $\frac{1}{4}\pi n^2$, обратные величины *Продолжение*

n	$\frac{n^2}{100}$	$\frac{n^3}{100000}$	$\sqrt{n}$	$\sqrt[3]{n}$	$\lg n$	πn	$\frac{\frac{1}{4}\pi n^2}{100}$	$\frac{1}{n}$	n	$\frac{n^2}{100}$	$\frac{n^3}{100000}$	$\sqrt{n}$	$\sqrt[3]{n}$	$\lg n$	πn	$\frac{\frac{1}{4}\pi n^2}{100}$	$\frac{1}{n}$
961	9235	8875	31,00	9,863	2,983	3019	7253	0,00104	931	9624	9441	31,32	9,936	2,992	3082	7558	0,00102
962	9254	8903	31,02	9,872	2,983	3022	7268	0,00104	932	9643	9470	31,34	9,940	2,992	3085	7574	0,00102
963	9274	8931	31,03	9,875	2,984	3025	7284	0,00104	933	9663	9499	31,35	9,943	2,993	3088	7589	0,00102
964	9293	8958	31,05	9,879	2,984	3028	7299	0,00104	934	9683	9528	31,37	9,946	2,993	3091	7605	0,00102
965	9312	8986	31,06	9,882	2,985	3032	7314	0,00104	935	9702	9557	31,38	9,950	2,993	3094	7620	0,00102
966	9332	9014	31,08	9,885	2,985	3035	7329	0,00104	936	9722	9586	31,40	9,953	2,994	3098	7636	0,00101
967	9351	9042	31,10	9,889	2,985	3038	7344	0,00103	937	9742	9615	31,42	9,956	2,994	3101	7651	0,00101
968	9370	9070	31,11	9,892	2,986	3041	7359	0,00103	938	9761	9644	31,43	9,960	2,995	3104	7667	0,00101
969	9390	9099	31,13	9,896	2,986	3044	7375	0,00103	939	9781	9674	31,45	9,963	2,995	3107	7682	0,00101
970	9409	9127	31,14	9,899	2,987	3047	7390	0,00103	940	9801	9703	31,46	9,967	2,996	3110	7698	0,00101
971	9428	9155	31,16	9,902	2,987	3050	7405	0,00103	941	9821	9732	31,48	9,970	2,996	3113	7713	0,00101
972	9448	9183	31,18	9,906	2,988	3054	7420	0,00103	942	9841	9762	31,50	9,973	2,997	3116	7729	0,00101
973	9467	9212	31,19	9,909	2,988	3057	7436	0,00103	943	9860	9791	31,51	9,977	2,997	3120	7744	0,00101
974	9487	9240	31,21	9,913	2,989	3060	7451	0,00103	944	9880	9821	31,53	9,980	2,997	3123	7760	0,00101
975	9506	9269	31,22	9,916	2,989	3063	7466	0,00103	945	9900	9851	31,54	9,983	2,998	3126	7775	0,00101
976	9526	9297	31,24	9,919	2,989	3066	7482	0,00102	946	9920	9880	31,56	9,987	2,998	3129	7791	0,00100
977	9545	9326	31,26	9,923	2,990	3069	7497	0,00102	947	9940	9910	31,58	9,990	2,999	3132	7807	0,00100
978	9565	9354	31,27	9,926	2,990	3072	7512	0,00102	948	9960	9940	31,59	9,993	2,999	3135	7823	0,00100
979	9584	9383	31,29	9,930	2,991	3076	7528	0,00102	949	9980	9970	31,61	9,997	3,000	3138	7838	0,00100
980	9604	9412	31,30	9,933	2,991	3079	7543	0,00102	**1000**	10000	10000	31,62	10,00	3,000	3142	7854	0,00100

3. Четвертая и пятая степени

n	n^4	n^5	n	n^4	n^5
1	1	1	51	6 765 201	345 025 251
2	16	32	52	7 311 616	380 204 032
3	81	243	53	7 890 481	418 195 493
4	256	1 024	54	8 503 056	459 165 024
5	625	3 125	55	9 150 625	503 284 375
6	1 296	7 776	56	9 834 496	550 731 776
7	2 401	16 807	57	10 556 001	601 692 057
8	4 096	32 768	58	11 316 496	656 356 768
9	6 561	59 049	59	12 117 361	714 924 299
10	10 000	100 000	**60**	12 960 000	777 600 000
11	14 641	161 051	61	13 845 841	844 596 301
12	20 736	248 832	62	14 776 336	916 132 832
13	28 561	371 293	63	15 752 961	992 436 543
14	38 416	537 824	64	16 777 216	1 073 741 824
15	50 625	759 375	65	17 850 625	1 160 290 625
16	65 536	1 048 576	66	18 974 736	1 252 332 576
17	83 521	1 419 857	67	20 151 121	1 350 125 107
18	104 976	1 889 568	68	21 381 376	1 453 933 568
19	130 321	2 476 099	69	22 667 121	1 564 031 349
20	160 000	3 200 000	**70**	24 010 000	1 680 700 000
21	194 481	4 084 101	71	25 411 681	1 804 229 351
22	234 256	5 153 632	72	26 873 856	1 934 917 632
23	279 841	6 436 343	73	28 398 241	2 073 071 593
24	331 776	7 962 624	74	29 986 576	2 219 006 624
25	390 625	9 765 625	75	31 640 625	2 373 046 875
26	456 976	11 881 376	76	33 362 176	2 535 525 376
27	531 441	14 348 907	77	35 153 041	2 706 784 157
28	614 656	17 210 368	78	37 015 056	2 887 174 368
29	707 281	20 511 149	79	38 950 081	3 077 056 399
30	810 000	24 300 000	**80**	40 960 000	3 276 800 000
31	923 521	28 629 151	81	43 046 721	3 486 784 401
32	1 048 576	33 554 432	82	45 212 176	3 707 398 432
33	1 185 921	39 135 393	83	47 458 321	3 939 040 643
34	1 336 336	45 435 424	84	49 787 136	4 182 119 424
35	1 500 625	52 521 875	85	52 200 625	4 437 053 125
36	1 679 616	60 466 176	86	54 700 816	4 704 270 176
37	1 874 161	69 343 957	87	57 289 761	4 984 209 207
38	2 085 136	79 235 168	88	59 969 536	5 277 319 168
39	2 313 441	90 224 199	89	62 742 241	5 584 059 449
40	2 560 000	102 400 000	**90**	65 610 000	5 904 900 000
41	2 825 761	115 856 201	91	68 574 961	6 240 321 451
42	3 111 696	130 691 232	92	71 639 296	6 590 815 232
43	3 418 801	147 008 443	93	74 805 201	6 956 883 693
44	3 748 096	164 916 224	94	78 074 896	7 339 040 224
45	4 100 625	184 528 125	95	81 450 625	7 737 809 375
46	4 477 456	205 962 976	96	84 934 656	8 153 726 976
47	4 879 681	229 345 007	97	88 529 281	8 587 340 257
48	5 308 416	254 803 968	98	92 236 816	9 039 207 968
49	5 764 801	282 475 249	99	96 059 601	9 509 900 499
50	6 250 000	312 500 000	**100**	100 000 000	10 000 000 000

4. Перевод градусной меры в радианную

Длина дуг окружности радиуса 1

Угол	Дуга	Угол	Дуга	Угол	Дуга
1″	0,000005	1°	0,017453	31°	0,541052
2	0,000010	2	0,034907	32	0,558505
3	0,000015	3	0,052360	33	0,575959
4	0,000019	4	0,069813	34	0,593412
5	0,000024	5	0,087266	35	0,610865
6	0,000029	6	0,104720	36	0,628319
7	0,000034	7	0,122173	37	0,645772
8	0,000039	8	0,139626	38	0,663225
9	0,000044	9	0,157080	39	0,680678
10	0,000048	10	0,174533	40	0,698132
20	0,000097	11	0,191986	45	0,785398
30	0,000145	12	0,209440	50	0,872665
40	0,000194	13	0,226893	55	0,959931
50	0,000242	14	0,244346	60	1,047198
		15	0,261799	65	1,134464
1′	0,000291	16	0,279253	70	1,221730
2	0,000582	17	0,296706	75	1,308997
3	0,000873	18	0,314159	80	1,396263
4	0,001164	19	0,331613	85	1,483530
5	0,001454	20	0,349066	90	1,570796
6	0,001745	21	0,366519	100	1,745329
7	0,002036	22	0,383972	120	2,094395
8	0,002327	23	0,401426	150	2,617994
9	0,002618	24	0,418879	180	3,141593
10	0,002909	25	0,436332	200	3,490659
20	0,005818	26	0,453786	250	4,363323
30	0,008727	27	0,471239	270	4,712389
40	0,011636	28	0,488692	300	5,235988
50	0,014544	29	0,506145	360	6,283185
		30	0,523599	400	6,981317

Примеры:

1) 52°37′23″ = 0,91845 радиана

50°	= 0,872665
2°	= 0,034907
30′	= 0,008727
7′	= 0,002036
20″	= 0,000097
3″	= 0,000015
	0,918447

Вычисления удобно проводить на счетах

2) 5,645 радиана

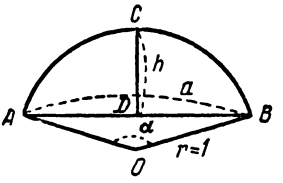
− 5,235988	= 300°
0,409012	
− 0,401426	= 23°
0,007586	
− 0,005818	= 20′
0,001768	
− 0,001745	= 6′
0,000023	= 5″

5,645 радиана = 323°26′5″

Дуга, равная радиусу, имеет 57°17′44″,8 (= 1 радиан).

5. Элементы сегмента круга

Длина дуги, стрелы, хорды сегмента; площадь сегмента; отношения элементов для различных центральных углов окружности радиуса 1



α — центральный угол;
$a = AB$ — хорда;
$l = \smile ACB$ — дуга;
$h = CD$ — стрела;
S — площадь $ACBDA$.

α	l	h	a	S	$\frac{a}{h}$	$\frac{h}{a}$	$\frac{l}{h}$
5°	0,0873	0,0010	0,0872	0,00006	91,6587	0,0109	91,69
10	0,1745	0,0038	0,1743	0,00044	45,8075	0,0218	45,87
15	0,2618	0,0086	0,2611	0,00149	30,5141	0,0328	30,60
20	0,3491	0,0152	0,3473	0,00352	22,8601	0,0437	22,98
25	0,4363	0,0237	0,4329	0,00686	18,2619	0,0548	18,41
30	0,5236	0,0341	0,5176	0,01180	15,1915	0,0658	15,37
35	0,6109	0,0463	0,6014	0,01864	12,9942	0,0770	13,20
40	0,6981	0,0603	0,6840	0,02767	11,3426	0,0882	11,58
45	0,7854	0,0761	0,7654	0,03915	10,0547	0,0995	10,32
50	0,8727	0,0937	0,8452	0,05331	9,0214	0,1109	9,31
55	0,9599	0,1130	0,9235	0,07039	8,1733	0,1224	8,50
60	1,0472	0,1340	1,0000	0,09059	7,4641	0,1340	7,82
65	1,1345	0,1566	1,0746	0,11408	6,8617	0,1457	7,24
70	1,2217	0,1808	1,1472	0,14102	6,3432	0,1577	6,76
75	1,3090	0,2066	1,2175	0,17154	5,8918	0,1697	6,34
80	1,3963	0,2340	1,2856	0,20573	5,4950	0,1820	5,97
85	1,4835	0,2627	1,3512	0,24367	5,1430	0,1944	5,65
90	1,5708	0,2929	1,4142	0,28540	4,8284	0,2071	5,36
95	1,6581	0,3244	1,4746	0,33093	4,5454	0,2200	5,11
100	1,7453	0,3572	1,5321	0,38026	4,2890	0,2332	4,89
105	1,8326	0,3912	1,5867	0,43333	4,0556	0,2466	4,68
110	1,9199	0,4264	1,6383	0,49008	3,8420	0,2603	4,50
115	2,0071	0,4627	1,6868	0,55041	3,6455	0,2743	4,34
120	2,0944	0,5000	1,7321	0,61418	3,4641	0,2887	4,19
125	2,1817	0,5383	1,7740	0,68125	3,2960	0,3034	4,05
130	2,2689	0,5774	1,8126	0,75144	3,1394	0,3185	3,93
135	2,3562	0,6173	1,8478	0,82454	2,9932	0,3341	3,82
140	2,4435	0,6580	1,8794	0,90034	2,8563	0,3501	3,71
145	2,5307	0,6993	1,9074	0,97858	2,7277	0,3662	3,62
150	2,6180	0,7412	1,9319	1,05900	2,6065	0,3837	3,53
155	2,7053	0,7836	1,9526	1,14132	2,4920	0,4013	3,45
160	2,7925	0,8264	1,9696	1,22525	2,3835	0,4196	3,38
165	2,8798	0,8695	1,9829	1,31049	2,2806	0,4385	3,31
170	2,9671	0,9128	1,9924	1,39671	2,1826	0,4588	3,25
175	3,0543	0,9564	1,9981	1,48359	2,0892	0,4787	3,19
180	3,1416	1,0000	2,0000	1,57080	2,0000	0,5000	3,14

6. Тригонометрические функции

а) Синус и косинус

Угол	sin	cos		Угол	sin	cos		Угол	sin	cos	
0°0′	0,000	1,000	90° 0′	8°0′	0,139	0,990	82° 0′	16°0′	0,276	0,961	74° 0′
10	0,003	1,000	89°50	10	0,142	0,990	81°50	10	0,278	0,960	73°50
20	0,006	1,000	40	20	0,145	0,989	40	20	0,281	0,960	40
30	0,009	1,000	30	30	0,148	0,989	30	30	0,284	0,959	30
40	0,012	1,000	20	40	0,151	0,989	20	40	0,287	0,958	20
50	0,015	1,000	10	50	0,154	0,988	10	50	0,290	0,957	10
1°0′	0,017	1,000	89° 0′	9°0′	0,156	0,988	81° 0′	17°0′	0,292	0,956	73° 0′
10	0,020	1,000	88°50	10	0,159	0,987	80°50	10	0,295	0,955	72°50
20	0,023	1,000	40	20	0,162	0,987	40	20	0,298	0,955	40
30	0,026	1,000	30	30	0,165	0,986	30	30	0,301	0,954	30
40	0,029	1,000	20	40	0,168	0,986	20	40	0,303	0,953	20
50	0,032	0,999	10	50	0,171	0,985	10	50	0,306	0,952	10
2°0′	0,035	0,999	88° 0′	10°0′	0,174	0,985	80° 0′	18°0′	0,309	0,951	72° 0′
10	0,038	0,999	87°50	10	0,177	0,984	79°50	10	0,312	0,950	71°50
20	0,041	0,999	40	20	0,179	0,984	40	20	0,315	0,949	40
30	0,044	0,999	30	30	0,182	0,983	30	30	0,317	0,948	30
40	0,047	0,999	20	40	0,185	0,983	20	40	0,320	0,947	20
50	0,049	0,999	10	50	0,188	0,982	10	50	0,323	0,946	10
3°0′	0,052	0,999	87° 0′	11°0′	0,191	0,982	79° 0′	19°0′	0,326	0,946	71° 0′
10	0,055	0,998	86°50	10	0,194	0,981	78°50	10	0,328	0,945	70°50
20	0,058	0,998	40	20	0,197	0,981	40	20	0,331	0,944	40
30	0,061	0,998	30	30	0,199	0,980	30	30	0,334	0,943	30
40	0,064	0,998	20	40	0,202	0,979	20	40	0,337	0,942	20
50	0,067	0,998	10	50	0,205	0,979	10	50	0,339	0,941	10
4°0′	0,070	0,998	86° 0′	12°0′	0,208	0,978	78° 0′	20°0′	0,342	0,940	70° 0′
10	0,073	0,997	85°50	10	0,211	0,978	77°50	10	0,345	0,939	69°50
20	0,076	0,997	40	20	0,214	0,977	40	20	0,347	0,938	40
30	0,078	0,997	30	30	0,216	0,976	30	30	0,350	0,937	30
40	0,081	0,997	20	40	0,219	0,976	20	40	0,353	0,936	20
50	0,084	0,996	10	50	0,222	0,975	10	50	0,356	0,935	10
5°0′	0,087	0,996	85° 0′	13°0′	0,225	0,974	77° 0′	21°0′	0,358	0,934	69° 0′
10	0,090	0,996	84°50	10	0,228	0,974	76°50	10	0,361	0,933	68°50
20	0,093	0,996	40	20	0,231	0,973	40	20	0,364	0,931	40
30	0,096	0,995	30	30	0,233	0,972	30	30	0,367	0,930	30
40	0,099	0,995	20	40	0,236	0,972	20	40	0,369	0,929	20
50	0,102	0,995	10	50	0,239	0,971	10	50	0,372	0,928	10
6°0′	0,105	0,995	84° 0′	14°0′	0,242	0,970	76° 0′	22°0′	0,375	0,927	68° 0′
10	0,107	0,994	83°50	10	0,245	0,970	75°50	10	0,377	0,926	67°50
20	0,110	0,994	40	20	0,248	0,969	40	20	0,380	0,925	40
30	0,113	0,994	30	30	0,250	0,968	30	30	0,383	0,924	30
40	0,116	0,993	20	40	0,253	0,967	20	40	0,385	0,923	20
50	0,119	0,993	10	50	0,256	0,967	10	50	0,388	0,922	10
7°0′	0,122	0,993	83° 0′	15°0′	0,259	0,966	75° 0′	23°0′	0,391	0,921	67° 0′
10	0,125	0,992	82°50	10	0,262	0,965	74°50	10	0,393	0,919	66°50
20	0,128	0,992	40	20	0,264	0,964	40	20	0,396	0,918	40
30	0,131	0,991	30	30	0,267	0,964	30	30	0,399	0,917	30
40	0,133	0,991	20	40	0,270	0,963	20	40	0,401	0,916	20
50	0,136	0,991	10	50	0,273	0,962	10	50	0,404	0,915	10
8°0′	0,139	0,990	82° 0′	16°0′	0,276	0,961	74° 0′	24°0′	0,407	0,914	66° 0′
	cos	sin	Угол		cos	sin	Угол		cos	sin	Угол

Синус и косинус *Продолжение*

Угол	sin	cos		Угол	sin	cos		Угол	sin	cos	
24°0′	0,407	0,914	66° 0′	32°0′	0,530	0,848	58° 0′	40°0′	0,643	0,766	50° 0′
10	0,409	0,912	65°50	10	0,532	0,847	57°50	10	0,645	0,764	49°50
20	0,412	0,911	40	20	0,535	0,845	40	20	0,647	0,762	40
30	0,415	0,910	30	30	0,537	0,843	30	30	0,649	0,760	30
40	0,417	0,909	20	40	0,540	0,842	20	40	0,652	0,759	20
50	0,420	0,908	10	50	0,542	0,840	10	50	0,654	0,757	10
25°0′	0,423	0,906	65° 0′	33°0′	0,545	0,839	57° 0′	41°0′	0,656	0,755	49° 0′
10	0,425	0,905	64°50	10	0,547	0,837	56°50	10	0,658	0,753	48°50
20	0,428	0,904	40	20	0,550	0,835	40	20	0,660	0,751	40
30	0,431	0,903	30	30	0,552	0,834	30	30	0,663	0,749	30
40	0,433	0,901	20	40	0,554	0,832	20	40	0,665	0,747	20
50	0,436	0,900	10	50	0,557	0,831	10	50	0,667	0,745	10
26°0′	0,438	0,899	64° 0′	34°0′	0,559	0,829	56° 0′	42°0′	0,669	0,743	48° 0′
10	0,441	0,898	63°50	10	0,562	0,827	55°50	10	0,671	0,741	47°50
20	0,444	0,896	40	20	0,564	0,826	40	20	0,673	0,739	40
30	0,446	0,895	30	30	0,566	0,824	30	30	0,676	0,737	30
40	0,449	0,894	20	40	0,569	0,822	20	40	0,678	0,735	20
50	0,451	0,892	10	50	0,571	0,821	10	50	0,680	0,733	10
27°0′	0,454	0,891	63° 0′	35°0′	0,574	0,819	55° 0′	43°0′	0,682	0,731	47° 0′
10	0,457	0,890	62°50	10	0,576	0,817	54°50	10	0,684	0,729	46°50
20	0,459	0,888	40	20	0,578	0,816	40	20	0,686	0,727	40
30	0,462	0,887	30	30	0,581	0,814	30	30	0,688	0,725	30
40	0,464	0,886	20	40	0,583	0,812	20	40	0,690	0,723	20
50	0,467	0,884	10	50	0,585	0,811	10	50	0,693	0,721	10
28°0′	0,469	0,883	62° 0′	36°0′	0,588	0,809	54° 0′	44°0′	0,695	0,719	46° 0′
10	0,472	0,882	61°50	10	0,590	0,807	53°50	10	0,697	0,717	45°50
20	0,475	0,880	40	20	0,592	0,806	40	20	0,699	0,715	40
30	0,477	0,879	30	30	0,595	0,804	30	30	0,701	0,713	30
40	0,480	0,877	20	40	0,597	0,802	20	40	0,703	0,711	20
50	0,482	0,876	10	50	0,599	0,800	10	50	0,705	0,709	10
29°0′	0,485	0,875	61° 0′	37°0′	0,602	0,799	53° 0′	45°0′	0,707	0,707	45° 0′
10	0,487	0,873	60°50	10	0,604	0,797	52°50				
20	0,490	0,872	40	20	0,606	0,795	40				
30	0,492	0,870	30	30	0,609	0,793	30				
40	0,495	0,869	20	40	0,611	0,792	20				
50	0,497	0,867	10	50	0,613	0,790	10				
30°0′	0,500	0,866	60° 0′	38°0′	0,616	0,788	52° 0′				
10	0,503	0,865	59°50	10	0,618	0,786	51°50				
20	0,505	0,863	40	20	0,620	0,784	40				
30	0,508	0,862	30	30	0,623	0,783	30				
40	0,510	0,860	20	40	0,625	0,781	20				
50	0,513	0,859	10	50	0,627	0,779	10				
31°0′	0,515	0,857	59° 0′	39°0′	0,629	0,777	51° 0′				
10	0,518	0,856	58°50	10	0,632	0,775	50°50				
20	0,520	0,854	40	20	0,634	0,773	40				
30	0,522	0,853	30	30	0,636	0,772	30				
40	0,525	0,851	20	40	0,638	0,770	20				
50	0,527	0,850	10	50	0,641	0,768	10				
32°0′	0,530	0,848	58° 0′	40°0′	0,643	0,766	50° 0′				

	cos	sin	Угол		cos	sin	Угол		cos	sin	Угол

б) Тангенс и котангенс

Угол	tg	ctg		Угол	tg	ctg		Угол	tg	ctg	
0°0′	0,000	∞	90° 0′	8°0′	0,141	7,115	82° 0′	16°0′	0,287	3,487	74° 0′
10	0,003	343,8	89°50	10	0,144	6,968	81°50	10	0,290	3,450	73°50
20	0,006	171,9	40	20	0,146	6,827	40	20	0,293	3,412	40
30	0,009	114,6	30	30	0,149	6,691	30	30	0,296	3,376	30
40	0,012	85,94	20	40	0,152	6,561	20	40	0,299	3,340	20
50	0,015	68,75	10	50	0,155	6,435	10	50	0,303	3,305	10
1°0′	0,017	57,29	89° 0′	9°0′	0,158	6,314	81° 0′	17°0′	0,306	3,271	73° 0′
10	0,020	49,10	88°50	10	0,161	6,197	80°50	10	0,309	3,237	72°50
20	0,023	42,96	40	20	0,164	6,084	40	20	0,312	3,204	40
30	0,026	38,19	30	30	0,167	5,976	30	30	0,315	3,172	30
40	0,029	34,37	20	40	0,170	5,871	20	40	0,319	3,140	20
50	0,032	31,24	10	50	0,173	5,769	10	50	0,322	3,108	10
2°0′	0,035	28,64	88° 0′	10°0′	0,176	5,671	80° 0′	18°0′	0,325	3,078	72° 0′
10	0,038	26,43	87°50	10	0,179	5,576	79°50	10	0,328	3,047	71°50
20	0,041	24,54	40	20	0,182	5,485	40	20	0,331	3,018	40
30	0,044	22,90	30	30	0,185	5,396	30	30	0,335	2,989	30
40	0,047	21,47	20	40	0,188	5,309	20	40	0,338	2,960	20
50	0,049	20,21	10	50	0,191	5,226	10	50	0,341	2,932	10
3°0′	0,052	19,08	87° 0′	11°0′	0,194	5,145	79° 0′	19°0′	0,344	2,904	71° 0′
10	0,055	18,07	86°50	10	0,197	5,066	78°50	10	0,348	2,877	70°50
20	0,058	17,17	40	20	0,200	4,989	40	20	0,351	2,850	40
30	0,061	16,35	30	30	0,203	4,915	30	30	0,354	2,824	30
40	0,064	15,60	20	40	0,206	4,843	20	40	0,357	2,798	20
50	0,067	14,92	10	50	0,210	4,773	10	50	0,361	2,773	10
4°0′	0,070	14,30	86° 0′	12°0′	0,213	4,705	78° 0′	20°0′	0,364	2,747	70° 0′
10	0,073	13,73	85°50	10	0,216	4,638	77°50	10	0,367	2,723	69°50
20	0,076	13,20	40	20	0,219	4,574	40	20	0,371	2,699	40
30	0,079	12,71	30	30	0,222	4,511	30	30	0,374	2,675	30
40	0,082	12,25	20	40	0,225	4,449	20	40	0,377	2,651	20
50	0,085	11,83	10	50	0,228	4,390	10	50	0,381	2,628	10
5°0′	0,087	11,43	85° 0′	13°0′	0,231	4,331	77° 0′	21°0′	0,384	2,605	69° 0′
10	0,090	11,06	84°50	10	0,234	4,275	76°50	10	0,387	2,583	68°50
20	0,093	10,71	40	20	0,237	4,219	40	20	0,391	2,560	40
30	0,096	10,39	30	30	0,240	4,165	30	30	0,394	2,539	30
40	0,099	10,08	20	40	0,243	4,113	20	40	0,397	2,517	20
50	0,102	9,788	10	50	0,246	4,061	10	50	0,401	2,496	10
6°0′	0,105	9,514	84° 0′	14°0′	0,249	4,011	76° 0′	22°0′	0,404	2,475	68° 0′
10	0,108	9,255	83°50	10	0,252	3,962	75°50	10	0,407	2,455	67°50
20	0,111	9,010	40	20	0,256	3,914	40	20	0,411	2,434	40
30	0,114	8,777	30	30	0,259	3,867	30	30	0,414	2,414	30
40	0,117	8,556	20	40	0,262	3,821	20	40	0,418	2,394	20
50	0,120	8,345	10	50	0,265	3,776	10	50	0,421	2,375	10
7°0′	0,123	8,144	83° 0′	15°0′	0,268	3,732	75° 0′	23°0′	0,424	2,356	67° 0′
10	0,126	7,953	82°50	10	0,271	3,689	74°50	10	0,428	2,337	66°50
20	0,129	7,770	40	20	0,274	3,647	40	20	0,431	2,318	40
30	0,132	7,596	30	30	0,277	3,606	30	30	0,435	2,300	30
40	0,135	7,429	20	40	0,280	3,566	20	40	0,438	2,282	20
50	0,138	7,269	10	50	0,284	3,526	10	50	0,442	2,264	10
8°0′	0,141	7,115	82° 0′	16°0′	0,287	3,487	74° 0′	24°0′	0,445	2,246	66° 0′

	ctg	tg	Угол		ctg	tg	Угол		ctg	tg	Угол

Тангенс и котангенс *Продолжение*

Угол	tg	ctg		Угол	tg	ctg		Угол	tg	ctg	
24°0′	0,445	2,246	66° 0′	32°0′	0,625	1,600	58° 0′	40°0′	0,839	1,192	50° 0′
10	0,449	2,229	65°50	10	0,629	1,590	57°50	10	0,844	1,185	49°50
20	0,452	2,211	40	20	0,633	1,580	40	20	0,849	1,178	40
30	0,456	2,194	30	30	0,637	1,570	30	30	0,854	1,171	30
40	0,459	2,177	20	40	0,641	1,560	20	40	0,859	1,164	20
50	0,463	2,161	10	50	0,645	1,550	10	50	0,864	1,157	10
25°0′	0,466	2,145	65° 0′	33°0′	0,649	1,540	57° 0′	41°0′	0,869	1,150	49° 0′
10	0,470	2,128	64°50	10	0,654	1,530	56°50	10	0,874	1,144	48°50
20	0,473	2,112	40	20	0,658	1,520	40	20	0,880	1,137	40
30	0,477	2,097	30	30	0,662	1,511	30	30	0,885	1,130	30
40	0,481	2,081	20	40	0,666	1,501	20	40	0,890	1,124	20
50	0,484	2,066	10	50	0,670	1,492	10	50	0,895	1,117	10
26°0′	0,488	2,050	64° 0′	34°0′	0,675	1,483	56° 0′	42°0′	0,900	1,111	48° 0′
10	0,491	2,035	63°50	10	0,679	1,473	55°50	10	0,906	1,104	47°50
20	0,495	2,020	40	20	0,683	1,464	40	20	0,911	1,098	40
30	0,499	2,006	30	30	0,687	1,455	30	30	0,916	1,091	30
40	0,502	1,991	20	40	0,692	1,446	20	40	0,922	1,085	20
50	0,506	1,977	10	50	0,696	1,437	10	50	0,927	1,079	10
27°0′	0,510	1,963	63° 0′	35°0′	0,700	1,428	55° 0′	43°0′	0,933	1,072	47° 0′
10	0,513	1,949	62°50	10	0,705	1,419	54°50	10	0,938	1,066	46°50
20	0,517	1,935	40	20	0,709	1,411	40	20	0,943	1,060	40
30	0,521	1,921	30	30	0,713	1,402	30	30	0,949	1,054	30
40	0,524	1,907	20	40	0,718	1,393	20	40	0,955	1,048	20
50	0,528	1,894	10	50	0,722	1,385	10	50	0,960	1,042	10
28°0′	0,532	1,881	62° 0′	36°0′	0,727	1,376	54° 0′	44°0′	0,966	1,036	46° 0′
10	0,535	1,868	61°50	10	0,731	1,368	53°50	10	0,971	1,030	45°50
20	0,539	1,855	40	20	0,735	1,360	40	20	0,977	1,024	40
30	0,543	1,842	30	30	0,740	1,351	30	30	0,983	1,018	30
40	0,547	1,829	20	40	0,744	1,343	20	40	0,988	1,012	20
50	0,551	1,816	10	50	0,749	1,335	10	50	0,994	1,006	10
29°0′	0,554	1,804	61° 0′	37°0′	0,754	1,327	53° 0′	45°0′	1,000	1,000	45° 0′
10	0,558	1,792	60°50	10	0,758	1,319	52°50				
20	0,562	1,780	40	20	0,763	1,311	40				
30	0,566	1,767	30	30	0,767	1,303	30				
40	0,570	1,756	20	40	0,772	1,295	20				
50	0,573	1,744	10	50	0,777	1,288	10				
30°0′	0,577	1,732	60° 0′	38°0′	0,781	1,280	52° 0′				
10	0,581	1,720	59°50	10	0,786	1,272	51°50				
20	0,585	1,709	40	20	0,791	1,265	40				
30	0,589	1,698	30	30	0,795	1,257	30				
40	0,593	1,686	20	40	0,800	1,250	20				
50	0,597	1,675	10	50	0,805	1,242	10				
31°0′	0,601	1,664	59° 0′	39°0′	0,810	1,235	51° 0′				
10	0,605	1,653	58°50	10	0,815	1,228	50°50				
20	0,609	1,643	40	20	0,819	1,220	40				
30	0,613	1,632	30	30	0,824	1,213	30				
40	0,617	1,621	20	40	0,829	1,206	20				
50	0,621	1,611	10	50	0,834	1,199	10				
32°0′	0,625	1,600	58° 0′	40°0′	0,839	1,192	50° 0′				

	ctg	tg	Угол		ctg	tg	Угол		ctg	tg	Угол

7. Натуральные логарифмы

N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	$-\infty$	0,0000	0,6931	1,0986	1,3863	1,6094	1,7918	1,9459	2,0794	2,1972
1	2,3026	2,3979	2,4849	2,5649	2,6391	2,7081	2,7726	2,8332	2,8904	2,9444
2	2,9957	3,0445	3,0910	3,1355	3,1781	3,2189	3,2581	3,2958	3,3322	3,3673
3	3,4012	3,4340	3,4657	3,4965	3,5264	3,5553	3,5835	3,6109	3,6376	3,6636
4	3,6889	3,7136	3,7377	3,7612	3,7842	3,8067	3,8286	3,8501	3,8712	3,8918
5	3,9120	3,9318	3,9512	3,9703	3,9890	4,0073	4,0254	4,0431	4,0604	4,0775
6	4,0943	4,1109	4,1271	4,1431	4,1589	4,1744	4,1897	4,2047	4,2195	4,2341
7	4,2485	4,2627	4,2767	4,2905	4,3041	4,3175	4,3307	4,3438	4,3567	4,3694
8	4,3820	4,3944	4,4067	4,4188	4,4308	4,4427	4,4543	4,4659	4,4773	4,4886
9	4,4998	4,5109	4,5218	4,5326	4,5433	4,5539	4,5643	4,5747	4,5850	4,5951
10	4,6052	4,6151	4,6250	4,6347	4,6444	4,6540	4,6634	4,6728	4,6821	4,6913
11	4,7005	4,7095	4,7185	4,7274	4,7362	4,7449	4,7536	4,7622	4,7707	4,7791
12	4,7875	4,7958	4,8040	4,8122	4,8203	4,8283	4,8363	4,8442	4,8520	4,8598
13	4,8675	4,8752	4,8828	4,8903	4,8978	4,9053	4,9127	4,9200	4,9273	4,9345
14	4,9416	4,9488	4,9558	4,9628	4,9698	4,9767	4,9836	4,9904	4,9972	5,0039
15	5,0106	5,0173	5,0239	5,0304	5,0370	5,0434	5,0499	5,0562	5,0626	5,0689
16	5,0752	5,0814	5,0876	5,0938	5,0999	5,1059	5,1120	5,1180	5,1240	5,1299
17	5,1358	5,1417	5,1475	5,1533	5,1591	5,1648	5,1705	5,1761	5,1818	5,1874
18	5,1930	5,1985	5,2040	5,2095	5,2149	5,2204	5,2257	5,2311	5,2364	5,2417
19	5,2470	5,2523	5,2575	5,2627	5,2679	5,2730	5,2781	5,2832	5,2883	5,2933
20	5,2983	5,3033	5,3083	5,3132	5,3181	5,3230	5,3279	5,3327	5,3375	5,3423
21	5,3471	5,3519	5,3566	5,3613	5,3660	5,3706	5,3753	5,3799	5,3845	5,3891
22	5,3936	5,3982	5,4027	5,4072	5,4116	5,4161	5,4205	5,4250	5,4293	5,4337
23	5,4381	5,4424	5,4467	5,4510	5,4553	5,4596	5,4638	5,4681	5,4723	5,4765
24	5,4806	5,4848	5,4889	5,4931	5,4972	5,5013	5,5053	5,5094	5,5134	5,5175

N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
25	5,5215	5,5255	5,5294	5,5334	5,5373	5,5413	5,5452	5,5491	5,5530	5,5568
26	5,5607	5,5645	5,5683	5,5722	5,5759	5,5797	5,5835	5,5872	5,5910	5,5947
27	5,5984	5,6021	5,6058	5,6095	5,6131	5,6168	5,6204	5,6240	5,6276	5,6312
28	5,6348	5,6384	5,6419	5,6454	5,6490	5,6525	5,6560	5,6595	5,6630	5,6664
29	5,6699	5,6733	5,6768	5,6802	5,6836	5,6870	5,6904	5,6937	5,6971	5,7004
30	5,7038	5,7071	5,7104	5,7137	5,7170	5,7203	5,7236	5,7268	5,7301	5,7333
31	5,7366	5,7398	5,7430	5,7462	5,7494	5,7526	5,7557	5,7589	5,7621	5,7652
32	5,7683	5,7714	5,7746	5,7777	5,7807	5,7838	5,7869	5,7900	5,7930	5,7961
33	5,7991	5,8021	5,8051	5,8081	5,8111	5,8141	5,8171	5,8201	5,8230	5,8260
34	5,8289	5,8319	5,8348	5,8377	5,8406	5,8435	5,8464	5,8493	5,8522	5,8551
35	5,8579	5,8608	5,8636	5,8665	5,8693	5,8721	5,8749	5,8777	5,8805	5,8833
36	5,8861	5,8889	5,8916	5,8944	5,8972	5,8999	5,9026	5,9054	5,9081	5,9108
37	5,9135	5,9162	5,9189	5,9216	5,9243	5,9269	5,9296	5,9322	5,9349	5,9375
38	5,9402	5,9428	5,9454	5,9480	5,9506	5,9532	5,9558	5,9584	5,9610	5,9636
39	5,9661	5,9687	5,9713	5,9738	5,9764	5,9789	5,9814	5,9839	5,9865	5,9890
40	5,9915	5,9940	5,9965	5,9989	6,0014	6,0039	6,0064	6,0088	6,0113	6,0137
41	6,0162	6,0186	6,0210	6,0234	6,0259	6,0283	6,0307	6,0331	6,0355	6,0379
42	6,0403	6,0426	6,0450	6,0474	6,0497	6,0521	6,0544	6,0568	6,0591	6,0615
43	6,0638	6,0661	6,0684	6,0707	6,0730	6,0753	6,0776	6,0799	6,0822	6,0845
44	6,0868	6,0890	6,0913	6,0936	6,0958	6,0981	6,1003	6,1026	6,1048	6,1070
45	6,1092	6,1115	6,1137	6,1159	6,1181	6,1203	6,1225	6,1247	6,1269	6,1291
46	6,1312	6,1334	6,1356	6,1377	6,1399	6,1420	6,1442	6,1463	6,1485	6,1506
47	6,1527	6,1549	6,1570	6,1591	6,1612	6,1633	6,1654	6,1675	6,1696	6,1717
48	6,1738	6,1759	6,1779	6,1800	6,1821	6,1841	6,1862	6,1883	6,1903	6,1924
49	6,1944	6,1964	6,1985	6,2005	6,2025	6,2046	6,2066	6,2086	6,2106	6,2126

$\ln 10 = 2{,}30258509$, $\ln 10^2 = 4{,}6052$, $\ln 10^3 = 6{,}9078$, $\ln 10^4 = 9{,}2103$, $\ln 10^5 = 11{,}5129$, $\ln 10^6 = 13{,}8155$.

Примеры: $\ln 43\,500 = \ln 435 + \ln 10^2 = 6{,}0753 + 4{,}6052 = 10{,}6805$.

$\ln 0{,}435 = \ln 435 - \ln 10^3 = 6{,}0753 - 6{,}9078 = -0{,}8325$.

Натуральные логарифмы

Продолжение

N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
50	6,2146	6,2166	6,2186	6,2206	6,2226	6,2246	6,2265	6,2285	6,2305	6,2324
51	6,2344	6,2364	6,2383	6,2403	6,2422	6,2442	6,2461	6,2480	6,2500	6,2519
52	6,2538	6,2558	6,2577	6,2596	6,2615	6,2634	6,2653	6,2672	6,2691	6,2710
53	6,2729	6,2748	6,2766	6,2785	6,2804	6,2823	6,2841	6,2860	6,2879	6,2897
54	6,2916	6,2934	6,2953	6,2971	6,2989	6,3008	6,3026	6,3044	6,3063	6,3081
55	6,3099	6,3117	6,3135	6,3154	6,3172	6,3190	6,3208	6,3226	6,3244	6,3261
56	6,3279	6,3297	6,3315	6,3333	6,3351	6,3368	6,3386	6,3404	6,3421	6,3439
57	6,3456	6,3474	6,3491	6,3509	6,3526	6,3544	6,3561	6,3578	6,3596	6,3613
58	6,3630	6,3648	6,3665	6,3682	6,3699	6,3716	6,3733	6,3750	6,3767	6,3784
59	6,3801	6,3818	6,3835	6,3852	6,3869	6,3886	6,3902	6,3919	6,3936	6,3953
60	6,3969	6,3986	6,4003	6,4019	6,4036	6,4052	6,4069	6,4085	6,4102	6,4118
61	6,4135	6,4151	6,4167	6,4184	6,4200	6,4216	6,4232	6,4249	6,4265	6,4281
62	6,4297	6,4313	6,4329	6,4345	6,4362	6,4378	6,4394	6,4409	6,4425	6,4441
63	6,4457	6,4473	6,4489	6,4505	6,4520	6,4536	6,4552	6,4568	6,4583	6,4599
64	6,4615	6,4630	6,4646	6,4661	6,4677	6,4693	6,4708	6,4723	6,4739	6,4754
65	6,4770	6,4785	6,4800	6,4816	6,4831	6,4846	6,4862	6,4877	6,4892	6,4907
66	6,4922	6,4938	6,4953	6,4968	6,4983	6,4998	6,5013	6,5028	6,5043	6,5058
67	6,5073	6,5088	6,5103	6,5117	6,5132	6,5147	6,5162	6,5177	6,5191	6,5206
68	6,5221	6,5236	6,5250	6,5265	6,5280	6,5294	6,5309	6,5323	6,5338	6,5352
69	6,5367	6,5381	6,5396	6,5410	6,5425	6,5439	6,5453	6,5468	6,5482	6,5497
70	6,5511	6,5525	6,5539	6,5554	6,5568	6,5582	6,5596	6,5610	6,5624	6,5639
71	6,5653	6,5667	6,5681	6,5695	6,5709	6,5723	6,5737	6,5751	6,5765	6,5779
72	6,5793	6,5806	6,5820	6,5834	6,5848	6,5862	6,5876	6,5889	6,5903	6,5917
73	6,5930	6,5944	6,5958	6,5971	6,5985	6,5999	6,6012	6,6026	6,6039	6,6053
74	6,6067	6,6080	6,6093	6,6107	6,6120	6,6134	6,6147	6,6161	6,6174	6,6187

N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
75	6,6201	6,6214	6,6227	6,6241	6,6254	6,6267	6,6280	6,6294	6,6307	6,6320
76	6,6333	6,6346	6,6359	6,6373	6,6386	6,6399	6,6412	6,6425	6,6438	6,6451
77	6,6464	6,6477	6,6490	6,6503	6,6516	6,6529	6,6542	6,6554	6,6567	6,6580
78	6,6593	6,6606	6,6619	6,6631	6,6644	6,6657	6,6670	6,6682	6,6695	6,6708
79	6,6720	6,6733	6,6746	6,6758	6,6771	6,6783	6,6796	6,6809	6,6821	6,6834
80	6,6846	6,6859	6,6871	6,6884	6,6896	6,6908	6,6921	6,6933	6,6946	6,6958
81	6,6970	6,6983	6,6995	6,7007	6,7020	6,7032	6,7044	6,7056	6,7069	6,7081
82	6,7093	6,7105	6,7117	6,7130	6,7142	6,7154	6,7166	6,7178	6,7190	6,7202
83	6,7214	6,7226	6,7238	6,7250	6,7262	6,7274	6,7286	6,7298	6,7310	6,7322
84	6,7334	6,7346	6,7358	6,7370	6,7382	6,7393	6,7405	6,7417	6,7429	6,7441
85	6,7452	6,7464	6,7476	6,7488	6,7499	6,7511	6,7523	6,7534	6,7546	6,7558
86	6,7569	6,7581	6,7593	6,7604	6,7616	6,7627	6,7639	6,7650	6,7662	6,7673
87	6,7685	6,7696	6,7708	6,7719	6,7731	6,7742	6,7754	6,7765	6,7776	6,7788
88	6,7799	6,7811	6,7822	6,7833	6,7845	6,7856	6,7867	6,7878	6,7890	6,7901
89	6,7912	6,7923	6,7935	6,7946	6,7957	6,7968	6,7979	6,7991	6,8002	6,8013
90	6,8024	6,8035	6,8046	6,8057	6,8068	6,8079	6,8090	6,8101	6,8112	6,8123
91	6,8134	6,8145	6,8156	6,8167	6,8178	6,8189	6,8200	6,8211	6,8222	6,8233
92	6,8244	6,8255	6,8265	6,8276	6,8287	6,8298	6,8309	6,8320	6,8330	6,8341
93	6,8352	6,8363	6,8373	6,8384	6,8395	6,8405	6,8416	6,8427	6,8437	6,8448
94	6,8459	6,8469	6,8480	6,8491	6,8501	6,8512	6,8522	6,8533	6,8544	6,8554
95	6,8565	6,8575	6,8586	6,8596	6,8607	6,8617	6,8628	6,8638	6,8648	6,8659
96	6,8669	6,8680	6,8690	6,8701	6,8711	6,8721	6,8732	6,8742	6,8752	6,8763
97	6,8773	6,8783	6,8794	6,8804	6,8814	6,8824	6,8835	6,8845	6,8855	6,8865
98	6,8876	6,8886	6,8896	6,8906	6,8916	6,8926	6,8937	6,8947	6,8957	6,8967
99	6,8977	6,8987	6,8997	6,9007	6,9017	6,9027	6,9037	6,9048	6,9058	6,9068

$\ln 10 = 2{,}30258509$, $\ln 10^2 = 4{,}6052$, $\ln 10^3 = 6{,}9078$, $\ln 10^4 = 9{,}2103$, $\ln 10^5 = 11{,}5129$, $\ln 10^6 = 13{,}8155$.

Примеры: $\ln 7620 = \ln 762 + \ln 10 = 6{,}6359 + 2{,}3026 = 8{,}9385$.

$\ln 0{,}0762 = \ln 762 - \ln 10^4 = 6{,}6359 - 9{,}2103 = -2{,}5744$.

8. Показательные и гиперболические функции

Гиперболический синус: $\operatorname{sh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$.

Гиперболический косинус: $\operatorname{ch} x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$.

Гиперболический тангенс: $\operatorname{th} x = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$.

x	e^x	e^{-x}	sh x	ch x	th x	x	e^x	e^{-x}	sh x	ch x	th x
0	1,000	1,000	0,000	1,000	0,000	3	20,09	0,0498	10,02	10,07	
0,1	1,105	0,905	0,100	1,005	0,100	3,1	22,20	0,0450	11,08	11,12	
0,2	1,221	0,819	0,201	1,020	0,197	3,2	24,53	0,0408	12,25	12,29	
0,3	1,350	0,741	0,305	1,045	0,291	3,3	27,11	0,0369	13,54	13,57	
0,4	1,492	0,670	0,411	1,081	0,380	3,4	29,96	0,0334	14,97	15,00	
0,5	1,649	0,607	0,521	1,128	0,462	3,5	33,12	0,0302	16,54	16,57	
0,6	1,822	0,549	0,637	1,185	0,537	3,6	36,60	0,0273	18,22	18,31	
0,7	2,014	0,497	0,759	1,255	0,604	3,7	40,45	0,0247	20,21	20,24	
0,8	2,226	0,449	0,888	1,337	0,664	3,8	44,70	0,0224	22,34	22,36	
0,9	2,460	0,407	1,027	1,433	0,716	3,9	49,40	0,0202	24,69	24,71	
1	2,718	0,368	1,175	1,543	0,762	4	54,60	0,0183	27,29	27,31	
1,1	3,004	0,333	1,336	1,669	0,800	4,1	60,34	0,0166	30,16	30,18	
1,2	3,320	0,301	1,509	1,811	0,834	4,2	66,69	0,0150	33,34	33,35	
1,3	3,669	0,273	1,698	1,971	0,862	4,3	73,70	0,0136	36,84	36,86	
1,4	4,055	0,247	1,904	2,151	0,885	4,4	81,45	0,0123	40,72	40,73	
1,5	4,482	0,223	2,129	2,352	0,905	4,5	90,02	0,0111	45,00	45,01	
1,6	4,953	0,202	2,376	2,577	0,922	4,6	99,48	0,0101	49,74	49,75	
1,7	5,474	0,183	2,646	2,828	0,935	4,7	109,9	0,0091	54,97	54,98	
1,8	6,050	0,165	2,942	3,107	0,947	4,8	121,5	0,0082	60,75	60,76	
1,9	6,686	0,150	3,268	3,418	0,956	4,9	134,3	0,0074	67,14	67,15	
2	7,389	0,135	3,627	3,762	0,964	5	148,4	0,0067	74,20	74,21	
2,1	8,166	0,122	4,022	4,144	0,970	5,1	164,0	0,0061	82,01	82,01	
2,2	9,025	0,111	4,457	4,568	0,976	5,2	181,3	0,0055	90,63	90,64	
2,3	9,974	0,100	4,937	5,037	0,980	5,3	200,3	0,0050	100,2	100,2	
2,4	11,02	0,0907	5,466	5,557	0,984	5,4	221,4	0,0045	110,7	110,7	
2,5	12,18	0,0821	6,050	6,132	0,987	5,5	244,7	0,0041	122,3	122,3	
2,6	13,46	0,0743	6,695	6,769	0,989	5,6	270,4	0,0037	135,2	135,2	
2,7	14,88	0,0672	7,406	7,473	0,991	5,7	298,9	0,0033	149,4	149,4	
2,8	16,44	0,0608	8,192	8,253	0,993	5,8	330,3	0,0030	165,1	165,2	
2,9	18,17	0,0550	9,060	9,115	0,994	5,9	365,0	0,0027	182,5	182,5	
3	20,09	0,0498	10,02	10,07	0,995	6	403,4	0,0025	201,7	201,7	

th x при $x > 3$ очень мало отличается от 1

ПЕРЕЧЕНЬ ФИЗИЧЕСКИХ ТАБЛИЦ

Таблица 2-1. Приставки производных единиц в метрической системе (стр. 222).
Таблица 2-2. Основные единицы метрических систем (стр. 223).
Таблица 2-3. Единицы для измерения малых длин (стр. 228).
Таблица 2-4. Механические и акустические величины, их размерности и единицы измерения (стр. 232 и сл.).
Таблица 2-5. Молекулярные и тепловые величины, их размерности и единицы измерения (стр. 236 и сл.).
Таблица 2-6. Электрические и магнитные величины, их размерности и единицы измерения в системе CGSE (стр. 239).
Таблица 2-7. То же в системе CGSM (стр. 240).
Таблица 2-8. То же в системе МКСА (стр. 241).
Таблица 2-9. Световые величины и их единицы измерения (стр. 242).
Таблица 2-10. Часто встречающиеся физические величины (стр. 244).
Таблица 2-11. Абсолютные ошибки измерений и их квадраты (стр. 249).
Таблица 2-12. Абсолютные и относительные ошибки измерений (стр. 253).
Таблица 2-13. Атомные веса химических элементов (стр. 255).
Таблица 2-14. Периодическая система химических элементов Д. И. Менделеева (стр. 257).
Таблица 2-15. Химические элементы в порядке атомных номеров (Z) (стр. 263).
Таблица 2-16. Латинские названия химических элементов (стр. 266).
Таблица 2-17. Общие свойства химических элементов и некоторых неорганических соединений (стр. 268).
Таблица 2-18. Общие свойства некоторых органических соединений (стр. 283).
Таблица 2-19. Общие свойства некоторых минералов (стр. 288).
Таблица 2-20. Состав и температуры замерзания морской воды (стр. 292).
Таблица 2-21. Составные части воздуха (стр. 293).
Таблица 2-22. Некоторые параметры международной стандартной атмосферы (по ГОСТ 4401-48) (стр. 296).
Таблица 2-23. Ускорение силы тяжести (стр. 297).
Таблица 2-24. Приведение показаний водяного манометра к ртутному (стр. 300).
Таблица 2-25. Приведение показаний барометра к 0° С (стр. 301).
Таблица 2-26. Поправка барометра на капиллярную депрессию ртути (стр. 302).
Таблица 2-27. Приведение веса тела к пустоте (стр. 302).
Таблица 2-28. Приведение объема газа к 0° С и 760 *мм* рт. ст. (стр. 303).
Таблица 2-29. Плотность газов при 0° С и 760 *мм* рт. ст. (стр. 305).
Таблица 2-30. Плотность сухого воздуха при разных температурах (стр. 306).
Таблица 2-31. Плотность жидких и твердых тел (стр. 307).
Таблица 2-32. Плотность и удельный объем воды при разных температурах (стр. 310).
Таблица 2-33. Плотность и удельный объем ртути в интервале температур от 0 до 100° С (стр. 311).
Таблица 2-34. Плотность водных растворов некоторых солей и кислот при 15° С (стр. 312).

Таблица 2-35. Плотность водных растворов серной кислоты в интервале температур от 0 до 40° С (стр. 313).
Таблица 2-36. Плотность водных растворов этилового спирта при 15° С (стр. 314).
Таблица 2-37. Плотность водных растворов сахара в интервале температур от 10 до 50° С (стр. 315).
Таблица 2-38. Ареометрические шкалы (стр. 316).
Таблица 2-39. Упругие свойства металлов (стр. 319).
Таблица 2-40. Упругие свойства неметаллических тел (стр. 320).
Таблица 2-41. Твердость тел (стр. 321).
Таблица 2-42. Десятибалльная шкала твердости (стр. 321).
Таблица 2-43. Скорость звука в воздухе (стр. 322).
Таблица 2-44. Скорость звука в парах и газах (стр. 323).
Таблица 2-45. Скорость звука в жидкостях (стр. 323).
Таблица 2-46. Скорость звука в твердых телах (стр. 324).
Таблица 2-47. Частота колебаний некоторых музыкальных тонов (стр. 325).
Таблица 2-48. Коэффициенты поглощения звука (стр. 326).
Таблица 2-49. Коэффициенты звукоизоляции (стр. 326).
Таблица 2-50. Коэффициенты внутреннего трения (вязкости) газов и паров (стр. 327).
Таблица 2-51. Коэффициенты внутреннего трения (вязкости) жидкостей (стр. 328).
Таблица 2-52. Внутреннее трение (вязкость) в твердых телах (стр. 329).
Таблица 2-53. Диффузия газов и паров (стр. 330).
Таблица 2-54. Скорость, длина свободного пробега, число столкновений и размеры газовых молекул (стр. 331).
Таблица 2-55. Поверхностное натяжение жидкостей (стр. 332).
Таблица 2-56. Растворимость неорганических солей и тростникового сахара в воде (стр. 333).
Таблица 2-57. Диффузия водных растворов (стр. 334).
Таблица 2-58. Основные точки стоградусной международной температурной шкалы и другие температурные шкалы (стр. 335).
Таблица 2-59. Термические коэффициенты расширения твердых тел (стр. 337).
Таблица 2-60. Термические коэффициенты расширения жидкостей (стр. 338).
Таблица 2-61. Тепловое расширение воды (стр. 339).
Таблица 2-62. Тепловое расширение ртути (стр. 339).
Таблица 2-63. Термические коэффициенты расширения и давления газов (стр. 340).
Таблица 2-64. Точки плавления и кипения тел (стр. 341).
Таблица 2-65. Точка кипения воды при различных барометрических давлениях (стр. 343).
Таблица 2-66. Зависимость точки кипения жидкостей от давления (стр. 343).
Таблица 2-67. Давление и плотность насыщенного водяного пара в интервале температур от —20 до 100° С (стр. 344).
Таблица 2-68. Психрометрическая таблица (стр. 345).
Таблица 2-69. Давление насыщенных паров жидкостей при различных температурах (стр. 346).
Таблица 2-70. Критические даты (стр. 347).
Таблица 2-71. Теплопроводность твердых тел (стр. 348).
Таблица 2-72. Теплопроводность жидкостей (стр. 349).
Таблица 2-73. Теплопроводность газов (стр. 349).
Таблица 2-74. Удельные теплоемкости твердых и жидких тел (стр. 350).
Таблица 2-75. Удельная теплоемкость воды и ртути (стр. 351).
Таблица 2-76. Удельные теплоемкости газов и паров (стр. 351).
Таблица 2-77. Удельные теплоты плавления и парообразования (стр. 352).
Таблица 2-78. Магнитная восприимчивость пара- и диамагнитных тел (стр. 353).

Таблица 2-79. Магнитная проницаемость ферромагнитных тел (стр. 355).
Таблица 2-80. Магнитная проницаемость железа и стали в слабых полях (стр. 355).
Таблица 2-81. Намагниченность при насыщении в зависимости от температуры (стр. 356).
Таблица 2-82. Точка магнитного превращения (точка Кюри) (стр. 356).
Таблица 2-83. Горизонтальная составляющая земного магнетизма (стр. 357).
Таблица 2-84. Диэлектрическая постоянная (диэлектрическая проницаемость) твердых, жидких и газообразных тел (стр. 357).
Таблица 2-85. Электродвижущие силы гальванических элементов (стр. 358).
Таблица 2-86. Термоэлектродвижущие силы (стр. 360).
Таблица 2-87. Удельное сопротивление твердых тел (стр. 363).
Таблица 2-88. Температурный коэффициент сопротивления чистых металлов и сплавов (стр. 364).
Таблица 2-89. Сопротивление чистых металлов при низких температурах (стр. 365).
Таблица 2-90. Зависимость сопротивления металлов от давления (стр. 365).
Таблица 2-91. Отношение коэффициентов теплопроводности и электропроводности металлов (стр. 366).
Таблица 2-92. Удельное сопротивление электролитов (стр. 366).
Таблица 2-93. Электрохимические эквиваленты (стр. 367).
Таблица 2-94. Подвижность ионов в воде (стр. 367).
Таблица 2-95. Подвижность ионов в газах (стр. 368).
Таблица 2-96. Яркость некоторых источников света (стр. 368).
Таблица 2-97. Яркие линии испускания (стр. 369).
Таблица 2-98. Длины волн некоторых линий Фраунгофера (стр. 370).
Таблица 2-99. Полосы поглощения углекислоты и водяного пара в инфракрасной части спектра (стр. 370).
Таблица 2-100. Поглощение инфракрасных волн кварцем (стр. 370).
Таблица 2-101. Отражение света металлами (стр. 371).
Таблица 2-102. Коэффициенты преломления кристаллов (стр. 371).
Таблица 2-103. Коэффициенты преломления оптических стекол (стр. 372).
Таблица 2-104. Коэффициенты преломления кварца в видимой части спектра (стр. 372).
Таблица 2-105. Коэффициенты преломления жидкостей (стр. 372).
Таблица 2-106. Коэффициенты преломления воды (стр. 373).
Таблица 2-107. Коэффициенты преломления газов (стр. 374).
Таблица 2-108. Вращение плоскости поляризации в растворах (стр. 374).
Таблица 2-109. Вращение плоскости поляризации в кварце (стр. 375).
Таблица 2-110. Магнитное вращение плоскости поляризации (стр. 375).
Таблица 2-111. Спектр водорода (стр. 376).
Таблица 2-112. Распределение электронов в атомах (стр. 377).
Таблица 2-113. Ионизационные потенциалы элементов (стр. 381).
Таблица 2-114. Термоэлектронная эмиссия (стр. 381).
Таблица 2-115. Лучи Рентгена (стр. 382).
Таблица 2-116. Радиоактивные ряды урана, актиния и тория (стр. 383).
Таблица 2-117. Естественная радиоактивность других элементов (стр. 385).
Таблица 2-118. Распад радона и его активного осадка (стр. 386).
Таблица 2-119. Эффективные нейтронные сечения некоторых ядер (стр. 387).
Таблица 2-120. Ядерные свойства элементов и их стабильных изотопов (стр. 388).
Таблица 2-121. Ядерные реакции и их энергия (стр. 399).

ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ [1])

Абсолютная величина комплексного числа 11
— система единиц 227, 228, 242
— сходимость 168
Абсцисса 60, 74
— формулы Гаусса 209*
— — Чебышева 208*
Адамса — Крылова метод 213
Адъюнкта 53
Аккумуляторы 358
Акрилат 320
Акустика 322—326
Акустические величины 234*
Алгебра 8—17
— векторная 183—187
Алгебраическая функция 85
Алгебраическое выражение 12—17
— дополнение 53
— уравнение 14
Ампер 238
Анализ, приближенные методы 202—218
— векторный 187—192
— размерностей 223—227
Аналитическая геометрия в пространстве 74—83
— — на плоскости 60—73
Ангстрем 228
Аньези локон 148
Аппликата 74, 75, 96
Аргумент 84
— комплексного числа 11
Ареа (-синус, -косинус, -тангенс, -котангенс) 49
Ареометр 316
Ареометрические шкалы 316—318*
Арифметическая прогрессия 8
Арк (-синус, -косинус, -тангенс, -котангенс) 41, 44, 45
Архимедова спираль 154
Асимптота 145
— гиперболы 68
Асимптотический конус 81
Астроида 154
Атмосфера изотермическая, международная, стандартная 295, 296*
— техническая, физическая 235
Атомная единица массы 243
Атомные веса, физическая шкала 257
— —, химическая шкала 256
— — химических элементов 255—256*
— номера химических элементов 263—265*

Бар 235
Барн 243
Барометр, поправка на капиллярную депрессию ртути 302*
—, приведение показаний 301*
Барометрическая формула 295
Безвихревое поле 191
Белл 235
Бернулли лемниската 152
— уравнение 194
Бесконечная геометрическая прогрессия 165
Бесконечно большая величина 86
— малая величина 85—86
Бесконечность 86
Бесконечные ряды 165—183
Биквадратное уравнение 16
Бином Ньютона 10
Биномиальные коэффициенты 11
Биномиальный дифференциал 104
Бинормаль 158
Боме ареометр 316
Бринеля способ 320

Вариации произвольных постоянных, метод 198
Вебер 240
Вейерштрасса признак 171
Вектор 183—187
Вектор-функция 187—189
Векторная алгебра 183—187
Векторное исчисление 183—192
— поле 189

[1]) Числа, помеченные звездочкой (например, 234*), означают, что для соответствующего понятия на указанных страницах имеются таблицы.

Векторное произведение 186, 187
Векторный анализ 187—192
Вероятности интеграл 122*, 123*, 125*
Верде постоянная 375
Вершина кривой 144
Вес тела, приведение к пустоте 302*
Веса меры 402*, 405*, 420*
Вестона элемент 358
Взаимно противоположные векторы 183
Винтовая линия 160
Вихревая линия 192
— точка 192
Вихрь векторного поля 189
Вихря интенсивность 192
Вогнутость 143
Возврата точка 146
Возвратные уравнения 16
Воздух, состав 293, 294
Возрастающая геометрическая прогрессия 9
— функция 93
Вольт 239
Вращение плоскости поляризации в кварце 375
— — — — растворах 374
— — — магнитное 375
Вращения поверхность 77
—тела (объем) 117
Время 220—223, 232
Вронского определитель 196
Выпуклость 143
Выражение алгебраическое 12—17
— подынтегральное 98, 111

Газ, приведение объема к 0° С и 760 *мм* рт. ст. 303*, 304*
Газы благородные инертные 261
Гал 298
Гальванические элементы 358*, 359*
Гамильтона оператор 192
Гамма 228
Гамма-функция 122, 126*
Гармоническая функция 191
Гармонический ряд 165
Гаусс 240
Гаусса кривая 156
— формула 208, 209*
Гаусса—Остроградского формула 141, 190
Гауссовы координаты 163
Гельмерта формула 237
Генри 240
Геодезические линии 51, 165
Геометрическая прогрессия 9, 165
Геометрическое представление уравнения 63, 76
Геометрия аналитическая 60—83
Геометрия дифференциальная 142—165
Герц 234
Гипербола 24, 68—71
Гиперболическая спираль 155
— точка 164
Гиперболические функции 39, 48—51, 430*
— —, интегрирование 107
Гиперболический параболоид 82, 83
— цилиндр 82, 83
Гиперболоид однополостный, двуполостный 81, 83
Гипоциклоида 154
Главная нормаль 158
Главные радиусы кривизны 164
— сечения, нормальные 164
Годограф 187
Градиент скалярного поля 188
— температуры 295
Градус 316
Грамм 220—223
Графики функций см. по названиям функций
Графическое дифференцирование 216
— интегрирование 216
— — дифференциальных уравнений 218
— решение уравнений 202—204
Грина формула 137, 190
Гюльдена теорема 120

Давление, единицы 235
— водяного пара 344*
— насыщенных паров 346*
— нормальное 235
Даламбера признак 166, 168, 171
Двойная точка 146
Двойное векторное произведение 187
Двойной интеграл 127—130, 137
Двуполостный гиперболоид 81, 83
Действительная ось гиперболы 68
— часть комплексного числа 11
Декарта лист 148
Декартовы координаты в пространстве 74
— — на плоскости 60
Деление отрезка в данном отношении 62
Десятичные логарифмы 9, 402—418*
Детерминант (определитель) 53—55
Джоуль 235
Диаметр фигуры 127
Дивергенция 189
Дина 230
Диностратa квадратриса 157
Директриса 67—69

Дирихле условия 176
Дискриминант 15
Дискриминантная кривая 147
Дифференциал 89, 94—96
— биномиальный 104
— дуги 142, 157
— полный, частный 95
Дифференциальная геометрия 142 — 165
Дифференциальное исчисление 84 — 97
Дифференциальные уравнения 192 — 202
— —, графическое решение 218
— — линейные 194, 196
— — — однородные 194
— — неоднородные 197
— — однородные 194
— —, теорема существования решения 192
— —, численное решение 211—215
Дифференцирование 89—96, 216, 218
Дифференцируемая функция 89
Диффузия водных растворов 334*
— газов, паров 330*
Длина 220—223, 232
— вектора 183
— дуги 116
— свободного пробега молекул газов, паров 331*
Дроби рациональные 13, 85
Дуга кусочно-гладкая 135
— плоской кривой 118

Единица массы атомная 243
— X 228
Единицы измерения акустических величин 232—234
— — атомной и ядерной физики 243
— — магнитных величин 239—241
— — малых величин 228*
— — метрических систем 223
— — механических величин 232 — 236
— — молекулярных величин 236
— — световых величин 242
— — тепловых величин 236
— — электрических величин 239 — 242
Единичные векторы 183
Ермакова признак 167

Жезл 155

Замкнутый отрезок 84
Знакоположительный ряд 165
Знакочередующийся ряд 168

Изображение в преобразовании Лапласа 199, 200*, 201*
Изоклина 193
Изолированная точка 146
Изотопы, ядерные свойства 388 — 398*
Инвариантность дифференциала 95
Инварианты уравнения кривой 71
— — поверхности 83
Инерта 227, 230
Инертные газы (благородные) 261
Инерции моменты 118, 119, 131, 132
Интеграл биномиального дифференциала 104
— вероятности 122, 124*, 125*
— двойной 127—129, 130*, 131*, 137
— дифференциального уравнения 192
— кратный 122 и д., 130*—134
— криволинейный 134—141
— неопределенный 97—111
— несобственный 114, 115
— определенный 111 — 126
— от разрывной функции 115
— по поверхности 140, 141
— расходящийся 114
— с бесконечными пределами 114
— сходящийся 114
— тройной 127, 129, 132*, 133*, 134, 141
— Фурье 179
— Эйлера 122
— эллиптический 98, 122, 123*
Интегральная кривая 193, 194
— сумма 111, 122
Интегральное исчисление 97—142
Интегральный косинус 121
— логарифм 98, 122
— признак сходимости 166, 171
— синус 98, 121
Интегралы основные 99*
Интегрирование алгебраических иррациональностей 101—105*
— гиперболических функций 107*, 108*
— графическое 216
— рациональных дробей 100
— — функций 99*
— трансцендентных функций 108—111*
— тригонометрических функций 105—107*
— численное 207—210
Интегрирования отрезок 111
— переменная 98
— постоянная 98
— правила 98, 113
Интегрируемость биномиального дифференциала 104
Интегрирующий множитель 193
Интенсивность вихря 192

Интенсивность источника (стока) 191
Интервал 84
Интерполяция линейная 205
Ионы, подвижность в воде 367*
—, — — газах 368*
—, скорость абсолютная 367
Иррациональная функция 85
Иррациональное выражение 14
Иррациональность в знаменателе 14
Источник 191
Итераций метод 203

Калория международная 238
Каноническая форма уравнения алгебраического 15
— — — гиперболы 68, 72
— — — параболы 73
— — — поверхности 80
— — — прямой 73, 79
— — — эллипса 72
Кардиоида 151
Касательная 142
— к плоской кривой 70, 71, 89
— к пространственной кривой 158
— плоскость 161, 162
Касательной отрезок 143
Кассини овал 151
Квадратичная форма 163
Квадратное уравнение 15
Квадратриса Диностратa 157
Квадратура 194, 207
Квантовое число 377
Килограмм 221—223
Клеро уравнение 194
Коллинеарные векторы 183
Кольцо круговое 22
Компланарные векторы 183
Комплексные числа 11, 12
Конечных приращений формула 92
Конечная поверхность, уравнение 77
Конус 32, 83
— асимптотический 81
— второго порядка 81
— круговой 32, 81
— мнимый 83
— усеченный 33
— эллиптический 33
Конхоида 149
Координаты в пространстве 74, 75
— вектора 183
— гауссовы 163
— географические 299*
— декартовы прямоугольные 60, 74
— криволинейные 161
— на плоскости 60, 61
— полярные 61
— сферические 75
— центра тяжести 131, 133
— цилиндрические 72
Корень многочлена (кратности k) 13
— уравнения двучленного 17
— — квадратного 15
— — кубического 15
— — степени «n» 17
— — трехчленного 17
— — четвертой степени 16
Корни уравнения 202—204
Косеканс, график 43
— гиперболический 48
Косинус, график 41
— гиперболический 48—49
— интегральный 121
Косинусов теорема 46, 52
Косинусы направляющие 76, 184
Котангенс, график 42
— гиперболический 48, 49
Коши признак сходимости 166, 171
— теорема 93, 192
Коши — Эйлера метод 213
Коэффициент внутреннего трения газов 327
— — — жидкостей 252, 328*
— — — твердых тел 329*
— вязкости газов 327*
— — жидкостей 328—329*
— — паров 327*
— давления газов 340*
— звукоизоляции 326*
— поглощения звука 326*
— преломления воды 373*
— — газов 374*
— — жидкостей 372—373*
— — кварца 372*
— — оптических стекол 372*
— — твердых тел 371*
— расширения газов 340*
— — жидкостей 338*
— — твердых тел 337—338*
— сопротивления температурный сплавов, чистых металлов 364*
— теплопроводности 366*
— угловой 65
— формулы Гаусса 209*
Коэффициентов неопределенных метод 14
Коэффициенты биномиальные 11
— направляющие 79
— Фурье 177, 179
Кратные интегралы 122—134
Кривая второго порядка 71—73
— Гаусса 156
— гиперболического типа 148
— затухающего колебания 156
— интегральная 193, 194
— логарифмическая 155
— плоская 142—157
— показательная 155
— пространственная 157—161
Кривизна 159

Кривизна кривой 144
— поверхности 163
— — полная (гауссова) 164
— — средняя 164
Кривизны главные радиусы 164
— окружность 144
— радиус 144, 159
— центр 144
Криволинейная трапеция 115
Криволинейные координаты 161
Криволинейный интеграл 134—140
— сектор 116
Критические даты 347*
Круговое кольцо 22
Круговой конус 33
— сегмент 22
— сектор 23
— цилиндр 30, 31
Кручение пространственной кривой 160
Кручения радиус 160
Крылова — Адамса метод 213
Кубическое уравнение 15
Кулон 238
Кулона закон 225
Кусочно-гладкая дуга 135
Кюри 243
— точка 356*

Лагранжа множители 97
— теорема 92, 194, 195
— уравнение 194
Лапласа оператор 191
— преобразование 199, 200, 202
— —, изображение, оригинал 199, 200*, 201*
— уравнение 191, 200
Левая система координат 74
Левый предел функции 88
Лейбница признак сходимости 171
— теорема 168, 171
Лемниската Бернулли 152
Линейная интерполяция 205
Линейное алгебраическое уравнение 15
— дифференциальное уравнение 194, 196
Линейных алгебраических уравнений система 55—59
Линии винтовые 160
— вихревые 192
— геодезические 51, 165
— испускания 369*
— координатные 161
— кривизны 165
— уровня 188
— Фраунгофера 370*
Линия двоякой кривизны 157
— прямая 63
Линия прямая, уравнение 63
Липшица условие 192, 195
Литр 222
Лобачевского признак 166
Логарифм десятичный 9, 402 — 418*
—интегральный 98, 122
— натуральный 9, 426—429*
Логарифмическая кривая 155
— спираль 155
Локон Аньези 148
Лопиталя правило 87
Лошадиная сила 235
Лучи Рентгена 382*, 383*
Люкс 242
Люмен 242

Магнетизм земной 357*
Магнитная восприимчивость 353*, 354*
— проницаемость 355*
Магнитное вращение удельное 375
Магнитные величины 239—241*
— явления 353—368*
Маклорена ряд 172
Максимум функции 93, 96
Манометр водяной, ртутный 300*
Масса 131, 132, 220—223, 227, 232
Математические постоянные 401*
— таблицы 401—430
Матрица 57—59
Менье теорема 164
Металлоорганические соединения 281, 282*
Металлы 260, 261
— упругие, свойства 319*
— цветные, черные 262
Метр 220, 221
Метрическая система 220—223
Механические величины 232—236*
— квадратуры 207
Минералы, общие свойства 288—291*
Минимум функции 93, 96
Минор 53, 57
Мнимая ось гиперболы 68
— прямая 72
— часть комплексного числа 11
Мнимый конус 83
— эллипсоид 83
Многогранники 25
—, объемы и поверхности 24—37
Многозначная функция 84
Многоугольник 21, 62
Многочлен 13, 85
Множитель интегрирующий 193
— Лагранжа 97
— нормирующий уравнения плоскости 77
— — — прямой 64, 79

Модуль вектора 183
— комплексного числа 11
Мозли закон 382
Молекулярные величины 236*, 237*
— явления 327—352*
Молекулярный вес газов 368
Мольвейде формула 46
Момент инерции 118, 119, 131, 132
Монотонная функция 93
Мооса шкала 321
Морская вода, состав и температура замерзания 292, 293
Муавра формула 12
Музыкальный тон, частота колебаний 325*

Набла 192
Намагниченность 356*
Направлений поле 193
Направляющие косинусы 76, 184
Натуральный логарифм 9, 426 — 429*
Начало вектора 183
— координат 60
Начальные условия 192
Независимая функция 196
Независимой переменной функция 84
Неметаллы (металлоиды) 260, 261
— упругие свойства 320*
Неограниченная функция 86
Неопределенная система уравнений 56
Неопределенности раскрытие 87
Неопределенные интегралы 97 — 111
Неопределенных коэффициентов метод 14, 212
Неорганические соединения, свойства 268 — 282*
Неполное квадратное уравнение 15
Неправильная дробь 13
— функция 88, 94
Неравенства 17
Несобственный интеграл 114, 115
Несовместная система уравнений 56
Несократимая дробь 12, 13
Нечетная функция 84
Неявная функция 85
Нормали отрезок 143
Нормаль 143, 161, 162
— главная 158
— к кривой 89
— к кривым второго порядка 70, 71
Нормальная плоскость 158, 163
Нормальное уравнение плоскости 77
— — прямой в пространстве 79
Нормальное уравнение прямой на плоскости 63
Нормальный закон распределения 156
Нормирующий множитель 64, 77, 79
Нуль-вектор 183
Ньютон 234
Ньютона бином 10
— метод 206, 207
Ньютона — Лейбница формула 113

Обильность источника, стока 191
Область существования интеграла 111
— — функции 84, 93
— сходимости 170
Образующая 29 — 31, 33
Обратные гиперболические функции 49, 50
— тригонометрические функции 41, 44, 45
Общее решение дифференциального уравнения 192
— уравнение кривой второго порядка 71
— — плоскости 77
— — прямой 63
Общий член ряда 169
Объем 130, 132
— тела вращения 117
— — произвольной формы 117
Обыкновенные дифференциальные уравнения 192
Овал Кассини 151
Огибающая 147
Ограниченная функция 86
Однозначная функция 84
Одной переменной функция 84
Однополостный гиперболоид 81, 83
Односвязная область 137
Окрестность точки 84, 96
Окружность 66, 67
— кривизны 144
Октава 325
Октант 74
Ом 239
Оператор Гамильтона 192
— Лапласа 191
Операционное исчисление 199 — 202
Определенный интеграл 111 — 126
— — , теорема существования 111
Определитель 53 — 55
— Вронского 196
Оптика 368 — 375
Органические соединения, свойства 283 — 287*
Ордината 60, 74

Ордината начальная 63
Оригинал в преобразовании Лапласа 199, 200*, 201*
Орт 183
Освещенность 242
Оси координат в пространстве 74
— — на плоскости 60
Основные величины систем единиц 224
Особая точка 146
Особое решение 193
Остаток сходящегося ряда 165
Остаточный член ряда 172, 176
Остроградского — Гаусса теорема 141
— — формула 190
Ось гиперболы, параболы, эллипса 67, 69
Открытый отрезок 84
Отражение света 371*
Отрезок, деление в данном отношении 62
— касательной 143
— нормали 143
Ошибка абсолютная 246, 249, 253
— аргумента 249
— вероятная 247, 248
— , вычисление 251 — 253
— относительная 246, 247, 250, 251, 253
— систематическая 245, 246
— случайная 245, 246
— средняя 247
— — квадратичная 247
— функции 249, 250

Парабола 24, 69, 71, 147, 208
— n-го порядка 148
— полукубическая 148
Параболическая спираль 155
Параболический сегмент 24
— цилиндр 82, 83
Параболоид 38, 82, 83
Параллелепипед прямоугольный 26
Параллелограмм 20
Параллельности условие 95, 78
Параллельный перенос системы координат в пространстве 74
— — — — на плоскости 60
Параметр кривой 71
— параболы 69
— функции 85
Параметрическая функция 85, 92
Параметрические уравнения линий см. название соответствующих линий
Парсеваля равенство 179
Паскаля треугольник 11
— улитка 150
Первая квадратичная форма 163
Первого порядка дифференциальные уравнения 192 — 195
Первообразная функция 97
Переменная интегрирования 98, 111
Переменной замена 98, 114
Переменных разделение 194
Пересекающиеся прямые 72
Перестановки 10
Период полураспада 383
— функции 85
Периодическая система элементов 257, 258*, 259*
— функция 85
Перпендикулярности условие 65, 78, 80
Пирамида 27 — 29
— треугольная 27, 76
— усеченная 28
— — правильная 28
Плоские кривые 142 — 157
Плоскостей пучок 78
Плоскость 77, 78
— касательная 161, 162
— нормальная 158, 163
— соприкасающаяся 158
— спрямляющая 158
Плотность 315
— водного раствора кислот 312*
— — — сахара 315*
— водных растворов серной кислоты 312*
— — — солей 312*
— — — этилового спирта 314*
— воды 310*
— водяного пара 344*
— газов 305*
— жидких тел 307 — 309*
— ртути 311*
— сплавов 307*, 308*, 309*
— сухого воздуха 306*
— твердых тел 307 — 309*
— тяжелых жидкостей 308*, 309*
— этилового спирта 314*
Площадь плоской фигуры 18 — 24, 119, 130
— поверхности 130
— треугольника, многоугольника 62
Поверхности 161 — 165
— вращения 77, 116, 117
— второго порядка 80 — 83
— уравнения 76
— уровня 188
Поверхностное натяжение жидкости 332*
Поворот системы координат 74, 75
Поглощение инфракрасных волн 370 — 371*

Поглощение света 370
Погрешность средняя квадратическая 179
Подкасательная 143
Поднормаль 143
Подстановка 194 — 195
— , правила 98
— тригонометрическая 104
— Эйлера 103
Подынтегральная функция 98, 111
Подынтегральное выражение 98, 111
Показательная кривая 155
— функция 92, 430*
Поле безвихревое 191
— векторное 189
— направлений 193
— плоское 190
— потенциальное (безвихревое) 191
— скалярное 188
— соленоидальное 191
Полиметилметакрилат 320
Полином 85
Полное приращение 95
Полный дифференциал 95, 96
Полосы поглощения водяного пара, углекислоты 370*
Полукубическая парабола 148
Полуоси, эллипса, гиперболы 67, 68
Полураспада период 383
Полюс 184
Поляризации плоскости, вращение 374 — 375*
Полярная ось 61
— система координат 61
Полярные координаты на плоскости 61
Полярный угол 61, 75
Понижение порядка дифференциального уравнения 195
Порядок бесконечно малых 86
— дифференциального уравнения 192
Последовательность числовая расходящаяся, сходящаяся 86
Последовательных приближений метод 211
Постоянная Верде 375
— интегрирования 98
— Планка 228
— произвольная 98
— распада 383
— эйлерова 121
Потенциальная функция 191
Потенциальное поле 191
Потенциалы ионизационные элементов 381*
Поток 190
Правая система координат 74
Правило см. соответствующее название
Правильная рациональная дробь 13
Правильный многоугольник 21
Правый предел функции 88
Практическая система единиц 223
Предел интеграла 111
— функции 85 — 88, 94
— числовой последовательности 85
Прекращения точка 146
Преобразование выражения $\sqrt{A \pm \sqrt{B}}$ 14
— координат в пространстве 74
— — на плоскости 60
— трехчленов второй степени 15
Приближенное представление функции 202 — 207
— решение алгебраических и трансцендентных уравнений 202, 207
— — дифференциальных уравнений 211, 215
Приближенные методы анализа 202, 218
Приведения формулы 39*
Приведенное квадратное уравнение 15
Призма 25, 26
Признак Вейерштрасса 171
— Даламбера 166, 168, 171
— Ермакова 167
— Лобачевского 166
— сходимости 165, 171
— — Коши 166, 171
Принцип количества электронов 377
— Паули 377
— энергетический 377
Приращение аргумента, функции 88, 89
Приращений конечных формула 92
Прогрессия арифметическая 8
— геометрическая 9, 165
Произведение векторов 186
— рядов 169
Производная 89, 90*, 91*, 92, 113, 224
— вектор-функции 187
— вторая 89
— высшего порядка 89, 95
— n-го порядка 84
— по направлению 95
— частная 94
Произвольная постоянная 198
Проницаемость диэлектрическая (диэлектрическая постоянная) газообразных, жидких и твердых тел 357 — 358*

Пространственные кривые 157—161
— линии 77
Противоположные векторы 183
Прямая в пространстве 79, 80
— на плоскости 63 — 66
Прямой круговой конус 32, 81
— — — усеченный 33
— — цилиндр 30
— — — усеченный 31
Прямоугольная декартова система координат в пространстве 74,
— — — — на плоскости 60
Прямоугольный параллелепипед 26
Психрометрическая таблица 345*
Пуаз 236
Пуазейля формула 252
Путь 232
— точки 118
Пучок плоскостей 78
— прямых 64, 66
Пьеза 235

Работа 118, 226
Равномерная сходимость 171
Равноосная гипербола 69
Равносильные бесконечно малые 86
— неравенства 17
Радиан 43
Радиоактивность элементов естественная 385*
Радиоактивные элементы 262
Радиус кривизны 144, 159
— — главный 164
— кручения 160
— сходимости 170
Радиус-вектор 61, 75, 184
Развертка кривой 145
— окружности 154
Разделение переменных 194
Разложение многочлена на множители 12
— на элементарные дроби 13
— определителя по минорам 53
— функций в ряды 173 — 175*, 180 — 182*
Размерность (анализ, теория) 223 — 227
— акустических величин 232 — 236
— магнитных величин 239 — 240*
— молекулярных и тепловых величин 236 — 237
—, формулы 223
Размеры молекул газов, паров 331*
Размещения 10
Разность векторов 185
— рядов 169
Разрыва точка 146
Ранг матрицы 57
Распад, постоянная 383
— радона 386*
Распадающаяся кривая второго порядка 71
Распределение электронов в атомах 377 — 381*
Распределения нормальный закон 156
Расстояние между точками 61, 75
— от точки до плоскости 78
— — — — прямой 78
Растворимость неорганических солей 333*
— тростникового сахара 333*
Расходящаяся последовательность 86
Расходящийся интеграл 114
— ряд 165
Расширение воды 339*
— ртути 339*
Рациональная дробь 13, 85
— функция 85
Рациональные выражения 12
Редкоземельные элементы 262
Резерфорд 243
Рекуррентная формула 100
Рентген 243
Рентгена лучи 382*, 383*
Решение косоугольных треугольников 47 — 48
— системы линейных алгебраических уравнений 55 — 59
— уравнений алгебраических 15 — 17
— — дифференциальных 192, 197
— — приближенное алгебраических и трансцендентных 202 —207
— — — дифференциальных 211 — 215
Римана теорема 168
Ролля теорема 92
Ромб 20
Ртуть, плотность, удельный объем 311*
Ряды, применение 212
— бесконечные 165 — 183
— радиоактивные 383 — 385*
— числовые 9, 165 — 170

Самоприкосновения точка 146
Саррюса правило 53
Сахар, плотность водных растворов 314
Световой поток 242
Световые величины 242*
Свеча международная 242
Сегмент 84
— гиперболический, параболический 24

Сегмент круговой 23, 421*
— параболоида вращения 38
— шаровой 34
— эллиптического параболоида 38
Секанс 42
— гиперболический 48
Сектор криволинейный 116
— круговой 23
— шаровой 35
Секунда 220 — 223
Серная кислота, плотность водных растворов 313*
Серре — Френе формула 161
Сечение главное 164
— нормальное 164
— ядер нейтронов 387*
Сила 222
— звука 235
— света 242
— термоэлектродвижущая 360*
Симпсона формула 208
Синус, график 41
— гиперболический 48, 49
— интегральный 98, 121
Синусов теорема 46, 52
Система единиц 220 — 223
— —, переход от одной системы к другой 227 — 231
— координат в пространстве 74, 75
— — на плоскости 60, 61, 74
— линейных уравнений 55 — 59
— логарифмов 9
Скаляр 183
Скалярное поле 188
— произведение 185
Скорость 226, 232
— звука в воздухе, газах, жидкостях, парах, твердых телах 322 — 324*
— молекул газов, паров 331*
— угловая 232
Смешанное произведение векторов 187
Соединения 10
Соленоидальное поле 191
Соприкасающаяся плоскость 158
Сопровождающий трехгранник 157
Сопротивление металлов, зависимость от давления 365*
— удельное электролитов 366*
Сопряженные гиперболы 68
— комплексные числа 11
Сочетания 10
Спектр водорода 376*
Спираль архимедова 154
— гиперболическая, логарифмическая, параболическая 155
Спирт этиловый, плотность 314*
Спрямляющая плоскость 158
Сравнение рядов 165
Средняя квадратичная погрешность 179
— кривизна поверхности 163
Стен 230
Степенная функция 148
Степенной ряд 170
Степень уравнения 15
Стильб 242, 368
Стирлинга формула 87
Сток 191
Стокса формула 141, 190
Строение атома 376 — 400
Строфоида 147, 149
Сумма рядов 165, 168, 170
Сутки 221
Существования область 195
Сфера 80
Сферическая тригонометрия 57
Сферические координаты 75
Сходимости интервал 170
— область 170
— признаки 165 — 168, 171
— радиус 170
Сходимость 170
Сходящаяся последовательность, числовая 86
Сходящийся интеграл 114
— ряд 165

Тангенс, график 41
— гиперболический 48, 49
Тангенсов теорема 46
Твердости число 320
— шкала 321*, 322*
Твердость тела 320, 321*, 322*
Тейлора ряд 87, 172
Тело вращения (объем) 117
Тем 227
Теорема о пределах 86, 87
— о среднем 112
— существования определенного интеграла 111
— — решения дифференциального уравнения 192, см. также соответствующее название
Тепловые величины 236
Теплоемкость воды 351*
— газов и паров 351 — 352*
— жидких и твердых тел 350*
— ртути 351*
Теплопроводность газов 349*
— жидкостей 349*
— твердых тел 348*
Теплота 327* — 352*
— парообразования 352*
— плавления 352*
Термопары 361*, 362*
Тетраэдр 27, 76

Техническая система единиц 223
Тон нормальный, частота 325
Тонна 222
Тор 36
—, единица измерения давления 235
Точка вихревая 192
— возврата 146
— гиперболическая 164
— двойная 146
— изолированная 146
— кипения воды 343*
— — жидкостей 343 — 344*
— — тел 341 — 342*
— кратная 146
— круговая 104
— Кюри 356*
— магнитного превращения 356*
— максимума, минимума 93
— перегиба 143
— пересечения плоскости и прямой 80
— — прямых 66
— плавления тел 341 — 342*
— прекращения 146
— приложения 183
— разрыва 146
— —, первого и второго рода 88
— самосоприкосновения 146
— угловая 147
— уровня 146
— устранимого разрыва 88
— эллиптическая, гиперболическая, параболическая 164
Трактриса 156
Трансцендентная функция 85
— —, интегрирование 108
Трапеций формула 208
Трапеция 19
— криволинейная 115, 116
Трение внутреннее (вязкость) 327*
Треугольник 18, 46 — 48, 62
— Паскаля 11
— сферический 51, 52
— —, избыток 51
Трехчлен второй степени 15
Тригонометрическая форма комплексного числа 11
Тригонометрические функции 39—43, 422 — 425*
— —, интегрирование 105
— — обратные 41
Тригонометрический ряд 177
Тригонометрия сферическая 51
Тройной интеграл 127, 129, 132 — 134*, 141
Тропосфера 293
Трохоида 152
Тяжести центр 118, 119, 131
Убывающая геометрическая прогрессия 9
— функция 93
Угловая скорость, единицы 234
— точка 147
Угловой коэффициент 63, 65
— — касательных 193
Угол между кривыми 143
— — плоскостями 78
— — прямой и плоскостью 80
— — прямыми в пространстве 80
— — — на плоскости 65
— полярный 61
— смежности 144, 159
Удельное магнитное вращение 375
— сопротивление твердых тел 363*
Удельный объем воды 310*
— — ртути 311
Узловая точка 146
Улитка Паскаля 150
Уравнение в полных дифференциалах 193
— с разделяющимися переменными 193, 194, см. также соответствующие названия
Уравнения 14 — 17
—, геометрическое представление 63, 76
—, — решение 202 — 204
Уровня линии, поверхности 188
Усеченная пирамида 28
— призма 25
Усеченный конус 33
— цилиндр 31
Ускорение 226
— силы тяжести 251, 297*, 298
Условия измерения 254 — 255, см. также соответствующие названия
Условно сходящийся ряд 168
Условный экстремум 97

Фарада 239
Фигуры плоские 18 — 24
Физическая система единиц 222
— шкала атомных весов 257
Физические постоянные 244, 245*
Фокусы кривых второго порядка 67 — 69
Форма квадратичная первая 163
Формула см. соответствующее название
Фот 242
Френе — Серре формулы 161
Функции многих переменных 93 — 97
— одной переменной 84 — 93
Функциональный ряд 170—183
Функция точки 94

Фурье интеграл 183
— коэффициенты 177, 179
— ряд 176
— — неполный 178
Фурье — Эйлера формула 177

Характеристическое уравнение 197, 198
Химическая шкала атомных весов 256
Химические элементы, атомные веса 255 — 256*
— —, — номера 263 — 265*
— —, латинские названия 266 — 267*
— —, общие свойства 268 — 282*
Хорд метод 205, 206

Целая рациональная функция 85
Центнер 222
Центр кривизны 145
— кривой второго порядка 71
— пучка 64
— тяжести, координаты 118, 119, 131
Центральная кривая второго порядка 71
— поверхность 83
Цепная линия 156
Циклоида 152
Цилиндр 29 — 32
— второго порядка 82
— гиперболический 82, 83
— параболический 82, 83
— полый 31
— прямой 29
— — круговой 30, 82
— усеченный 30
— эллиптический 82, 83
Цилиндрическая поверхность 76, 83
Цилиндрические координаты 75
Цилиндрическое кольцо 35
Циркуляция 135, 189
Циссоида 149

Частная производная 95
— сумма ряда 165
Частное решение 192
Частный дифференциал 94, 95
Чебышева условие интегрируемости биномиального дифференциала 104
— формула 208*
Четная функция 84
Четырехугольник 19
Численное интегрирование 207—210
Численное интегрирование дифференциальных уравнений 211 — 215
Число комплексное 11
— Фарадея 367
Числовая прямая 84
Числовой ряд 9, 165 — 170
Член прогрессии 8, 9
— ряда 165
— — общий 169

Шар полый 34
Шаровая поверхность 80
Шаровой сегмент 34
— сектор 35
— слой 35
Шкала абсолютная термодинамическая 335
— Кельвина 335
— Мооса 321
— Реомюра 336
— твердости, условная 322*
— температурная 335
— Фаренгейта 336
— физическая атомных весов 257
— химическая атомных весов 256

Эвольвента кривой 145
— окружности 154
Эволюта 145
Эйлера интеграл 122
— подстановка 103
— постоянная 87, 121, 125
— уравнение 199
— формула для поверхностей 164
— — для показательной и тригонометрических функций 51
Эйлера — Коши метод 213
Эйлера — Фурье формула 177
Эквивалент теплоты механический 231
— электрохимический 367*
Эквивалентные бесконечно малые 86
Экстремум 93, 96, 97
— условный 97
Эксцентриситет 67 — 69
Электрические величины 239—242*
— явления 353 — 368*
Электрический заряд 226
Электроновольт 243
Электроны, распределение в атомах 377 — 381*
Электропроводность 366*
Элемент Вестона 358
— линейный поверхности 163
— определителя 53
Элементарная дробь 13

Элементарная математика 8 — 59
— площадь 128, 129
— функция 85
Элементарный объем 134
Элементы гальванические 358*, 359*
— редкоземельные 262
—, ядерные свойства 388 — 398*
Эллипс 23
— , каноническое уравнение 67
— , полярное уравнение 71
Эллипсоид 36, 37, 80, 83
Эллиптическая точка 164
Эллиптические интегралы 98, 122, 123*
Эллиптический параболоид 82
Эллиптический цилиндр 82
Эман 243
Эмиссия термоэлектронная 381, 382*
Эпициклоида 153
Эрг 230, 235
Эрстед 240

Явная функция 81, 85
Ядерные процессы 376 — 400
— реакция, энергия 399 — 400*
— свойства элементов и их изотопов 388 — 398*
Яркость 242
— источников света 368*

ГОСУДАРСТВЕННОЕ ИЗДАТЕЛЬСТВО
ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ
«ФИЗМАТГИЗ»
Москва, В-71, Ленинский проспект, 15

ГОТОВЯТСЯ К ПЕЧАТИ

Бремикер К., Таблицы логарифмов чисел и тригонометрических функций с шестью десятичными знаками, перев. с нем.

Вол А. Е., Строение и свойства двойных металлических систем, том II.

Кошкин Н. И. и Ширкевич М. Г., Справочник по элементарной физике.

Краткий физико-технический справочник, под редакцией К. П. Яковлева, том II.

Маделунг Э., Математический аппарат физики, перев. с нем.

Мили-Томсон и Комри, Четырехзначные математические таблицы, перев. с англ.

Савелов А. А., Плоские кривые.

Смогоржевский А. С. и Столова Е. С., Справочник по теории плоских кривых 3-го порядка.

Книги продаются в книжных магазинах, а также высылаются почтой наложенным платежом без задатка всеми республиканскими, краевыми и областными отделениями «Книга — почтой».

Краткий
физико-технический справочник, том I.

Редакторы: *И. Н. Бронштейн,*
К. П. Гуров и *Е. Б. Кузнецова.*

Технический редактор *С. Н. Ахламов.*
Корректор *А. С. Бакулова.*

Сдано в набор 5/V 1959 г. Подписано к печати 28/XII 1959 г. Бумага 70 × 92¹/₃₂. Физ. печ. л. 14,00. Условн. печ. л. 16,38. Уч.-изд. л. 29,1. Тираж 150 000 экз. Т-11100. Цена книги 9 руб. 75 коп. Заказ № 1220.

Государственное издательство
физико-математической литературы.
Москва, В-71, Ленинский проспект, 15.

Ленинградский Совет
народного хозяйства.
Управление полиграфической
промышленности. Типография № 1
«Печатный Двор» им. А. М. Горького.
Ленинград, Гатчинская, 26.

КРАТКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ СПРАВОЧНИК

I